

الفصل الدراسى الثانى



2025

إعداد نخبة من خبراء التعليم

الجزء الخاص بالشرح و التمارين

المعاصر

امتحانات إلكترونية باستخدام تقنية QR

GPS

تطبيق التعلُّم التفاعلى







مكتبة الطلبة
للطبع والنشر والتوزيع
٣ شارع كامل صدقى - الفجالة
تليفون: ٢٥٩٠٢٩٩٧ - ٢٥٩٣٧٧٩١ - ٢٥٩٣٤٠١٢ /٠٢
e-mail: info@elmoasserbooks.com
www.elmoasserbooks.com



الخط الساخن
١٥٠١٤



الفصل الدراسى الثانى



مقدمة

الحمد لله الذى وفقنا لتقديم هذا الكتاب من مجموعة كتب «المعاصر» فى الرياضيات... نقدمه إلى أبنائنا الطلبة آملين أن يجدوا فيه المعلم والموجه الذى يعينهم على فهم كل صعب، ويذلل أمامهم كل مغلق وغامض، ويأخذ بأيديهم إلى طريق النجاح والتفوق.

ونقدمه إلى إخواننا المدرسين ليكون لهم عونًا على أداء رسالتهم الشاقة، ونافذة يطلون منها على خبرات إخوة لهم أمضوا قرابة الثلاثين عامًا فى حقل التدريس والتوجيه.

ونحن لن نلجأ - فى هذا التقديم - إلى تقييم عملنا وجهدنا من خلال سرد لمزايا هذا الكتاب وما أُستحدث فيه، ولكننا نترك ذلك لكل من يطوى صفحة منه أو يقرأ سطرًا فيه، لكى يبدى فيه رأيًا ... إن كان نقدًا فنحن نرحب به ... وإن كانت كلمة ثناء فهى خير مقابل نرجوه، وأعز وسام نضعه على صدورنا.

والله لا يضيع أجر من أحسن عملاً، وهو ولى التوفيق،

« المؤلفون »

بطاقة فهرسة

فهرسة أثناء النشر إعداد إدارة الشئون الفنية - دار الكتب المصرية

المعاصر فى الرياضيات / إعداد نخبة من خبراء التعليم
القاهرة : جى بى إس ٢٠٢٤م - (٣ مج) ؛ ٢٨ سم.
الصف الأول الثانوى، الفصل الدراسى الثانى
المحتويات : جـ١. الشرح والتمارين.
جـ٢. الجزء الخاص بالامتحانات.
جـ٣. الجزء الخاص بالإجابات.
تدمك : ٥ - ٠٣٣ - ٩٧٠ - ٩٧٧ - ٩٧٨
١ - الرياضيات - تعليم وتدريس. ٢ - التعليم الثانوى.
٥١٠,٧

رقم الإيداع : ٣٢٠٧٧ / ٢٠٢٤م

تطبيق GPS التفاعلى

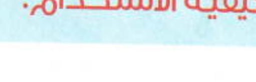





التطبيق التفاعلى من سلسلة كتب ...



كيفية الاستخدام: 1. نزل التطبيق. 2. أنشئ حسابك. 3. أدخل الكود الموجود على ظهر الغلاف.



استمتع بجميع مزايا التطبيق
لجميع المواد الدراسية







شرح - فيديوهات - ألعاب تعليمية - امتحانات تفاعلية - تدريبات




تواصل مع معلمك - تقارير متابعة - إشعارات - أخبار

تصنيف بلوم للمستويات المعرفية



ملاحظة: تم تصنيف الأسئلة بداخل كل تمرين طبقًا لمستويات هرم بلوم والإشارة لها كالتالى:

● تذكر ● فهم ○ تطبيق ● مستويات عليا (تحليل أو تقويم أو ابتكار)

محتويات الكتاب

أولًا : الجبــر وحساب المثلثات

الوحدة الأولى

المصفوفــات

الوحدة الثانية

البرمجة الخطية





الوحدة الثالثة

حســاب المثـلـثـات



ثانيًا : الهندسة التحليلية

الوحدة الرابعة

المتجهات



- الدرس 1 الكميات القياسية والكميات المتجهة والقطعة المستقيمة الموجهة.
- الدرس 2 المتجهات.
- الدرس 3 العمليات على المتجهات.

الوحدة الخامسة

الخط المستقيم



- الدرس 1 تقسيم قطعة مستقيمة.
- الدرس 2 معادلة الخط المستقيم.
- الدرس 3 قياس الزاوية بين مستقيمين.
- الدرس 4 طول العمود المرسوم من نقطة إلى خط مستقيم.



حل امتحان تفاعلى إلكترونى على كل درس باستخدام تقنية :



QR Code



1

قم بتحميل أحد تطبيقات
QR code reader
على هاتفك الذكى



2



افتح التطبيق وامسح
QR code
باستخدام الكاميرا الخاصة بالهاتف
وابدأ حل الامتحان مباشرة

◀ بعد الانتهاء من الامتحان يمكنك معرفة نتيجتك لتقييم نفسك مع عرض تقرير مفصل بالإجابات الصحيحة.

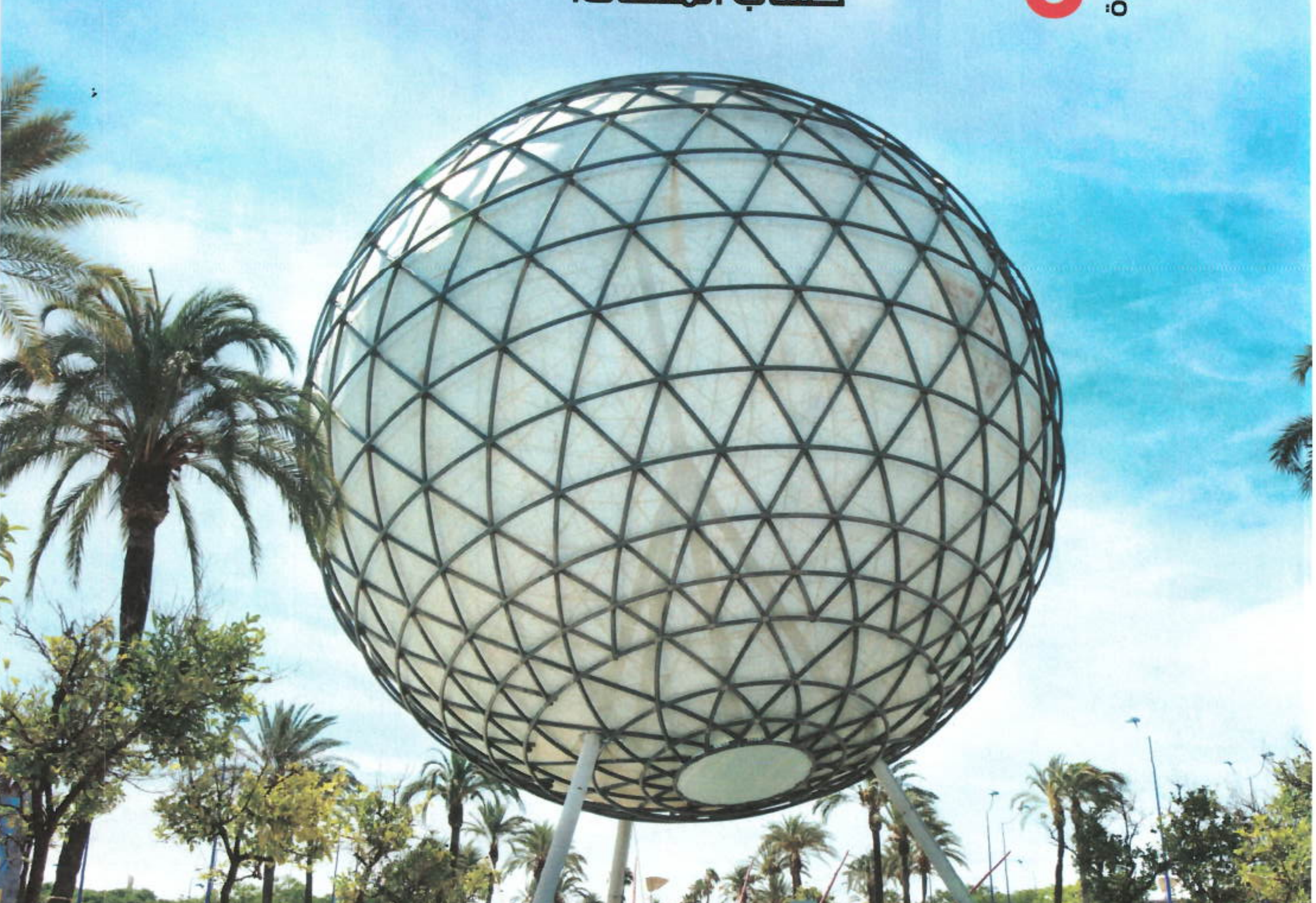
أولًا

الجبـر وحسـاب المثـلثات

الوحدة 1 المصفوفات.

الوحدة 2 البرمجة الخطية.

الوحدة 3 حساب المثلثات.





الوحدة 1

المصفوفات

دروس الوحدة

الدرس 1 تنظيم البيانات فى مصفوفات.

الدرس 2 جمع وطرح المصفوفات.

الدرس 3 ضرب المصفوفات.

الدرس 4 المحددات.

الدرس 5 المعكوس الضربى للمصفوفة.



نـواتـج الـتـعـلُّـم

فى نهاية هذه الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن :

- يتعرف مفهوم المصفوفة ونظمها.
- ينمذج بعض المشكلات الحياتية باستخدام المصفوفات.
- يتعرف بعض المصفوفات الخاصة.
- يتعرف تساوى مصفوفتين.
- يوجد مدور المصفوفة.
- يضرب عددًا حقيقيًا فى مصفوفة.
- يتعرف مفهوم المصفوفة المتماثلة والمصفوفة شبه المتماثلة.
- يجرى عمليات الجمع والطرح والضرب على المصفوفات.
- يتعرف خواص جمع وضرب المصفوفات.
- يوظف استخدام المصفوفات فى مجالات الحياة المختلفة.
- يتعرف محدد المصفوفة من الرتبة الثانية والرتبة الثالثة.
- يوجد قيمة محدد الرتبة الثانية والرتبة الثالثة.
- يوجد مساحة سطح المثلث باستخدام المحددات.
- يحل نظامًا من المعادلات الخطية بطريقة كرامر.
- يوجد معكوس المصفوفة المربعة من النظم ٢ × ٢
- يحل معادلتين آنيتين باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة.

نبذة تاريخيـة

J.J. Sylvester (1814 - 1897)

أول من استخدم مصطلح «مصفوفة Matrix»
هو العالم الإنجليزى : جيمس جوزيف سلفستر (١٨١٤ – ١٨٩٧م)

Arthur Cayley (1821 - 1895)

أول من استخدم المصفوفات هو العالم البريطانى كيلى (١٨٢١ – ١٨٩٥م) وهو عالم رياضيات له الكثير من الأبحاث خاصة فى الجبر وتضمنت تلك الأبحاث نظرية المصفوفة.

انتشرت المصفوفات فى عصرنا الحاضر فشملت العديد من فروع العلوم والمعرفة فنجد استخداماتها فى علوم الإحصاء والاقتصاد والاجتماع وعلم النفس، كما أن لها دورًا هامًا فى علم الرياضيات وخاصة فى فرع الجبر الخطى.

الدرس **1**

تنظيم البيانات فى مصفوفات

مثال توضيحى



- أحد محلات بيع البيتزا يبيع أربعة أنواع من البيتزا :

(بيتزا بالخضروات – بيتزا بالدجاج – بيتزا باللحوم – بيتزا بالجبن)

وينتج لكل نوع من الأنواع السابقة ثلاثة أحجام مختلفة :

(صغير – وسط – كبير)

- لسهولة تذكر المعلومات والمقارنة بينها يقوم صاحب المحل بجدولة متوسط عدد القطع المبيعة يوميًا فى الجدول المقابل بصورة مختصرة.

النوع \ الحجم	صغير	وسط	كبير
بيتزا الخضروات	١٥	١٣	٩
بيتزا الدجاج	١٦	١٨	١٢
بيتزا اللحوم	١٣	١٠	٨
بيتزا الجبن	١٨	٢٠	١٧

- كل عدد فى هذا الجدول له دلالة ، فالعدد ١٠ يدل على عدد القطع المبيعة من بيتزا اللحوم حجم الوسط، والعدد ١٢ يدل على عدد القطع المبيعة من بيتزا الدجاج الحجم الكبير ، ... وهكذا.
- إذا كنا نعلم مسبقًا أن الأعداد بالصف الأول هى متوسط القطع المبيعة يوميًا من بيتزا الخضروات من الأحجام : الصغير ، الوسط ، الكبير على الترتيب ، وبالمثل الأعداد بالصف الثانى من بيتزا الدجاج ، والثالث بيتزا اللحوم ، والرابع بيتزا الجبن بنفس الترتيب فإننا نستطيع الاستغناء عن الجدول السابق وكتابة البيانات فى صورة أكثر اختصارًا بكتابة

الأعداد فقط المتضمنة فيه بنفس ترتيبها داخل قوسين كبيرين من النوع ( )

فنكتب : متوسط البيع اليومى للمحل = $\begin{pmatrix} ٩ & ١٣ & ١٥ \\ ١٢ & ١٨ & ١٦ \\ ٨ & ١٠ & ١٣ \\ ١٧ & ٢٠ & ١٨ \end{pmatrix}$

• تُسمى هذه الصورة **مصفوفة** ، كما تُسمى الأعداد بين القوسين **عناصر المصفوفة.**

• هذه المصفوفة تتكون من :

أربعة صفوف **وثلاثة** أعمدة كما بالشكل المقابل

لذلك نقول إنها مصفوفة **على النظم ٤ × ٣**

(أو اختصاراً مصفوفة ٤ × ٣)

ونلاحظ أننا ذكرنا عدد الصفوف أولاً ثم عدد الأعمدة وليس العكس.

العمود الأول ، العمود الثانى ، العمود الثالث

الصف الأول ← ، الصف الثانى ← ، الصف الثالث ← ، الصف الرابع ←

$\begin{pmatrix} ٩ & ١٣ & ١٥ \\ ١٢ & ١٨ & ١٦ \\ ٨ & ١٠ & ١٣ \\ ١٧ & ٢٠ & ١٨ \end{pmatrix}$

ملاحظة

يمكن لصاحب المحل تنظيم بياناته السابقة فى جدول آخر مثل الجدول التالى :

الحجم \ النوع	بيتزا الخضروات	بيتزا الدجاج	بيتزا اللحوم	بيتزا الجبن
صغير	١٥	١٦	١٣	١٨
وسط	١٣	١٨	١٠	٢٠
كبير	٩	١٢	٨	١٧

وبالمثل يمكن الاستغناء عن الجدول السابق بكتابة الأعداد داخل مصفوفة.

فنكتب : متوسط البيع اليومى للمحل = $\begin{pmatrix} ١٨ & ١٣ & ١٦ & ١٥ \\ ٢٠ & ١٠ & ١٨ & ١٣ \\ ١٧ & ٨ & ١٢ & ٩ \end{pmatrix}$ وهى مصفوفة على النظم ٣ × ٤

مما سبق يمكن تعريف المصفوفة كما يلى :

تعريف المصفوفة

• المصفوفة هى ترتيب لعدد من العناصر (متغيرات أو أعداد) فى صفوف أفقية وأعمدة رأسية بين قوسين بحيث يكون الموقع فى المصفوفة له معنى.

• المصفوفة المكونة من م صفاً ، ن عموداً تكون على النظم م × ن أو من النوع م × ن (وتُقرأ م فى ن) حيث م ، ن عددان صحيحان موجبان.

• عدد عناصر المصفوفة = عدد الصفوف × عدد الأعمدة = م × ن

* التعبير عن العنصر داخل المصفوفة :

– يُرمز للمصفوفة عادة بأحد الحروف الكبيرة مثل : أ ، ب ، ج ، س ، ص ، ...

بينما يُرمز للعنصر داخل المصفوفة بأحد الحروف الصغيرة مثل : أ ، ب ، حـ ، س ، ص ، ...

– إذا أردنا التعبير عن العنصر داخل المصفوفة أ الذى يقع فى الصف ص والعمود ع

فإننا نكتبه على الصورة $أ_{ص ع}$

فمثلًا العنصر $أ_{٢٣}$ يقع فى الصف الثانى والعمود الثالث [ويُقرأ : أ اثنين ثلاثة]

، العنصر $أ_{٣٢}$ يقع فى الصف الثالث والعمود الثانى [ويُقرأ : أ ثلاثة اثنين]

مثال ١

إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} -٢ & ٠ & \frac{١}{٢} \\ ١ & ٦ & -٤ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٤ & ٥ \\ -١ & ٨ \end{pmatrix}$ ، $ج = \begin{pmatrix} ٣ & -٣ & \sqrt{٥} \\ -١ & ٠ & -٢ \\ ٢ & \frac{١}{٤} & ٩ \end{pmatrix}$

١ اكتب نظم كل من المصفوفات : أ ، ب ، ج

٢ اكتب العناصر الآتية : $أ_{٢٢}$ ، $ب_{١٢}$ ، $أ_{٢٣}$ ، $ب_{٢١}$ ، $حـ_{٢٣}$ ، $حـ_{٣٣}$

الحل

١ أ مصفوفة على النظم ٢ × ٣ ، ب مصفوفة على النظم ٢ × ٢ ، ج مصفوفة على النظم ٣ × ٣

٢ $أ_{٢٢} = ٦$ ، $ب_{١٢} = -١$ ، $أ_{٢٣} = -٤$ ، $ب_{٢١} = ٥$ ، $حـ_{٢٣} = \frac{١}{٤}$ ، $حـ_{٣٣} = -٢$

حاول بنفسك

إذا كانت المصفوفة $س = \begin{pmatrix} ٥ & -٢ \\ ٤ & ١ \\ -٧ & ٠ \end{pmatrix}$:

١ اكتب نظم المصفوفة س **٢** اكتب العناصر الآتية : $س_{٢٢}$ ، $س_{١٢}$ ، $س_{٢١}$

ملاحظة

إذا كانت أ مصفوفة على النظم م × ن فيمكننا كتابتها على الصورة :

أ = $(أ_{ص ع})$ حيث ص = ١ ، ٢ ، ٣ ، ... ، م ، ع = ١ ، ٢ ، ٣ ، ... ، ن

وسوف تقتصر دراستنا على الحالات التى فيها ١ ≤ م ≤ ٣ ، ١ ≤ ن ≤ ٣

مثال ٢

اكتب المصفوفة $(\text{أ}_{\text{ص ع}})$ على النظم ٣ × ٢ بحيث : $\text{أ}_{\text{ص ع}} = ٢\,\text{ص} - \text{ع}$

الحل

∵ المصفوفة على النظم ٣ × ٢ ∴ $\text{أ} = \begin{pmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} \\ \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٢٣} \end{pmatrix}$

حيث $\text{أ}_{١١} = ٢ \times ١ - ١ = ١$ ، $\text{أ}_{٢١} = ٢ \times ١ - ٢ = ٠$ ، $\text{أ}_{١٢} = ٢ \times ٢ - ١ = ٣$

، $\text{أ}_{٢٢} = ٢ \times ٢ - ٢ = ٢$ ، $\text{أ}_{١٣} = ٢ \times ٣ - ١ = ٥$ ، $\text{أ}_{٢٣} = ٢ \times ٣ - ٢ = ٤$

∴ $(\text{أ}_{\text{ص ع}}) = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٣ & ٢ \\ ٥ & ٤ \end{pmatrix}$

بعض المصفوفات الخاصة

١ مصفوفة الصف

هى المصفوفة التى تتكون من صف واحد وأى عدد من الأعمدة

فمثلًا $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ & -١ \end{pmatrix}$ هى مصفوفة صف على النظم ١ × ٣

٢ مصفوفة العمود

هى المصفوفة التى تتكون من عمود واحد وأى عدد من الصفوف

فمثلًا $\text{س} = \begin{pmatrix} ١ \\ -٢ \end{pmatrix}$ هى مصفوفة عمود على النظم ٢ × ١

٣ المصفوفة المربعة

هى المصفوفة التى فيها عدد الصفوف يساوى عدد الأعمدة

فمثلًا $\text{أ} = \begin{pmatrix} \sqrt{٣} & ٥ \\ -٢ & ٦ \end{pmatrix}$ هى مصفوفة مربعة على النظم ٢ × ٢

٤ المصفوفة الصفرية

هى المصفوفة التى جميع عناصرها أصفار ويرمز لها بالرمز $\square$ وتكون على أى نظم.

فمثلًا $\square_{٢ \times ٢} = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ هى مصفوفة صفرية على النظم ٢ × ٢

، $\square_{٣ \times ١} = \begin{pmatrix} ٠ \\ ٠ \\ ٠ \end{pmatrix}$ هى مصفوفة صفرية على النظم ٣ × ١

٥ المصفوفة القطرية

هى مصفوفة مربعة جميع عناصرها أصفار، ما عدا عناصر القطر الرئيسى فيكون أحدها على الأقل لا يساوى الصفر [حيث إن القطر الرئيسى هو القطر الذى يحتوى العناصر $أ_{١١}$ ، $أ_{٢٢}$ ، $أ_{٣٣}$]

فمثلًا $ص = \begin{pmatrix} ٣ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٢- & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٥ \end{pmatrix}$ هى مصفوفة قطرية على النظم ٣ × ٣

، $س = \begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ هى مصفوفة قطرية على النظم ٢ × ٢

٦ مصفوفة الوحدة

هى مصفوفة قطرية ، يكون فيها كل عناصر القطر الرئيسى مساوية الواحد ويُرمز لها بالرمز I

فمثلًا $I = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ هى مصفوفة وحدة على النظم ٢ × ٢

، $I = \begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$ هى مصفوفة وحدة على النظم ٣ × ٣

لاحظ أن

فى مصفوفة الوحدة

$أ_{ص ع} = ١$ لكل ص = ع

$أ_{ص ع} = ٠$ لكل ص ≠ ع

تحقق من فهمك

اكتب نوع ونظم كل مصفوفة مما يأتى :

١ $\begin{pmatrix} ٢ \\ ١- \\ ٤ \end{pmatrix}$	٢ $\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$	٣ $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ & ٠ \end{pmatrix}$
٤ $\begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$	٥ $\begin{pmatrix} ٧ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٢ \end{pmatrix}$	٦ $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$

تساوى مصفوفتين

- **تتساوى المصفوفتان أ ، ب إذا وفقط إذا تحقق الشرطان الآتيان معًا :**

١ المصفوفتان على نفس النظم.

٢ كل عنصر فى المصفوفة أ يساوى العنصر المناظر له فى الموضع فى المصفوفة ب

أى أن $أ_{ص ع} = ب_{ص ع}$ لكل ص ولكل ع

فمثلًا $\begin{pmatrix} -٢ & ٠ & ١ \\ -١ & ٣ & \frac{٤}{٢} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٢ & ٠ & ١ \\ -١ & ٣ & ٢ \end{pmatrix}$

بينما $\begin{pmatrix} ٥ & ٢ \\ ٨ & -٣ \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} ٨ & ٢ \\ ٥ & -٣ \end{pmatrix}$ لاختلاف العناصر المتناظرة

، **وكذلك** $\begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ١ \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١ \end{pmatrix}$ لأنهما ليستا على نفس النظم.

مثال ٣

أوجد قيمة كل من س ، ص ، ع إذا كان : $\begin{pmatrix} س + ٥ & ٠ & -١ \\ ٥ & ٢ص - ٣ & ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ & ٠ & ع \\ ٥ & ٧ & ٤ \end{pmatrix}$

الحل

∵ المصفوفتان متساويتان.

∴ ع = -١ ، س + ٥ = ٢ ومنها س = -٣ ، ٢ ص - ٣ = ٧ ومنها ص = ٥

حاول بنفسك

أوجد قيمة كل من س ، ص إذا كان : $\begin{pmatrix} -٢ & ٨ \\ -ص & ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٢ & س^{٣} \\ ٢ص - ٩ & ٣ \end{pmatrix}$

ضرب عدد حقيقى فى مصفوفة

إذا كانت أ مصفوفة على النظم م × ن فإن حاصل ضرب أى عدد حقيقى ك فى المصفوفة أ هى المصفوفة جـ = ك أ على نفس النظم م × ن وكل عنصر من عناصر المصفوفة جـ يساوى العنصر المناظر له فى المصفوفة أ مضروبًا فى العدد الحقيقى ك

أى أن $جـ_{ص ع} = ك\, أ_{ص ع}$ حيث ص = ١ ، ٢ ، ... ، م ، ع = ١ ، ٢ ، ... ، ن

أى أن ضرب عدد حقيقى فى مصفوفة يعنى ضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة فى ذلك العدد الحقيقى. ولايغير من نظم المصفوفة

فمثلًا إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ٣ & -٢ & ٦ \\ ٠ & ٤ & ٢ \end{pmatrix}$

فإن : • ٢ أ = $\begin{pmatrix} ٣ \times ٢ & -٢ \times ٢ & ٦ \times ٢ \\ ٠ \times ٢ & ٤ \times ٢ & ٢ \times ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٦ & -٤ & ١٢ \\ ٠ & ٨ & ٤ \end{pmatrix}$

• -٣ أ = $\begin{pmatrix} -٩ & ٦ & -١٨ \\ ٠ & -١٢ & -٦ \end{pmatrix}$

ملاحظة

يمكن أخذ عامل مشترك من بين جميع عناصر المصفوفة.

فمثلًا $\begin{pmatrix} ٤ & ٨ & ٦ \\ ٢ & ٠ & -١٤ \end{pmatrix} = ٢ \begin{pmatrix} ٢ & ٤ & ٣ \\ ١ & ٠ & -٧ \end{pmatrix}$

مثال ٤

إذا كانت : $\begin{pmatrix} ١٠ & -٢٠ \\ -٨ & ١٦ \end{pmatrix} = -٢ \begin{pmatrix} -٥ & ٥\text{س} \\ ٤ & -٢\text{ص} \end{pmatrix}$ **فأوجد قيمة :** $\sqrt[٣]{\text{س ص}}$

الحل

$\because \begin{pmatrix} ١٠ & -٢٠ \\ -٨ & ١٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٠ & -١٠\text{س} \\ -٨ & ٤\text{ص} \end{pmatrix}$ $\therefore$ $-٢٠ = -١٠$ س ومنها س $= ٢$

، $١٦ = ٤$ ص ومنها ص $= ٤$ $\therefore \sqrt[٣]{\text{س ص}} = \sqrt[٣]{٨} = ٢$

حاول بنفسك

١ إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٣ & -٤ \\ -١ & ٠ \end{pmatrix}$ **فأوجد :** ٣ أ ، - أ ، -٥ أ

٢ إذا كانت : $\begin{pmatrix} ٢٤ & -٨ \\ ٣٢ & ٠ \\ ١٢ & -٤ \end{pmatrix} = ٤ \begin{pmatrix} ٦ & ٢\text{ص} \\ -٢\text{س} & ٠ \\ ٣ & -١ \end{pmatrix}$ **فأوجد :** س ص

مدور المصفوفة

فى أى مصفوفة أ على النظم م × ن إذا استبدلنا الصفوف بالأعمدة أو الأعمدة بالصفوف بنفس الترتيب فإننا نحصل على مصفوفة على النظم ن × م تسمى بمدور المصفوفة أ ويرمز لها بالرمز $أ^{\text{مد}}$

أى أن إذا كانت : $أ = (أ_{\text{ص ع}})$ فإن : $أ^{\text{مد}} = (أ_{\text{ع ص}})$

فمثلًا • إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ & ٠ \\ -١ & ٥ & ٦ \end{pmatrix}$ مصفوفة على النظم ٢ × ٣

فإن : $أ^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & ٥ \\ ٠ & ٦ \end{pmatrix}$ مصفوفة على النظم ٣ × ٢

، $(أ^{\text{مد}})^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ & ٠ \\ -١ & ٥ & ٦ \end{pmatrix} = أ$

لاحظ أن

$(أ^{\text{مد}})^{\text{مد}} = أ$

- إذا كانت : $\text{ب} = \begin{pmatrix} ٩ \\ -٢ \\ ٤ \end{pmatrix}$ مصفوفة على النظم ٣ × ١ (مصفوفة عمود)

فإن : $\text{ب}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} ٤ & -٢ & ٩ \end{pmatrix}$ مصفوفة على النظم ١ × ٣ (مصفوفة صف)

، $(\text{ب}^{\text{مد}})^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} ٩ \\ -٢ \\ ٤ \end{pmatrix} = \text{ب}$

مثال ٥

إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} \text{قا } ٣٠^\circ & \text{ظتا } ٣٠^\circ \\ \text{جا } ٣٠^\circ & \text{قتا } ٣٠^\circ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} \frac{١}{٢}\text{ص} & \sqrt{٣} \\ \frac{١}{٢} & \sqrt{٣}\,\text{س} \end{pmatrix}$ وكانت : $\text{أ} = \text{ب}^{\text{مد}}$

فأوجد قيمة كل من : س ، ص

الحل

$\because \text{أ} = \begin{pmatrix} \frac{٢}{\sqrt{٣}} & \sqrt{٣} \\ \frac{١}{٢} & ٢ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} \sqrt{٣}\,\text{س} & \sqrt{٣} \\ \frac{١}{٢} & \frac{١}{٢}\text{ص} \end{pmatrix}$

، $\because \text{أ} = \text{ب}^{\text{مد}}$

$\therefore \sqrt{٣}\,\text{س} = \frac{٢}{\sqrt{٣}}$ ومنها $\text{س} = \frac{٢}{٣}$ ، $\frac{١}{٢}\text{ص} = ٢$ ومنها $\text{ص} = ٤$

حاول بنفسك

إذا كانت : $\begin{pmatrix} -٥ & \text{س} + ٢ & ٢ \\ ٣ & ٦ & ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ & ٢ \\ ٦ & -٤ \\ \text{ص} & -٥ \end{pmatrix}^{\text{مد}}$ **فأوجد :** $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$

المصفوفات المتماثلة وشبه المتماثلة

إذا كانت أ مصفوفة مربعة فإن :

- أ تُسمى مصفوفة متماثلة إذا وفقط إذا كانت : $\text{أ} = \text{أ}^{\text{مد}}$
- أ تُسمى مصفوفة شبه متماثلة إذا وفقط إذا كانت : $\text{أ} = -\text{أ}^{\text{مد}}$

فمثلًا

- إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ فإن : $\text{أ}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

أى أن أ مصفوفة متماثلة لأن : $\text{أ} = \text{أ}^{\text{مد}}$

- إذا كانت : $\text{ب} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -4 \\ \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

فإن : $\text{ب}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 4 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -2 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -4 \\ \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

أى أن ب مصفوفة شبه متماثلة لأن : $\text{ب} = -\text{ب}^{\text{مد}}$

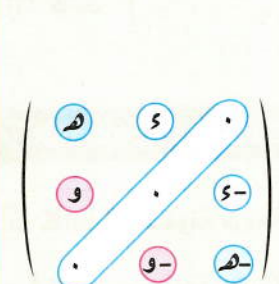
ملاحظات

- إذا كانت : أ مصفوفة متماثلة فإننا نلاحظ تماثل عناصرها حول القطر الرئيسى ،

فيكون : $\text{أ}_{\text{ص ع}} = \text{أ}_{\text{ع ص}}$ كما بالشكل المقابل حيث :

$\text{أ}_{12} = \text{أ}_{21} = \text{ء}$ ، $\text{أ}_{13} = \text{أ}_{31} = \text{هـ}$ ، $\text{أ}_{23} = \text{أ}_{32} = \text{و}$

- أى مصفوفة قطرية هى مصفوفة متماثلة.
- أى مصفوفة وحدة تكون مصفوفة متماثلة $(I^{\text{مد}} = I)$.
- عناصر القطر الرئيسى فى المصفوفة شبه المتماثلة تكون مساوية الصفر وعناصرها تحقق العلاقة : $\text{أ}_{\text{ص ع}} = -\text{أ}_{\text{ع ص}}$ كما بالشكل المقابل :



حيث : $\text{أ}_{12} = -\text{أ}_{21} = -\text{ء}$ ، $\text{أ}_{13} = -\text{أ}_{31} = -\text{هـ}$ ، $\text{أ}_{23} = -\text{أ}_{32} = -\text{و}$

مثال ٦

١ إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٥ & ٢ س & ٨ \\ -٤ & -٣ & ٦ \\ س + ٢ ص & ٦ & ٤ \end{pmatrix}$ مصفوفة متماثلة

فأوجد قيمة كل من : س ، ص

٢ إذا كانت : $ب = \begin{pmatrix} . & ٣ س & ٧ \\ ع + ٣ & . & -٢ ع \\ ٣ ص - س & ٦ & . \end{pmatrix}$ مصفوفة شبه متماثلة

فأوجد قيمة كل من : س ، ص ، ع

الحل

١ ∵ أ مصفوفة متماثلة. ∴ ٢ س = -٤ ومنها **س = - ٢**

، س + ٢ ص = ٨ ∴ -٢ + ٢ ص = ٨ ومنها **ص = ٥**

٢ ∵ ب مصفوفة شبه متماثلة. ∴ ع + ٣ = - ٣ س (١)

، ٣ ص - س = - ٧ (٢)

، -٢ ع = -٦ ومنها **ع = ٣**

وبالتعويض فى (١) : ∴ ٣ + ٣ = -٣ س ومنها **س = -٢**

وبالتعويض فى (٢) : ∴ ٣ ص + ٢ = -٧ ومنها **ص = -٣**

حاول بنفسك

١ إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٥ & ٨ \\ -٢ س & ٦ \end{pmatrix}$ مصفوفة متماثلة **فأوجد قيمة :** س

٢ إذا كانت : $ب = \begin{pmatrix} . & -٨ & ٥ \\ \frac{١}{٢} س & . & ١٢ \\ -٥ & ص - س & . \end{pmatrix}$ مصفوفة شبه متماثلة **فأوجد قيمتى :** س ، ص

تمـارين 1

على تنظيم البيانات فى مصفوفات



من أسئلة الكتاب المدرسى • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلـة الاختيـار مـن متعـدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) المصفوفة $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ١ \end{pmatrix}$ على النظم ....

(أ) ٢ × ١ (ب) ١ × ٣ (جـ) ٣ × ٢ (د) ٣ × ١

(٢) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ -٢ & ٥ \end{pmatrix}$ ، ج = $\begin{pmatrix} ٤ & ٧ \\ ٨ & ٩ \end{pmatrix}$ فإن : $أ_{١٢} + جـ_{٢١}$ = ...

(أ) ٥ (ب) ٤ (جـ) −٥ (د) ٣

(٣) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٢ × ٣ فإن : عدد عناصر المصفوفة أ = ...

(أ) ٤ (ب) ٩ (جـ) ٦ (د) ٥

(٤) إذا كانت ب مصفوفة على النظم ٣ × ١ فإن : $ب^{مد}$ مصفوفة على النظم ....

(أ) ٣ × ١ (ب) ٣ × ٣ (جـ) ١ × ١ (د) ١ × ٣

(٥) إذا كانت ☐ مصفوفة صفرية على النظم ٢ × ٢ فإن عدد عناصرها يساوى ....

(أ) صفر (ب) ∅ (جـ) ٢ (د) ٤

(٦) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٣ × ٤ فإن الصف يحتوى على .... عنصر.

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٧ (د) ١٢

(٧) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٣ × ٢ فإن المصفوفة ٢ أ على النظم ....

(أ) ٦ × ٤ (ب) ٣ × ٤ (جـ) ٦ × ٢ (د) ٣ × ٢

(٨) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ٣ & -٢ & ٧ \\ ٥ & -٤ & ٢ \end{pmatrix}$ ، ب = $أ^{مد}$ فإن : $أ_{٢١} + ب_{١٣}$ = ...

(أ) ٤ (ب) ٩ (جـ) ١٤ (د) ١٠

(٩) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ & -١ \\ ٤ & -٧ & ٦ \end{pmatrix}$ فإن : ٢ $أ^{مد}$ = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ٤ & ٦ & -٢ \\ ٨ & -١٤ & ١٢ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٤ & ٤ \\ ٦ & -٧ \\ -٢ & ٦ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٤ & ٨ \\ ٦ & -١٤ \\ -٢ & ١٢ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٢ & ٨ \\ ٣ & -١٤ \\ -١ & ١٢ \end{pmatrix}$

(١٠) أقل عدد عناصر يمكن أن تحتويها مصفوفة = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(١١) إذا كان عدد عناصر مصفوفة يساوى ٩ عناصر فإن عدد النظم الممكنة لهذه المصفوفة يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٣ (جـ) ٦ (د) ٩

(١٢) إذا كانت أ مصفوفة مربعة عدد عناصرها ن فإن ن يمكن أن تساوى ....

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٩ (د) ١٢

(١٣) إذا كان عدد عناصر المصفوفة س يساوى ١٢ عنصر فأى مما يأتى لا يمكن أن يكون نظمًا للمصفوفة س ؟

(أ) ٣ × ٤ (ب) ٢ × ٦ (جـ) ٤ × ٨ (د) ١ × ١٢

(١٤) المصفوفة أ = $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \\ ٢ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ تسمى مصفوفة ....

(أ) وحدة. (ب) صفرية. (جـ) قطرية. (د) شبه متماثلة.

(١٥) إذا كانت : $\begin{pmatrix} \text{٢٠ − ٢ س} & ٧ \\ ١٥ & \text{٣ − ٦ ص} \end{pmatrix}$ مصفوفة قطرية فإن : س + ٢ ص = ...

(أ) ٩ (ب) ١٠ (جـ) ١١ (د) ١٢

(١٦) أ مصفوفة قطرية على النظم ٣ × ٣ وكان : $أ_{١٢}$ = س + ٤ فإن : س = ...

(أ) صفر (ب) ٤

(جـ) −٤ (د) أى عدد حقيقى ماعدا −٤

(١٧) فى المصفوفة $\begin{pmatrix} ١ & -٣ & ٤ \\ -١ & س & ١ \\ ٦ & ٠ & ٢ \end{pmatrix}$ إذا كان مجموع عناصر القطر الرئيسى = ضعف مجموع عناصر القطر الآخر فإن : س = ...

(أ) صفر (ب) −٤ (جـ) ٤ (د) ٧

(١٨) إذا كانت أ مصفوفة قطرية على النظم ٣ × ٣ وكان مجموع عناصر أ يساوى ١٢ فإن مجموع عناصر القطر الرئيسى فقط ....

(أ) يساوى ١٢ (ب) أقل من ١٢ (جـ) أكبر من ١٢ (د) يساوى صفر

(١٩) إذا كانت : $\begin{pmatrix} ٢ & س & ١ \\ ٥ & ٦ & -١ \end{pmatrix}^{مد} = \begin{pmatrix} -١ & ١ \\ ٦ & -٣ \\ ص & ٢ \end{pmatrix}$ فإن : س ص = ...

(أ) −١٥ (ب) −٢ (جـ) ٢ (د) ١٥

(٢٠) إذا كانت : $\begin{pmatrix} ٥ & ٣ \\ -٢ & س \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥ & ٣ \\ \text{ص + ١} & ٧ \end{pmatrix}$ فإن : س + ص = ...

(أ) ٧ (ب) −٣ (جـ) ٤ (د) ١٠

(٢١) إذا كانت : $\begin{pmatrix} \text{س} & ٤ \\ \text{ص} & -١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ع} & ٤ \\ ٣ & ٠ \end{pmatrix}^{\text{مد}}$ فإن : $\begin{pmatrix} \text{س} & \text{ص} \\ \text{ع} & ٠ \end{pmatrix}$ مصفوفة ....

(أ) وحدة. (ب) صفرية. (جـ) قطرية. (د) شبه متماثلة.

(٢٢) إذا كانت : $\begin{pmatrix} -٢\text{س} & ١٢ \\ -٨ & ١٦ \end{pmatrix} = -٤ \begin{pmatrix} ٤ & -٣ \\ ٢ & ٢\text{ص} - \text{س} \end{pmatrix}$ فإن : $\sqrt{\text{س ص}}$ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٢٣) إذا كانت : $\begin{pmatrix} ٤ & \text{س}^٢ - \text{ص}^٢ \\ ١٤ & ٨ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{س} + \text{ص} & ١٢ \\ ١٤ & ٨ \end{pmatrix}$ فإن : س ص = ...

(أ) ٣ (ب) $\frac{٧}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{٧}{٤}$

(٢٤) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} \frac{١}{٢} & \text{جاس} \\ \text{جاس} & ١ \end{pmatrix}$ حيث ٠ ≤ س ≤ $\frac{\pi}{٢}$ وكان : $أ_{١١} \times أ_{٢٢} = أ_{٢١} \times أ_{١٢}$

فإن : س = ...

(أ) $\frac{\pi}{٣}$ (ب) $\frac{\pi}{٦}$ (جـ) $\frac{\pi}{٤}$ (د) $\frac{\pi}{٢}$

(٢٥) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} -\text{جا}\theta & \text{جتا}\theta \\ \text{جتا}\theta & \text{جا}\theta \end{pmatrix}$ فإن قيمة θ التى تجعل أ مصفوفة وحدة هى ....

(أ) صفر (ب) $\frac{\pi}{٢}$ (جـ) π (د) $\frac{٣\pi}{٢}$

(٢٦) إذا كانت المصفوفة : أ = $\begin{pmatrix} ٢\text{س} - ٤ & ١ \\ ٣ & -٢ \end{pmatrix}$ مصفوفة متماثلة فإن : س = ...

(أ) ١ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) -٢

(٢٧) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} \text{س} - ١ & ١ & ١ \\ ٥ & ٣ & ١ \\ ٦ & ٥ & -١ \end{pmatrix}$ مصفوفة متماثلة فإن : س = ...

(أ) -١ (ب) صفر (جـ) ٤ (د) ٦

(٢٨) إذا كانت : $\begin{pmatrix} ٣ & \text{س}^٢ \\ \text{س} + ٤ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ & ٤ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}$ فإن : س = ...

(أ) ± ٢ (ب) ٢ (جـ) -٢ (د) صفر

(٢٩) إذا كانت : $\begin{pmatrix} \text{ص} & \text{س} \\ \text{ل} & \text{ع} \end{pmatrix}$ = ٣ I حيث I مصفوفة الوحدة فإن : س + ص + ع + ل = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٦ (د) ١٢

(٣٠) إذا كانت المصفوفة : أ = $\begin{pmatrix} ٢ & \text{م} & ٤ \\ ٧ & ٥ & \text{ص} - \text{س} \\ ١ & \text{س} - ١ & \text{ص} \end{pmatrix}$ متماثلة فإن : م = ...

(أ) ٤ (ب) -٦ (جـ) ١٠ (د) -٨

(٣١) إذا كانت المصفوفة : $\text{ب} = \begin{pmatrix} ٠ & \text{م} & \text{ع} \\ ٤ & ٠ & \text{ن} \\ ٢ & ٦ & ٠ \end{pmatrix}$ شبه متماثلة فإن : قيمة م + ع − ن = ...

(أ) ١٢ (ب) −٨ (جـ) صفر (د) −١٢

(٣٢) إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} \text{س} & ٣ & ٤ \\ \text{ص} & \text{ع} & -٥ \\ -٤ & \text{ل} & ٠ \end{pmatrix}$ وكان : أ = − $\text{أ}^{\text{مد}}$ فإن : س + ص + ع + ل = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) −٢

(٣٣) إذا كانت المصفوفة : $\text{أ} = \begin{pmatrix} \text{حتا}\,\theta & \text{حا}\,\theta & \text{طا}\,\frac{\theta}{٢} \\ -١ & -\text{حتا}\,\theta & ١ \\ -١ & \text{حتا}\,٢\theta & ٠ \end{pmatrix}$ شبه متماثلة فإن : θ = ...

(أ) صفر (ب) $\frac{\pi}{٢}$ (جـ) π (د) $\frac{٣\pi}{٢}$

(٣٤) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٢ × ٢ حيث $\text{أ}_{\text{ص ع}}$ = ص − ٢ ع فإن : أ = ...

(أ) $\begin{pmatrix} -١ & ٠ \\ -٣ & -٢ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} -١ & -٣ \\ ٠ & -٢ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ٠ & ٢ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٠ & -١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$

(٣٥) إذا كانت أ مصفوفة وكان $\text{أ}_{\text{س ص}}$ = س ص لكل س ∈ {١ ، ٢} ، ص ∈ {١ ، ٢ ، ٣}

فإن المصفوفة أ تساوى ....

(أ) $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ & ٦ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ١ & ٤ \\ ٢ & ٥ \\ ٣ & ٦ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & ٤ & ٦ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ٤ \\ ٣ & ٦ \end{pmatrix}$

(٣٦) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٢ × ٢ وكان : $\text{أ}_{\text{س ص}} = \frac{\text{س}}{\text{ص}}$

فإن : $\text{أ}_{١١} \times \text{أ}_{٢١} \times \text{أ}_{١٢} \times \text{أ}_{٢٢}$ = ...

(أ) ٤ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) $\frac{١}{٢}$

(٣٧) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٣ × ٢ وكان : $\text{أ}_{١١} = ٢$ ، $\text{أ}_{١٢} = ٣$ ، $\text{أ}_{٢٢} = \frac{١}{٢}\,\text{أ}_{١١}$ ، $\text{أ}_{٢٢} = \text{أ}_{١٢} + ٣$ ،
$\text{أ}_{١٣} = -٩$ ، $\text{أ}_{٢١} = \frac{١}{٣}\,\text{أ}_{١٣}$ فإن المصفوفة أ = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ٢ & -٩ \\ ٣ & ٦ \\ ١ & -٣ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ٦ \\ -٩ & -٣ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٢ & -٣ \\ ٣ & ٦ \\ -٩ & ١ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ & -٩ \\ -٣ & ٦ & ١ \end{pmatrix}$

(٣٨) إذا كانت أ مصفوفة مربعة على النظم ٣ × ٣ حيث $\text{أ}_{\text{س ص}} = \frac{\text{ص}}{\text{س}} - \frac{\text{س}}{\text{ص}}$

فإن : أ + $\text{أ}^{\text{مد}}$ = ...

(أ) صفر (ب) $\square$ (جـ) ٢ أ (د) ٢ $\text{أ}^{\text{مد}}$

(٣٩) إذا كانت أ مصفوفة مربعة على النظم ٣ × ٣ حيث $أ_{س ص} = \frac{|س - ص|}{|س + ص|}$

فإن : $أ_{س ص} = ...$

(أ) $أ_{ص س}$ (ب) $-أ_{س ص}$ (جـ) $-أ_{ص س}$ (د) ١

(٤٠) إذا كانت أ مصفوفة صف وكان $أ_{س ع} = ٥$ فإن : س = ...

(أ) ٥ (ب) ٥ ع (جـ) $\frac{٥}{ع}$ (د) ١

(٤١) إذا كانت أ مصفوفة شبه متماثلة على النظم ٣ × ٣ فإن : $أ_{١١} + أ_{٢٢} + أ_{٣٣} = ...$

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) صفر

(٤٢) إذا كانت أ مصفوفة متماثلة وكان : $أ^{مد} = ٢ أ$ فإن : أ = ...

(أ) I (ب) − I (جـ) ▭ (د) ٢ I

(٤٣) إذا كانت المصفوفة أ على النظم م × ن حيث م < ن وكان عدد عناصرها يساوى ٣

وكانت المصفوفة ب على النظم ن × ٢ فإن عدد عناصر المصفوفة ب يساوى ......

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٦ (د) ٩

(٤٤) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٣ × ٢ وكان مجموع عناصر المصفوفة أ يساوى س

فإن مجموع عناصر المصفوفة ٢ أ يساوى ......

(أ) س (ب) ٢ س (جـ) ٦ س (د) ١٢ س

(٤٥) إذا كانت : أ = $(أ_{ص ع})$ مصفوفة متماثلة فأى مما يأتى يمكن أن يمثل قاعدة لإيجاد عناصر أ ؟

(أ) $أ_{ص ع} = ٢ ص - ع$ (ب) $أ_{ص ع} = ص + ع$

(جـ) $أ_{ص ع} = ص^{ع}$ (د) $أ_{ص ع} = ٣ ص + ٢ ع$

(٤٦) إذا كانت المصفوفة : $أ = \begin{pmatrix} س - ١ & ٠ \\ ٠ & س^٢ - ١ \end{pmatrix}$ شبه متماثلة فإن : س ∈ ......

(أ) {−١ ، ٢} (ب) {٠ ، −١} (جـ) {١ ، −٢} (د) {٠ ، ١}

(٤٧) إذا كانت أ مصفوفة قطرية على النظم ٣ × ٣ وكان $أ_{س ص} = ٥$ لكل س = ص فإن : ......

(أ) أ = I (ب) أ = ٥ I (جـ) أ = ٥ ▭ (د) أ = ▭

(٤٨) إذا كانت المصفوفة أ متماثلة وفى نفس الوقت هى شبه متماثلة فإن : ......

(أ) أ = I (ب) أ = ▭

(جـ) أ مصفوفة قطرية. (د) أ مصفوفة صف.

(٤٩) إذا كانت : $\text{س} = \begin{pmatrix} \text{أ} - \text{ب} & 1 \\ 3 & \text{ب} - 2 \end{pmatrix}$ ، $\text{ص} = \begin{pmatrix} \text{أ} - 6 & 6 \\ 2 & 4 - \text{أ} \end{pmatrix}$ وكان : $2\,\text{س} = \text{ص}^{\text{مد}}$

فإن : أ + ٢ ب = ...

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) ١٠ (د) ١٢

(٥٠) إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} \text{جا}\,30^\circ & 1 \\ \text{ظا}^2\,60^\circ & \text{ظتا}\,45^\circ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} \text{م} - \text{جتا}\,60^\circ & 1 \\ \text{ف} + \text{قا}^2\,45^\circ & \text{ن} + \text{جتا}^2\,90^\circ \end{pmatrix}$ وكان : أ = ب

فإن : م + ف − ن = ...

(أ) ٢ (ب) ١٠ (جـ) −٢ (د) ١

(٥١) إذا كانت المصفوفة $\text{أ} = \begin{pmatrix} \text{جا}\,\frac{\pi}{2} & \text{جا صفر} \\ \text{جتا}\,\frac{\pi}{2} & \text{جتا صفر} \end{pmatrix}$ أى من العبارات التالية تكون صحيحة ؟

(١) أ مصفوفة وحدة. (٢) أ مصفوفة متماثلة. (٣) أ مصفوفة مربعة.

(أ) (١) فقط. (ب) (١) ، (٢) فقط.

(جـ) (٢) ، (٣) فقط. (د) (١) ، (٢) ، (٣) معًا.

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 6 & -7 & 8 \end{pmatrix}$ ، $\text{جـ} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$

(١) اذكر نظم كل مصفوفة. (٢) اكتب كلاً من العناصر الآتية : أ_{32} ، ب_{11} ، جـ_{13} ، أ_{13} ، ب_{33} ، جـ_{12}

---

٢ اكتب نوع كل مصفوفة ونظمها :

(١) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (٢) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ (٣) $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

(٤) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (٥) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ (٦) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

---

٣ إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} 15 & -12 & 10 \\ 20 & -10 & 7 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ فأوجد : −٥ أ

٤ **أوجد مدور كل من المصفوفات التالية موضحًا نظم المصفوفة الناتجة :**

(١) 📖 $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & -١ \\ ٣ & -١ & ٥ \end{pmatrix}$ | (٢) $\begin{pmatrix} ٠ \\ ١ \\ ٢ \end{pmatrix}$ | (٣) $\begin{pmatrix} -١ & \sqrt{٥} \\ ٢ & ٣ \\ -٤ & ٧ \end{pmatrix}$

(٤) 📖 $\begin{pmatrix} -٣ & ٤ \\ ٢ & -١ \end{pmatrix}$ | (٥) 📖 $\begin{pmatrix} ١ & -٢ & ٦ \end{pmatrix}$ | (٦) $\begin{pmatrix} ٢ & ٤ & ٦ \\ ٣ & ٦ & ٩ \\ ٤ & ٨ & ١٢ \end{pmatrix}$

---

٥ 📖 **اكتب جميع عناصر المصفوفات الآتية :**

(١) $أ = (أ_{ص ع})$ ، ص = ١ ، ٢ ، ع = ١ ، ٢ ، ٣

(٢) $ب = (ب_{ص ع})$ ، ص = ١ ، ٢ ، ٣ ، ع = ١

(٣) $ج = (ج_{ص ع})$ ، ص = ١ ، ٢ ، ع = ١ ، ٢

---

٦ 📖 إذا كانت : $أ = (أ_{س ص})$ لكل س ∈ {١ ، ٢ ، ٣} ، ص ∈ {١ ، ٢ ، ٣}

اكتب المصفوفة أ إذا عُلم أن : $أ_{س ص} = ص - س$ **ثم أوجد :** $أ^{مد}$

---

٧ **اكتب المصفوفة :** $أ = (أ_{هـ ى})$ على النظم ٣ × ٢ حيث $أ_{هـ ى} = هـ - ى + ٢$

ثم أوجد المصفوفة ج حيث $ج = أ^{مد}$ واذكر نظمها وأوجد قيمة $ج_{ى هـ}$ إذا كان هـ = ٣ ى

---

٨ 📖 **أوجد قيمة كل من أ ، ب إذا كان :** $\begin{pmatrix} ٤ & -١ \\ ٢أ - ١ & ٣ب + ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ & -١ \\ ٣ & ٧ \end{pmatrix}$ «٢ ، ٢»

---

٩ 📖 إذا كانت : $\begin{pmatrix} ٢س - ٥ & ٤ \\ ٣ & ٣ص + ١٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢٥ & ٤ \\ ٣ & ص + ١٨ \end{pmatrix}$

فأوجد قيمتي : س ، ص «١٥ ، ٣»

---

١٠ 📖 إذا كانت : $\begin{pmatrix} س + ٨ & -٥ \\ ٣ & -ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣٨ & -٥ \\ ٣ & ٤ص - ١٠ \end{pmatrix}$ **فأوجد قيمتي : س ، ص** «٣٠ ، ٢»

---

١١ إذا كانت : $\begin{pmatrix} ٨ & ١٥ \\ -١ & ع + ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ل^{٣} & س^{٢} - ١ \\ ص & ٨ \end{pmatrix}$

أوجد قيمة كل من : س ، ص ، ع ، ل «±٤ ، -١ ، ٩ ، ٢»

---

١٢ 📖 إذا كانت : $\begin{pmatrix} ٣س & س + ص & س - ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٩ & ٤ & -١٠ \end{pmatrix}$

فأوجد قيمة كل من : س ، ص ، ع «-٣ ، ٧ ، ٧»

١٣ أوجد قيم أ ، ب ، حـ ، ء إذا كان :

(١) $\begin{pmatrix} ٣ & -٥ \\ أ - ٣ & ٣ء - ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} أ - ٢ & ٢ب + ١ \\ حـ & ١٦ \end{pmatrix}$ «٥ ، -٣ ، ٢ ، ٦»

(٢) $\begin{pmatrix} ١٥ & ٢ب \\ ٠ & ٢أ + حـ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣أ & ١٠ \\ ٢ب - ء & ١٠ \end{pmatrix}$ «٥ ، ٥ ، ٠ ، ١٠»

(٣) $\begin{pmatrix} أ + ب & أ - ب \\ أ + ب + حـ & أ - ب + ٢ء \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٩ & -٣ \\ ٧ & ٥ \end{pmatrix}$ «٣ ، ٦ ، -٢ ، ٤»

---

١٤ بيِّن أيًا من المصفوفات الآتية متماثلة وأيها شبه متماثلة :

(١) $\begin{pmatrix} ١ & ١ & -١ \\ ١ & ٣ & ٥ \\ -١ & ٥ & ٦ \end{pmatrix}$ (٢) $\begin{pmatrix} ١ & -١ & ٤ \\ -١ & ٢ & ٦ \\ ٤ & ٦ & ٥ \end{pmatrix}$ (٣) $\begin{pmatrix} ٠ & -\frac{٥}{٢} & -١ \\ \frac{٥}{٢} & ٠ & \frac{١}{٢} \\ ١ & -\frac{١}{٢} & ٠ \end{pmatrix}$

---

١٥ إذا كانت : أ مصفوفة متماثلة حيث أ = $\begin{pmatrix} ٥ & ٢ص & ٣ص + س \\ ع + ١ & -١ & ع + ٣ \\ ٢ + ٣س & ٨ & ٠ \end{pmatrix}$

فأوجد قيمة كل من : س ، ص ، ع «٥,٥ ، ٣ ، ٥»

---

١٦ إذا كانت : ب مصفوفة شبه متماثلة حيث ب = $\begin{pmatrix} ٠ & -٢س & -٥ \\ ع + ٦ & ٠ & ٣ع \\ ٣ص + س & ٦ & ٠ \end{pmatrix}$

فأوجد قيمة : س ص ع «-٤»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : $\begin{pmatrix} ٢س & ١ \\ س & س \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} أ & ب \\ حـ & ء \end{pmatrix}^{مد}$ وكان أء - ب حـ = ١ فإن : س ∈ ....

(أ) $\{١ ، -\frac{١}{٢}\}$ (ب) $\{-١ ، \frac{١}{٢}\}$ (جـ) $\{١ ، \frac{١}{٢}\}$ (د) $\{-١ ، \frac{-١}{٢}\}$

(٢) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $س^٢ - ٣س + ١ = ٠$.

وكان $\begin{pmatrix} ل^٢ & م^٢ \\ م^٢ & ل^٢ \end{pmatrix}$ ... $\begin{pmatrix} ل^٢ م & -ل^٢ \\ م^٢ & م \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} أ & ب \\ حـ & ء \end{pmatrix}$ فإن : أء - ب حـ = ...

(أ) ١٨ (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٤

(٣) إذا كانت : $\begin{pmatrix} أ & ب & حـ \\ ء & هـ & و \\ س & ص & ع \end{pmatrix}$ مصفوفة شبه متماثلة فإن : $\frac{أ + ب + حـ + و}{ء + س + ص + ع}$ = ...

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) -١ (د) هـ

(٤) إذا كانت المصفوفة ($أ_{س ص}$) على النظم ٣ × ٢ حيث $أ_{س ص}$ = س + ٢ ص

وكان مجموع عناصر الصف الأول = $ك^{٢}$ فإن : ك = ...

(أ) ٢ (ب) − ٢ (جـ) ٢ $\sqrt{٢}$ (د) ± ٢ $\sqrt{٢}$

(٥) إذا كانت أ مصفوفة على النظم م × ن وكانت $أ^{مد}$ على النظم (٢ م − ١) × (ن − ١)

فإن : م + ن = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

(٦) إذا كانت : $\begin{pmatrix} س^{٣} - ص^{٣} & ٦ \\ س^{٢} + س ص + ص^{٢} & ١٢ \end{pmatrix} = ٣ \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٤ \end{pmatrix}$ فإن : س ص = ...

(أ) ٣ (ب) −٣ (جـ) −٢ (د) ٢

(٧) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٣ × ٣ حيث $أ_{س ص} = \begin{cases} س + ص & \text{لكل } س \neq ص \\ ٦ & \text{لكل } س = ص \end{cases}$

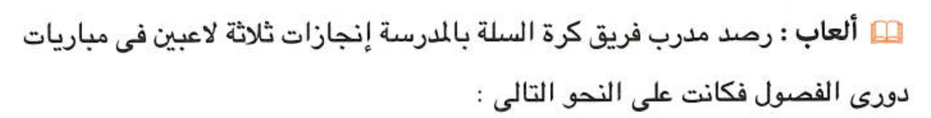
فإن : مجموع عناصر القطر الرئيسى يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٦ (جـ) ١٢ (د) ١٨

(٨) إذا كانت : $\begin{pmatrix} ٣س & ٢س + ص \\ س + ص & ٣ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢٥ & ب \\ أ & ٥ \end{pmatrix}$ فإن : $\frac{ب}{أ}$ = ...

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{٥}{٣}$ (جـ) ١٥ (د) ٥

تطبيق حياتى



ألعاب : رصد مدرب فريق كرة السلة بالمدرسة إنجازات ثلاثة لاعبين فى مباريات دورى الفصول فكانت على النحو التالى :

سمير : لعب ١٠ مباريات ، ٢٠ تسديدة ، ٥ أهداف.

حازم : لعب ١٦ مباراة ، ٣٥ تسديدة ، ٨ أهداف.

كريم : لعب ١٨ مباراة ، ٤١ تسديدة ، ١٠ أهداف.

(١) نظم البيانات فى مصفوفة على أن ترتب أسماء اللاعبين ترتيبًا تصاعديًا تبعًا لعدد الأهداف.

(٢) حدد نظم المصفوفة ، ما قيمة $أ_{٣٢}$ ؟

الدرس 2

جمع وطرح المصفوفات



أولًا جمع المصفوفات

إذا كانت أ ، ب مصفوفتين لهما نفس النظم فإن عملية الجمع تكون ممكنة ويكون ناتج الجمع عبارة عن مصفوفة لها نفس النظم وكل عنصر فيها هو مجموع العنصرين المتناظرين فى أ ، ب

فمثلًا إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٢- & ٣ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٢ & ٥ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix}$ فإن : $أ + ب = \begin{pmatrix} ٢ + ١ & ٥ + ٢ \\ ٣ + ٢- & ٢ + ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ & ٧ \\ ١ & ٥ \end{pmatrix}$

مثال ١

إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٢- & ١ \\ ٥ & ٣ \\ ٢ & ٤ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٢- & ١- \\ ١ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}$ ، $ج = \begin{pmatrix} ١- & ٠ & ٢ \\ ٦ & ٤ & ٣ \end{pmatrix}$

أوجد إن أمكن كلاً من : ١ $٢ أ + ج^{مد}$ ٢ $ب + ج$

الحل

١ $٢ أ + ج^{مد} = ٢ \begin{pmatrix} ٢- & ١ \\ ٥ & ٣ \\ ٢ & ٤ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ١- & ٠ & ٢ \\ ٦ & ٤ & ٣ \end{pmatrix}^{مد} = \begin{pmatrix} ٤- & ٢ \\ ١٠ & ٦ \\ ٤ & ٨ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ٠ \\ ٦ & ١- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١- & ٤ \\ ١٤ & ٦ \\ ١٠ & ٧ \end{pmatrix}$

٢ المصفوفتان ب ، ج لا يمكن جمعهما لاختلاف نظمهما

حيث إن : ب مصفوفة على النظم ٣ × ٢ ، ج مصفوفة على النظم ٢ × ٣

مثـــال ٢

إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ -١ & ٥ \\ ٦ & ٧ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} ٠ & ٤ \\ ٢ & -٣ \\ ٤ & -٨ \end{pmatrix}$ **فحقق أن :** $(\text{أ} + \text{ب})^{\text{مد}} = \text{أ}^{\text{مد}} + \text{ب}^{\text{مد}}$

الحـــل

$\because \text{أ} + \text{ب} = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ -١ & ٥ \\ ٦ & ٧ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٠ & ٤ \\ ٢ & -٣ \\ ٤ & -٨ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ & ٧ \\ ١ & ٢ \\ ١٠ & -١ \end{pmatrix}$

$\therefore (\text{أ} + \text{ب})^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} ٢ & ١ & ١٠ \\ ٧ & ٢ & -١ \end{pmatrix}$ (١)

، $\because \text{أ}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} ٢ & -١ & ٦ \\ ٣ & ٥ & ٧ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} ٠ & ٢ & ٤ \\ ٤ & -٣ & -٨ \end{pmatrix}$

$\therefore \text{أ}^{\text{مد}} + \text{ب}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} ٢ & -١ & ٦ \\ ٣ & ٥ & ٧ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٠ & ٢ & ٤ \\ ٤ & -٣ & -٨ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ & ١ & ١٠ \\ ٧ & ٢ & -١ \end{pmatrix}$ (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن : $(\text{أ} + \text{ب})^{\text{مد}} = \text{أ}^{\text{مد}} + \text{ب}^{\text{مد}}$

حاول بنفسك

إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٥ & -٢ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} ٤ & -٣ \\ -١ & ٨ \end{pmatrix}$ **فأوجد :** $\frac{١}{٣}(\text{أ} + \text{ب}^{\text{مد}})$

مثـــال ٣

أوجد قيم أ ، ب ، ح التى تحقق المعادلة : $٣\begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{ح} & ٣ \end{pmatrix} = ٢\begin{pmatrix} \text{أ} & ٦ \\ -١ & ٣ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٤ & \text{ب} + ٤ \\ \text{ح} + ٣ & ٣ \end{pmatrix}$

الحـــل

$\begin{pmatrix} ٣\text{أ} & ٣\text{ب} \\ ٣\text{ح} & ٩ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢\text{أ} & ١٢ \\ -٢ & ٦ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٤ & \text{ب} + ٤ \\ \text{ح} + ٣ & ٣ \end{pmatrix}$ (ضرب عدد حقيقى فى مصفوفة)

$\therefore \begin{pmatrix} ٣\text{أ} & ٣\text{ب} \\ ٣\text{ح} & ٩ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢\text{أ} + ٤ & \text{ب} + ١٦ \\ \text{ح} + ١ & ٩ \end{pmatrix}$

ومن خاصية تساوى مصفوفتين : $\therefore ٣\text{أ} = ٢\text{أ} + ٤$ ومنها : $\text{أ} = ٤$

، $٣\text{ب} = \text{ب} + ١٦$ ومنها : $\text{ب} = ٨$

، $٣\text{ح} = \text{ح} + ١$ ومنها : $\text{ح} = \frac{١}{٢}$

حاول بنفسك

إذا كانت : $٣\begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{ح} & -٢ \end{pmatrix} = ٢\begin{pmatrix} \text{أ} + ١ & ٣ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٢ & ٤ + \text{ب} \\ \text{ح} + ٣ & -١٠ \end{pmatrix}$ **فأوجد قيمة كل من : أ ، ب ، ح**

خواص عملية جمع المصفوفات

بفرض أن أ ، ب ، ج ثلاث مصفوفات من النظم م × ن وأن ☐ مصفوفة صفرية من نفس النظم

فإن الخواص الآتية تتحقق :

١ خاصية الانغلاق

أ + ب تكون مصفوفة من نفس النظم م × ن

٢ خاصية الإبـدال

أ + ب = ب + أ

فمثلًا

$$\begin{pmatrix}٤&٢\\-١&٥\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-٣&١\\-٢&-٣\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-٣&١\\-٢&-٣\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}٤&٢\\-١&٥\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}١&٣\\-٣&٢\end{pmatrix}$$

٣ خاصية الدمـج

(أ + ب) + ج = أ + (ب + ج)

فمثلًا

إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix}١&-٢&٣\\٤&٥&-٦\end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix}-٢&١&٤\\٧&٨&-٩\end{pmatrix}$ ، ج = $\begin{pmatrix}١&٣&-٥\\٦&٧&١٦\end{pmatrix}$

فإن : (أ + ب) + ج = $\left[\begin{pmatrix}١&-٢&٣\\٤&٥&-٦\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-٢&١&٤\\٧&٨&-٩\end{pmatrix}\right]+\begin{pmatrix}١&٣&-٥\\٦&٧&١٦\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-١&-١&٧\\١١&١٣&-١٥\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}١&٣&-٥\\٦&٧&١٦\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}٠&٢&٢\\١٧&٢٠&١\end{pmatrix}$

، أ + (ب + ج) = $\begin{pmatrix}١&-٢&٣\\٤&٥&-٦\end{pmatrix}+\left[\begin{pmatrix}-٢&١&٤\\٧&٨&-٩\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}١&٣&-٥\\٦&٧&١٦\end{pmatrix}\right]$

$=\begin{pmatrix}١&-٢&٣\\٤&٥&-٦\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-١&٤&-١\\١٣&١٥&٧\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}٠&٢&٢\\١٧&٢٠&١\end{pmatrix}$

أى أن (أ + ب) + ج = أ + (ب + ج)

٤ خاصية وجود المحايد الجمعى

المصفوفة الصفرية ☐ هى المحايد الجمعى **أى أن :** أ + ☐ = ☐ + أ = أ

فمثلًا

$$\begin{pmatrix}-١&٣\\٤&٢\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}٠&٠\\٠&٠\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-١&٣\\٤&٢\end{pmatrix}$$

٥ خاصية المعكوس (النظير الجمعى)

أ + (− أ) = (− أ) + أ = ☐ حيث (− أ) هو النظير الجمعى للمصفوفة أ

فمثلًا إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٤ & ١ & ٠ \\ -٣ & ٢ & ٥ \end{pmatrix}$ فإن : المعكوس الجمعى لها هو : $- أ = \begin{pmatrix} -٤ & -١ & ٠ \\ ٣ & -٢ & -٥ \end{pmatrix}$

حيث : $\begin{pmatrix} ٤ & ١ & ٠ \\ -٣ & ٢ & ٥ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -٤ & -١ & ٠ \\ ٣ & -٢ & -٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{pmatrix} = \square_{٢ \times ٣}$

ثانيًا طرح المصفوفات

إذا كانت أ ، ب مصفوفتين لهما نفس النظم م × ن فإن ناتج الطرح (أ − ب)

هو المصفوفة ج من النظم م × ن والتى تُعرف كما يلى :

ج = أ − ب = أ + (− ب) حيث (− ب) هى المعكوس الجمعى للمصفوفة ب

فمثلًا إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٥ & ٢ \\ ٣ & -٤ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٤ & ٣ \\ ٥ & ٠ \end{pmatrix}$

فإن : $أ - ب = \begin{pmatrix} ٥ & ٢ \\ ٣ & -٤ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٤ & ٣ \\ ٥ & ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥ & ٢ \\ ٣ & -٤ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -٤ & -٣ \\ -٥ & ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & -١ \\ -٢ & -٤ \end{pmatrix}$

مـلاحظـة

يمكن إجراء عملية الطرح مباشرة بطرح العناصر المتناظرة من المصفوفتين.

فمثلًا $\begin{pmatrix} ٥ & ٤ & ٣ \\ ٠ & ١ & -٢ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٦ & -٢ & -٣ \\ ٨ & -١ & ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -١ & ٦ & ٦ \\ -٨ & ٢ & -٢ \end{pmatrix}$

مثـال ٤

إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & -١ \\ ٤ & ٠ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} -٢ & ٢ \\ ٥ & -١ \\ -٣ & ٣ \end{pmatrix}$ ، $ج = \begin{pmatrix} ٤ & ٠ \\ -٦ & -٢ \\ -٢ & ٨ \end{pmatrix}$

أوجد قيمة : $٤ أ - ٢ ب + \frac{١}{٢} ج$

الحـل

$$٤ أ - ٢ ب + \frac{١}{٢} ج = ٤ \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & -١ \\ ٤ & ٠ \end{pmatrix} - ٢ \begin{pmatrix} -٢ & ٢ \\ ٥ & -١ \\ -٣ & ٣ \end{pmatrix} + \frac{١}{٢} \begin{pmatrix} ٤ & ٠ \\ -٦ & -٢ \\ -٢ & ٨ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ٤ & ٨ \\ ١٢ & -٤ \\ ١٦ & ٠ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٤ & -٤ \\ -١٠ & ٢ \\ ٦ & -٦ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ -٣ & -١ \\ -١ & ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٠ & ٤ \\ -١ & -٣ \\ ٢١ & -٢ \end{pmatrix}$$

حاول بنفسك

إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ ، $\text{ج} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ **فأوجد قيمة :** $2\,\text{أ} + 3\,\text{ج} - 2\,\text{ب}$

ملاحظة

عملية طرح المصفوفات ليست إبدالية وليست دامجة.

مثال ٥

إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ **أوجد المصفوفة س بحيث :** $3\,\text{س} + 2\,\text{ب} = \text{أ}$

الحل

$\because 3\,\text{س} + 2\,\text{ب} = \text{أ}$ بإضافة المعكوس الجمعى للمصفوفة ٢ ب للطرفين

$\therefore 3\,\text{س} + 2\,\text{ب} + (-2\,\text{ب}) = \text{أ} + (-2\,\text{ب})$

$\therefore 3\,\text{س} = \text{أ} - 2\,\text{ب}$ (بضرب الطرفين فى $\frac{1}{3}$)

$\therefore \text{س} = \frac{1}{3}\left[\text{أ} - 2\,\text{ب}\right]$

$$\therefore \text{س} = \frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 7 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & -3 & -2 \\ 6 & -3 & 0 \\ 3 & 9 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -\frac{2}{3} \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & \frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

مثال ٦

إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

أوجد المصفوفة س التى تحقق أن : $2\left[\text{س}^{\text{مد}} - \text{أ}\right] = 3\,\text{ب}$

الحل

$\because 2\left[\text{س}^{\text{مد}} - \text{أ}\right] = 3\,\text{ب}$ $\therefore 2\,\text{س}^{\text{مد}} - 2\,\text{أ} = 3\,\text{ب}$ وبإضافة المصفوفة ٢ أ للطرفين

$\therefore 2\,\text{س}^{\text{مد}} - 2\,\text{أ} + 2\,\text{أ} = 3\,\text{ب} + 2\,\text{أ}$

$$\therefore 2\,\text{س}^{\text{مد}} = 3\,\text{ب} + 2\,\text{أ} = 3\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & -4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 13 & 14 & -2 \end{pmatrix}$$

∴ $س^{مد} = \frac{١}{٢}\begin{pmatrix} ٥ & ٣ & ٤ \\ -٢ & ١٤ & ١٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{٥}{٢} & \frac{٣}{٢} & ٢ \\ -١ & ٧ & \frac{١٣}{٢} \end{pmatrix}$

وبأخذ مدور الطرفين : ∴ $(س^{مد})^{مد} = \begin{pmatrix} \frac{٥}{٢} & \frac{٣}{٢} & ٢ \\ -١ & ٧ & \frac{١٣}{٢} \end{pmatrix}^{مد}$ ∴ $س = \begin{pmatrix} \frac{١٣}{٢} & ٢ \\ ٧ & \frac{٣}{٢} \\ -١ & \frac{٥}{٢} \end{pmatrix}$

مثال ٧

إذا كانت : $س + ٢ س^{مد} = \begin{pmatrix} ١٤ & ٩ \\ ٦ & ١٣ \end{pmatrix}$ **فأوجد :** المصفوفة س

الحل

∵ $س + ٢ س^{مد} = \begin{pmatrix} ١٤ & ٩ \\ ٦ & ١٣ \end{pmatrix}$ (١)

وبأخذ مدور الطرفين : ∴ $(س + ٢ س^{مد})^{مد} = \begin{pmatrix} ١٤ & ٩ \\ ٦ & ١٣ \end{pmatrix}^{مد}$

∴ $س^{مد} + ٢ س = \begin{pmatrix} ١٣ & ٩ \\ ٦ & ١٤ \end{pmatrix}$ (٢)

وبضرب المعادلة (٢) × -٢ :

∴ $-٢ س^{مد} - ٤ س = \begin{pmatrix} -٢٦ & -١٨ \\ -١٢ & -٢٨ \end{pmatrix}$ (٣)

بجمع (١) ، (٣) : ∴ $-٣ س = \begin{pmatrix} -١٢ & -٩ \\ -٦ & -١٥ \end{pmatrix}$ ∴ $س = \frac{-١}{٣}\begin{pmatrix} -١٢ & -٩ \\ -٦ & -١٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ & ٣ \\ ٢ & ٥ \end{pmatrix}$

لاحظ أن

- $(أ + ب)^{مد} = أ^{مد} + ب^{مد}$
- $(أ^{مد})^{مد} = أ$

حاول بنفسك

إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٤ & ٢ \\ ٠ & -٢ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} -٢ & \frac{١}{٢} \\ \frac{١}{٢} & ٤ \end{pmatrix}$

فأوجد المصفوفة س بحيث : $٣ أ - ٢ ب = ٢ س - ٣ I$ حيث I على النظم ٢ × ٢

ملاحظة

يمكن استخدام الآلة الحاسبة العلمية فى جمع وطرح المصفوفات وسوف نقوم بعرض ذلك فى نهاية الوحدة.

لاحظ أن

لأى مصفوفة مربعة أ يكون

$أ = \frac{١}{٢}(أ + أ^{مد}) + \frac{١}{٢}(أ - أ^{مد})$

↓ مصفوفة متماثلة ↓ مصفوفة شبه متماثلة

تمارين 2

على جمع وطرح المصفوفات



من أسئلة الكتاب المدرسي • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت : $\square$ هي المصفوفة الصفرية على النظم ٢ × ٣

فإن : $\begin{pmatrix} ٤ & ٠ & -٣ \\ -١ & ٥ & ٠ \end{pmatrix} + \square = \text{.............}$

(أ) I (ب) $\square$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٤ & ٠ & -٣ \\ -١ & ٥ & ٠ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} -٤ & ٠ & ٣ \\ ١ & -٥ & ٠ \end{pmatrix}$

(٢) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} -٤ \\ ٨ \\ -٥ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٢ \\ -٤ \\ ٥ \end{pmatrix}$ فإن : $أ + ب = \text{.............}$

(أ) $\begin{pmatrix} ٢ \\ -٤ \\ ٠ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} -٢ \\ ٤ \\ ٠ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} -٦ \\ ١٢ \\ -١٠ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٠ \\ ٠ \\ ٠ \end{pmatrix}$

(٣) $\begin{pmatrix} -٥ & -٢ \\ ٤ & ٧ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٦ & -٤ \\ ٢ & -٦ \end{pmatrix}^{مد} = \text{.............}$

(أ) $\square$ (ب) $\begin{pmatrix} ١ & -٤ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ١١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ (د) I

(٤) إذا كانت : $\begin{pmatrix} ٥ & ١ \\ ٤ & ١ \end{pmatrix} + ب = I$ فإن : $ب = \text{.............}$

(أ) $\begin{pmatrix} -٥ & -١ \\ -٤ & -١ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} -٤ & -١ \\ -٤ & ٠ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} -٥ & ٠ \\ -٣ & -١ \end{pmatrix}$

(٥) $\begin{pmatrix} ٥ \\ -٣ \end{pmatrix} + ٣ \begin{pmatrix} ١ & -٢ \end{pmatrix}^{مد} = \text{.............}$

(أ) $\begin{pmatrix} ٦ \\ -٥ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} -١ \\ ٠ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٨ \\ -٩ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٤ & ١ \end{pmatrix}$

(٦) إذا كان : $٢ س + \begin{pmatrix} -٢ & -٢ \\ ٤ & \text{صفر} \end{pmatrix} = \square$ فإن : المصفوفة $س = \text{.............}$

(أ) $\begin{pmatrix} -٢ & -٢ \\ ٤ & \text{صفر} \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} -١ & -١ \\ ٢ & \text{صفر} \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٢ & ٢ \\ -٤ & ٠ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ١ & ١ \\ -٢ & \text{صفر} \end{pmatrix}$

(٧) $\begin{pmatrix} ٣ & -٤ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix} + ٢ \begin{pmatrix} .... & .... \\ .... & .... \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$

(أ) $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ -٢ & ١ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} -١ & ٢ \\ -١ & ٠ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} -١ & ٢ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٢ & ٢ \\ -١ & ١ \end{pmatrix}$

(٨) إذا كان : $\begin{pmatrix}\text{س}\\ ٦\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}١\\ \text{ص}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}٣\\ ٥\end{pmatrix}$ فإن : س + ص = ...

(أ) ١ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٣

(٩) إذا كانت : $\begin{pmatrix}٢ & ٤\\ -٣ & ٥\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}١ & -٣\\ ٢ & ٦\end{pmatrix}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix}٣\text{ك} & -\text{ص}\\ ٢\text{س} & ١١\end{pmatrix}$ فإن : س + ص + ك = ...

(أ) -٣ (ب) -٦ (جـ) ١ (د) -٨

(١٠) إذا كانت : $\begin{pmatrix}٥ & ١\\ ٢ & -٣\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{أ} & \text{ب}\\ \text{حـ} & \text{ء}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}٤ & ٣\\ ٢ & -١\end{pmatrix}$ فإن : $\begin{pmatrix}\text{أ} & \text{ب}\\ \text{حـ} & \text{ء}\end{pmatrix}^{\text{مد}}$ = ...

(أ) $\begin{pmatrix}١ & -٢\\ ٠ & -٢\end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix}١ & ٠\\ -٢ & ٢\end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix}١ & ٠\\ ٢ & ٢\end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix}١ & ٠\\ -٢ & -٢\end{pmatrix}$

(١١) إذا كان : $\begin{pmatrix}٦ & ١\\ ٥ & -٣\end{pmatrix} = \text{س}\begin{pmatrix}٠ & ١\\ ٥ & ٠\end{pmatrix} - \text{ص}\begin{pmatrix}-٢ & ٠\\ ٠ & ١\end{pmatrix}$ فإن : س + ص = ...

(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) -٢

(١٢) إذا كانت : س ، ص ، ع أعدادًا حقيقية وكان $\text{س}\begin{pmatrix}٠\\ ٢\\ ١\end{pmatrix} + \text{ص}\begin{pmatrix}٠\\ ١\\ -١\end{pmatrix} + \text{ع}\begin{pmatrix}١\\ ٠\\ ٠\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}٣\\ ٧\\ ٥\end{pmatrix}$

فإن : س ص ع = ...

(أ) ١٢ (ب) ٤ (جـ) -١٢ (د) ٣

(١٣) إذا كانت : $\begin{pmatrix}٣ & ٠\\ -٢ - \text{س} & ٤\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}٣ & ٠\\ \text{س} + \text{ص} & \text{ص} + ٢\end{pmatrix} = \boxed{}$ فإن : س + ص = ...

(أ) -٢ (ب) -١ (جـ) ٠ (د) -٤

(١٤) إذا كان : $\begin{pmatrix}\text{س} & -٢\\ ١ & ٤\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{ص} & -١\\ ٣ & ٥\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-٥ & \text{س}\\ ٤ & ٩\end{pmatrix}$ فإن : ص = ...

(أ) -٢ (ب) -٥ (جـ) -٣ (د) -٧

(١٥) لأى مصفوفة أ يكون : أ + (-أ) = ...

(أ) أ (ب) -أ (جـ) $\boxed{}$ (د) $\begin{pmatrix}١ & ٠\\ ٠ & ١\end{pmatrix}$

(١٦) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٢ × ٣ ، ب هى المعكوس الجمعى للمصفوفة أ

فإن ب على النظم ....

(أ) ٢ × ٣ (ب) ٣ × ٢ (جـ) ٢ × ٢ (د) ٣ × ٣

(١٧) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٢ × ٣ ، ب مصفوفة على النظم ٢ × ٢ ، ج مصفوفة على النظم ٣ × ٢ فأى العمليات الآتية معرفة ؟

(أ) أ + ب (ب) ب - ج (جـ) أ + ج$^{\text{مد}}$ (د) أ - ج

(١٨) إذا كانت أ مصفوفة متماثلة فأى مما يأتى يكون متماثلة أيضًا ؟

(١) ٢ أ   (٢) − أ   (٣) أ^مد

(أ) (١) فقط.   (ب) (١) ، (٢) فقط.   (جـ) (٢) ، (٣) فقط.   (د) (١) ، (٢) ، (٣)

(١٩) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ فإن : $I \neq$ ....

(أ) أ − ب   (ب) أ^مد + ب   (جـ) أ + ب^مد   (د) أ + ب

(٢٠) إذا كانت أ مصفوفة قطرية على النظم ٢ × ٢ وكان حاصل ضرب عناصر قطرها الرئيسى = ك (حيث ك ≠ ٠) وكانت المصفوفة ب هى المعكوس الجمعى للمصفوفة أ فإن حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسى للمصفوفة ب = ...

(أ) ك   (ب) − ك   (جـ) $\frac{١}{ك}$ (د) ٢ ك

(٢١) إذا كانت : أ + أ^مد = ▭ فإن : أ مصفوفة ....

(أ) صف.   (ب) عمود.   (جـ) متماثلة.   (د) شبه متماثلة.

(٢٢) إذا كانت أ مصفوفة شبه متماثلة فإن : أ + أ^مد = ...

(أ) ٢ أ   (ب) ٢ أ^مد   (جـ) ▭   (د) صفر

(٢٣) إذا كانت أ مصفوفة متماثلة فإن : $\frac{١}{٢}$ (أ + أ^مد) = ...

(أ) أ   (ب) $\frac{١}{٢}$ أ   (جـ) I (د) ▭

(٢٤) (س^مد)^مد − س = ...

(أ) ▭   (ب) س   (جـ) ٢ س   (د) صفر

(٢٥) إذا كانت المصفوفتان أ ، ب لهما نفس النظم م × ن فإن المصفوفة أ − ٢ ب تكون على النظم ....

(أ) م × ١   (ب) ١ × ن   (جـ) ن × م   (د) م × ن

(٢٦) إذا كانت أ ، ب مصفوفتين على النظم ٣ × ٢ فإن : المصفوفة (٥ أ + ٣ ب)^مد على النظم ....

(أ) ٣ × ٢   (ب) ٥ × ٣   (جـ) ٢ × ٣   (د) ٣ × ٣

(٢٧) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} س & ٣ \\ -ص & ص + ١ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} -٢ & ٠ \\ ٣ & ٥ \end{pmatrix}$ ، ج = $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ -٣ & -٢ \end{pmatrix}$

وكان : أ − ٢ ب = ٣ ج فإن : س ص = ...

(أ) −٦   (ب) −٢   (جـ) ٦   (د) ٩

(٢٨) إذا كان : أ^مد + ب^مد = $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٣ & -١ \end{pmatrix}$ فإن : ٢ (أ + ب)^مد = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ٢ & ٦ \\ ٠ & -٢ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٣ & -١ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ٦ & -٢ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ٠ & -١ \end{pmatrix}$

(٢٩) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ، $(أ + ب)^{مد} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ فإن : ب = ...

(أ) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$

(٣٠) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ فإن : $\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ = ...

(أ) أ − ٢ (ب) أ − ٢ I (جـ) أ + I (د) أ − I

(٣١) إذا كانت : $س = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ ، $ك\,س = \begin{pmatrix} 0 & 3أ \\ 2ب & 24 \end{pmatrix}$ فإن : أ + ب − ك = ...

(أ) −١٩ (ب) −٧ (جـ) ٧ (د) ١٩

(٣٢) إذا كانت أ ، ب مصفوفتان بحيث أ + ب = أ − ب فإن ....

(أ) أ مصفوفة صفرية. (ب) ب مصفوفة صفرية.

(جـ) ب مصفوفة وحدة. (د) ب معكوس جمعي للمصفوفة أ

(٣٣) إذا كانت أ ، ب مصفوفتان من نفس النظم ٢ × ٢ وكان : أ + ب = I ، ٢ أ − ٢ ب = I

فإن : أ = ...

(أ) $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(٣٤) إذا كانت : $أ + ب^{مد} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ وكان : $ب - أ^{مد} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ فإن : $(أ + ب)^{مد}$ = ...

(أ) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$

(٣٥) إذا كان : $2أ + ب^{مد} = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 7 & 13 \end{pmatrix}$ وكان : $2ب + أ^{مد} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -1 & 14 \end{pmatrix}$ فإن : أ + ب = ...

(أ) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$

(٣٦) أبسط صورة للمقدار : $\text{جتا}\,\theta \begin{pmatrix} \text{جتا}\,\theta & \text{جا}\,\theta \\ -\text{جا}\,\theta & \text{جتا}\,\theta \end{pmatrix} + \text{جا}\,\theta \begin{pmatrix} \text{جا}\,\theta & -\text{جتا}\,\theta \\ \text{جتا}\,\theta & \text{جا}\,\theta \end{pmatrix}$ تساوى ....

(أ) ▭ (ب) I (جـ) − I (د) $\begin{pmatrix} 1 & \text{جا}\,\theta \\ \text{جتا}\,\theta & 1 \end{pmatrix}$

(٣٧) أبسط صورة للمقدار : $\text{قا}\,\theta \begin{pmatrix} \text{قا}\,\theta & -\text{ظا}\,\theta \\ \text{ظا}\,\theta & -\text{قا}\,\theta \end{pmatrix} + \text{ظا}\,\theta \begin{pmatrix} -\text{ظا}\,\theta & \text{قا}\,\theta \\ -\text{قا}\,\theta & \text{ظا}\,\theta \end{pmatrix}$ تساوى ....

(أ) ▭ (ب) I (جـ) − I (د) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(٣٨) إذا كان : $أ = \begin{pmatrix} \text{جتا}\,\theta & -\text{جا}\,\theta \\ \text{جا}\,\theta & \text{جتا}\,\theta \end{pmatrix}$ حيث $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ وكان : $أ + أ^{مد} = I$ فإن : θ = ...

(أ) $\frac{\pi}{12}$ (ب) $\frac{\pi}{6}$ (جـ) $\frac{\pi}{4}$ (د) $\frac{\pi}{3}$

(٣٩) إذا كانت : $أ = (أ_{ص ع})$ مصفوفة على النظم ٣ × ٣ حيث $أ_{ص ع} = \begin{cases} ص + ع ، ص = ع \\ ص - ع ، ص \neq ع \end{cases}$

فإن : $أ + أ^{مد} = ٤ \times$ ....

(أ) $\begin{pmatrix} ٤ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٨ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١٢ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٢ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٣ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٢ & -١ & -٢ \\ ١ & ٤ & -١ \\ ٢ & ١ & ٦ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٢ & ١ & ٢ \\ -١ & ٤ & ١ \\ -٢ & -١ & ٦ \end{pmatrix}$

(٤٠) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٢ × ٣ حيث $أ_{ص ع} = |ص - ع|$ وكانت ب مصفوفة على النظم ٢ × ٣ حيث $ب_{ص ع} = ص - ع$ فإن : أ + ب = ...

(أ) ▭ (ب) I (جـ) $\begin{pmatrix} ٠ & ٢ & ٤ \\ ٢ & ٠ & ٢ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٢ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$

(٤١) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} -١ & ٣ \\ ٠ & ٢ \end{pmatrix}$ وكانت الدالة د معرفة على مجموعة المصفوفات المربعة حيث

د (س) = ٣ س + ٥ I فإن : د (أ) = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ٢ & ١٤ \\ ٥ & ١١ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٢ & ٩ \\ ٠ & ١١ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} -٣ & ٩ \\ ٠ & ٦ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} -٣ & ١٤ \\ ٥ & ٦ \end{pmatrix}$

(٤٢) إذا كان س مصفوفة على النظم ٢ × ٢ وكان : $س + س^{مد} = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix}$

فإن مجموع عناصر س يساوى ....

(أ) ٦ (ب) ٥ (جـ) ٤ (د) ٣

(٤٣) المصفوفة المربعة يمكن التعبير عنها دائمًا ....

(أ) كمجموع مصفوفتين إحداهما متماثلة والأخرى شبه متماثلة.

(ب) كمجموع مصفوفتين إحداهما قطرية والأخرى متماثلة.

(جـ) كحاصل ضرب عدد حقيقى ≠ صفر فى مصفوفة متماثلة لها نفس النظم.

(د) بجمع المصفوفة نفسها مع مدورها.

(٤٤) إذا كانت : أ ، ب ، جـ ثلاث مصفوفات بحيث $أ + ب = \begin{pmatrix} ١ & -١ \\ ٣ & ٠ \end{pmatrix}$ ، $ب + جـ = \begin{pmatrix} ٢ & -٢ \\ ١ & -١ \end{pmatrix}$

، $جـ + أ = \begin{pmatrix} -١ & ١ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix}$ فإن : أ + ب + جـ = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ٤ & ٠ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ١ & -١ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} -١ & ٢ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٢ & -٢ \\ ٤ & ٢ \end{pmatrix}$

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} -٤ & -١ \\ -٣ & -٧ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٢ & -٧ \\ ٨ & -١ \end{pmatrix}$ ، $جـ = \begin{pmatrix} ٧ \\ ٤ \end{pmatrix}$

فأوجد كلاً مما يأتى إن أمكن : (١) أ + ب (٢) أ + جـ

٢ إذا كان : $\text{أ} = \begin{pmatrix} -١ & ٢ \\ ٥ & -٣ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} ٤ & -١ \\ -٢ & ٦ \end{pmatrix}$ ، $\text{ج} = \begin{pmatrix} -٣ & ١ \\ ٣ & ٠ \end{pmatrix}$

فأوجد المصفوفة : $٢\text{أ} - ٣\text{ب} + ٤\text{ج}$

---

٣ إذا كان : $\text{س} = \begin{pmatrix} -٢ & -٤ \\ ٦ & ٣ \\ ٤ & ٠ \end{pmatrix}$ ، $\text{ص} = \begin{pmatrix} ١ & ٥ \\ -٢ & ٠ \\ -٣ & ٤ \end{pmatrix}$ ، $\text{ع} = \begin{pmatrix} -٤ & -٢ \\ ٢ & -٣ \\ ٠ & ٦ \end{pmatrix}$

فأوجد المصفوفة : $٣\text{س} - \text{ص} + \text{ع}$

---

٤ إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} -١ & ١ & ٣ \\ -٣ & ٥ & -٢ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} ٠ & ٤ & -٢ \\ ٣ & -١ & ١ \end{pmatrix}$ **حقق أن :** $٤(\text{أ} + \text{ب}) = ٤\text{أ} + ٤\text{ب}$

---

٥ إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} ١ & -٣ \\ ٥ & ٢ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} ٤ & ٢ \\ ٣ & -١ \end{pmatrix}$

حقق أن : (١) $(\text{أ} + \text{ب})^{\text{مد}} = \text{أ}^{\text{مد}} + \text{ب}^{\text{مد}}$ | (٢) $(\text{أ} - \text{ب})^{\text{مد}} = \text{أ}^{\text{مد}} - \text{ب}^{\text{مد}}$

(٣) $\text{أ} - \text{ب} \neq \text{ب} - \text{أ}$ | (٤) $-(\text{أ} + \text{ب}) = (-\text{أ}) + (-\text{ب})$

---

٦ إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} -١ & ٢ \\ ٥ & ٣ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{pmatrix}$ ، $\text{ج} = \begin{pmatrix} ١ & -٣ \\ ٤ & ٣ \end{pmatrix}$

أوجد : (١) $\frac{١}{٢}(\text{أ} + \text{ج})$ | (٢) $٢\text{أ} - \text{ب} + ٢\text{ج}$

(٣) $\text{أ} - ٢\text{ب} + ٢(\text{ب} + \text{ج})$ | (٤) $\text{أ} + ٢\text{ب}^{\text{مد}} - \text{ج}^{\text{مد}}$

---

٧ إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} -٥ & ٠ & -٧ \\ ٥ & ٧ & ٤ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} ٤ & -٨ \\ ٧ & ٠ \\ -٥ & -٦ \end{pmatrix}$

فأوجد ناتج كل من العمليات الآتية إن أمكن ، مع ذكر السبب فى حالة تعذر إجراء العملية :

(١) $\text{أ} + \text{ب}$ (٢) $\text{أ} + \text{ب}^{\text{مد}}$ (٣) $\text{أ}^{\text{مد}} + \text{ب}$

---

٨ إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} -٤ \\ ٦ \\ -١٢ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} ٢ \\ -٣ \\ ٦ \end{pmatrix}$ **أثبت أن :** المصفوفة أ معكوس جمعى للمصفوفة ٢ ب

---

٩ إذا كانت : $\begin{pmatrix} -١ & ٣ & ٢ \\ ٥ & ٧ & ٤ \\ ٨ & -٦ & ٠ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -٣ & ٢ & ١ \\ -٧ & -٦ & ٤ \\ ٥ & ٣ & -١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{أ} & ٥ & \text{س} \\ -٢ & \text{ص} & ٨ \\ \text{ع} & -٣ & \text{ب} \end{pmatrix}$

أوجد قيم : س ، ص ، ع ، أ ، ب «٣ ، ١ ، ١٣ ، −٤ ، −١»

---

١٠ إذا كان : $٣\begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & \text{س} \end{pmatrix} - ٢\begin{pmatrix} \text{ص} & ٢ \\ ١ & ٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٦ & -٧ \\ ٢ & ٨ \end{pmatrix}^{\text{مد}} + \begin{pmatrix} -٥ & ٦ \\ ٢ & -٤ \end{pmatrix}$

أوجد قيمة كل من : س ، ص «٤ ، ٣»

١١ أوجد قيم أ ، ب ، ح ، د التى تحقق المعادلة :

(١) $\begin{pmatrix} -٣ & -٢ \\ ١ & ٥ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{ح} & \text{د} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٢ & ١ \\ ٤ & -٣ \end{pmatrix}$ «١ ، ٣ ، ٣ ، -٨»

(٢) $\begin{pmatrix} ١ \\ ٠ \\ -١ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{أ} \\ \text{ب} \\ \text{ح} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ \\ -١ \\ ١ \end{pmatrix}$ «١ ، ١ ، -٢»

(٣) $٢ \begin{pmatrix} \text{أ} & ٣ \\ ٦ & \text{ب} \end{pmatrix} = ٣ \begin{pmatrix} \text{أ} & \text{د} \\ \text{ح} & -٢ \end{pmatrix} - ٤ \begin{pmatrix} \text{ح} & ٣ \\ ٠ & \text{أ} \end{pmatrix}$ «١٦ ، -٣٥ ، ٤ ، ٦»

---

١٢ أوجد قيم س ، ص ، ع ، ل التى تحقق أن :

$\text{س} \begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ٥ & \text{ص} \end{pmatrix} + \text{ع} \begin{pmatrix} ٢ & \text{ل} \\ ٠ & ٤ \end{pmatrix} + ٥ \begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix} = \square_{٢ \times ٢}$ «-١ ، ٢ ، -٢ ، ١»

---

١٣ إذا كان : $\begin{pmatrix} ٢\text{س} - ١ & ٨ \\ \text{ع} & ٦ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{س} + ٣ & ٥ \\ -٢\text{ع} & ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤\text{س} & -٣\text{ص} \\ ٣ & \text{ك} \end{pmatrix} + ٢ \begin{pmatrix} -\text{س} & ٦\text{ص} \\ -٦ & ٢\text{ك} \end{pmatrix}$

أوجد قيم : س ، ص ، ع ، ك «-٤ ، $\frac{١}{٣}$ ، -٣ ، $\frac{٢}{٥}$»

---

١٤ إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٢ \\ ٢ & ١ & -٣ \\ ٤ & ٥ & -١ \end{pmatrix}$ ، $(\text{أ} + \text{ب})^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} ٥ & ٣ & ٦ \\ -١ & ٥ & ٨ \\ ٤ & ٠ & ٣ \end{pmatrix}$ أوجد : المصفوفة ب

---

١٥ إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٤ & ٨ & -٦ \\ ٢ & -٤ & ٨ \\ ٦ & ١٢ & ٠ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} ٢ & -٦ & ٢ \\ ٤ & -١٠ & ٠ \\ -١ & ٨ & -٤ \end{pmatrix}$

فأوجد المصفوفة س بحيث : $\text{س} = ٢\,\text{أ} - ٣\,\text{ب}$

---

١٦ إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ -٣ & ٥ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} -١ & ٤ \\ ٦ & -٢ \end{pmatrix}$ أوجد المصفوفة س حيث : $٢\,\text{أ} - \text{س} = \text{ب}^{\text{مد}}$

---

١٧ حل المعادلة المصفوفية : $٤ \left[\text{س} + \begin{pmatrix} ٥ & -١ \\ ٠ & -٣ \end{pmatrix} \right] = ٢\,\text{س} + \begin{pmatrix} ١٢ & -٤ \\ ٥ & -٦ \end{pmatrix}$

---

١٨ إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} -١ & ٢ & ١ \\ ٣ & ٤ & ٥ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} ٢ & -٣ & ١ \\ -٢ & -٦ & ٤ \end{pmatrix}$ فأوجد المصفوفة س بحيث :

(١) $\text{س}^{\text{مد}} = \text{أ}^{\text{مد}} + \text{ب}^{\text{مد}}$

(٢) $٢ \left[\text{س}^{\text{مد}} + \text{أ} \right] = ٤\,\text{ب}$

(٣) $٥\,\text{س}^{\text{مد}} - ٢ (\text{أ} - \text{ب}) = \square$

---

١٩ إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & ٠ \\ -٥ & ٢ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} -٤ & ١ \\ ١ & -٢ \\ -١ & ٠ \end{pmatrix}$

أوجد المصفوفة س بحيث : $٢\,\text{ب} + \text{س}^{\text{مد}} = ٣\,\text{س}^{\text{مد}} - \text{أ}$

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت أ مصفوفة مربعة غير صفرية فإن المصفوفة أ + أ^{مد} مصفوفة ....

(أ) متماثلة. (ب) شبه متماثلة. (جـ) قطرية. (د) صفرية.

(٢) إذا كانت أ مصفوفة مربعة فإن المصفوفة (أ − أ^{مد}) تكون ....

(أ) متماثلة. (ب) شبه متماثلة. (جـ) صفرية. (د) قطرية.

(٣) إذا كان : أ^{مد} + ب^{مد} = أ + ب فإن ....

(أ) أ متماثلة. (ب) ب متماثلة.

(جـ) (أ + ب) متماثلة. (د) (أ + ب) شبه متماثلة.

(٤) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٣ × ٣ حيث أ$_{ص\,ع}$ = ٢ ص − ع ، ب مصفوفة على النظم ٣ × ٣

حيث ب$_{ص\,ع}$ = ع − ص فإن : أ + ب = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٢ & ٢ & ٢ \\ ٣ & ٣ & ٣ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٤ & ٣ & ٢ \\ ٥ & ٤ & ٣ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٢ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & -١ \\ ٠ & -١ & -٢ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٣ & -١ & ٢ \\ -٢ & ١ & ٠ \\ ٠ & -٣ & ٤ \end{pmatrix}$

(٥) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٢ × ٢ وكان أ + أ^{مد} = I فإن مجموع عناصر أ هو ....

(أ) ٤ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) صفر

(٦) إذا كانت أ ، ب مصفوفتين على النظم ٢ × ٢ وكان (أ + ب) مصفوفة متماثلة

فإن : $\dfrac{أ_{٢١} - أ_{١٢}}{ب_{٢١} - ب_{١٢}}$ = ...

(أ) صفر (ب) -١ (جـ) ١ (د) ٢

---

٢ إذا كانت : س + ٢ ص = $\begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ -٢ & ٤ \end{pmatrix}$ ، س + ص = $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٠ & -١ \end{pmatrix}$

فأوجد المصفوفتين : س ، ص

---

٣ إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} -١ & ٤ \\ ٢ & -٥ \end{pmatrix}$ ، ب^{مد} = $\begin{pmatrix} ٢ & -٣ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$

فأوجد المصفوفة س التى تحقق العلاقة : ٣ أ − ٢ ب^{مد} + ٢ س = ب − س^{مد}

الدرس 3

ضرب المصفوفات



مثال تمهيدى

إذا كانت المصفوفة أ تعبر عن نتائج ٢٠ مباراة لفريقى الأهلى والزمالك فى الدورى العام

لكرة القدم حيث : $أ = \begin{pmatrix} ١٢ & ٦ & ٢ \\ ١١ & ٤ & ٥ \end{pmatrix}$ (الأعمدة: فوز ، تعادل ، هزيمة – الصفوف: الأهلى ، الزمالك)

وكانت المصفوفة ب تعبر عن عدد النقاط التى يحصل عليها كل فريق فى حالة الفوز

والتعادل والهزيمة حيث : $ب = \begin{pmatrix} ٣ \\ ١ \\ ٠ \end{pmatrix}$ (فوز ، تعادل ، هزيمة)

فإن : مجموع النقاط التى حصل عليها فريق الأهلى = ١٢ × ٣ + ٦ × ١ + ٢ × ٠ = ٤٢ نقطة

، مجموع النقاط التى حصل عليها فريق الزمالك = ١١ × ٣ + ٤ × ١ + ٥ × ٠ = ٣٧ نقطة

ويمكن التعبير عن مجموع النقاط التى حصل عليها كل فريق بالمصفوفة $ج = \begin{pmatrix} ٤٢ \\ ٣٧ \end{pmatrix}$

ونلاحظ أن

٤٢ هى ناتج جمع حواصل ضرب عناصر الصف فالأول من أ فى عناصر عمود ب

، ٣٧ هى ناتج جمع حواصل ضرب عناصر الصف الثانى من أ فى عناصر عمود ب

- المصفوفة ج هى ناتج ضرب المصفوفة أ × المصفوفة ب

أى أن $ج = أ ب = \begin{pmatrix} ١٢ & ٦ & ٢ \\ ١١ & ٤ & ٥ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٣ \\ ١ \\ ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٢ \times ٣ + ٦ \times ١ + ٢ \times ٠ \\ ١١ \times ٣ + ٤ \times ١ + ٥ \times ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤٢ \\ ٣٧ \end{pmatrix}$

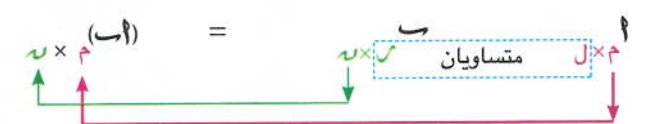
ضرب المصفوفات

إذا كانت : أ مصفوفة على النظم م × ل ، ب مصفوفة على النظم ر × ن فإن :

- حاصل ضربهما ج = أ ب يكون ممكنًا إذا وفقط إذا كان : ل = ر

أى عدد أعمدة المصفوفة أ = عدد صفوف المصفوفة ب

- المصفوفة ج = أ ب تكون على النظم م × ن



- كل عنصر $ح_{ص ع}$ فى المصفوفة ج = أ ب يساوى مجموع حواصل ضرب عناصر الصف ص من أ فى عناصر العمود ع من ب عنصرًا بعنصر كلًا بنظيره.

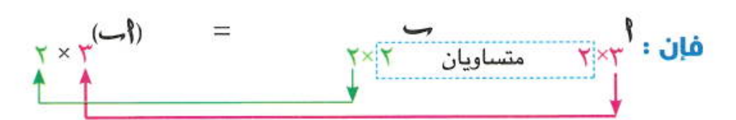
ولتوضيح مفهوم عملية ضرب المصفوفات :

فمثلًا إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ب_{١١} & ب_{٢١} \\ ب_{١٢} & ب_{٢٢} \end{pmatrix}$

فإن : أ مصفوفة على النظم ٣ × ٢ ، ب مصفوفة على النظم ٢ × ٢

وحيث إن : عدد أعمدة المصفوفة أ = عدد صفوف المصفوفة ب = ٢

فإن :



أى أن عملية ضرب المصفوفة أ فى المصفوفة ب تكون ممكنة

وينتج مصفوفة أ ب على النظم ٣ × ٢ ونحصل عليها كالآتى :

* نضرب كل عنصر من عناصر الصف الأول فى المصفوفة أ بالعنصر المناظر فى العمود الأول فى المصفوفة ب ونجمع حواصل الضرب فنحصل على العنصر الموجود فى (الصف الأول والعمود الأول) فى المصفوفة (أ ب) كما يلى :

$$\begin{pmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ب_{١١} & ب_{٢١} \\ ب_{١٢} & ب_{٢٢} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} أ_{١١} ب_{١١} + أ_{٢١} ب_{١٢} & ..... \\ .... & ..... \\ .... & ..... \end{pmatrix}$$

* ثم نضرب كل عنصر من عناصر الصف الأول فى المصفوفة أ بالعنصر المناظر فى العمود الثانى فى المصفوفة ب ونجمع حواصل الضرب فنحصل على العنصر الموجود فى (الصف الأول والعمود الثانى) فى المصفوفة (أ ب)

كما يلى : $\begin{pmatrix} أ_{١١} & أ_{١٢} \\ أ_{٢١} & أ_{٢٢} \\ أ_{٣١} & أ_{٣٢} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ب_{١١} & ب_{١٢} \\ ب_{٢١} & ب_{٢٢} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ..... & أ_{١١}ب_{١٢} + أ_{١٢}ب_{٢٢} \\ ..... & .... \\ ..... & .... \end{pmatrix}$

* وهكذا حتى نحصل على جميع عناصر المصفوفة أ ب كما يلى :

$$أب = \begin{pmatrix} أ_{١١} & أ_{١٢} \\ أ_{٢١} & أ_{٢٢} \\ أ_{٣١} & أ_{٣٢} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ب_{١١} & ب_{١٢} \\ ب_{٢١} & ب_{٢٢} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} أ_{١١}ب_{١١} + أ_{١٢}ب_{٢١} & أ_{١١}ب_{١٢} + أ_{١٢}ب_{٢٢} \\ أ_{٢١}ب_{١١} + أ_{٢٢}ب_{٢١} & أ_{٢١}ب_{١٢} + أ_{٢٢}ب_{٢٢} \\ أ_{٣١}ب_{١١} + أ_{٣٢}ب_{٢١} & أ_{٣١}ب_{١٢} + أ_{٣٢}ب_{٢٢} \end{pmatrix}$$

لاحظ أن عملية ضرب المصفوفة ب فى المصفوفة أ تكون غير ممكنة.

أى أن ب أ غير ممكنة لأن عدد أعمدة المصفوفة ب $\neq$ عدد صفوف المصفوفة أ

مثال ١

أوجد أ ب إن أمكن فى كل مما يأتى :

١ $أ = \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & -١ \\ ٠ & ٤ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} -١ & ٢ \\ ٠ & -٣ \end{pmatrix}$

٢ $أ = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ١ & ٠ & -٢ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ١ & ٥ & ٣ \\ -١ & ٢ & -٤ \end{pmatrix}$

٣ $أ = \begin{pmatrix} ٢ & -١ & ٣ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} -٢ \\ ١ \\ ٤ \end{pmatrix}$

الحل

١ ∵ أ مصفوفة على النظم ٣ × ٢ ، ب مصفوفة على النظم ٢ × ٢

∴ عدد أعمدة المصفوفة أ = عدد صفوف المصفوفة ب = ٢

∴ أ ب ممكنة وتكون على النظم ٣ × ٢

$$أب = \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & -١ \\ ٠ & ٤ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -١ & ٢ \\ ٠ & -٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (٢)(-١) + (١)(٠) & (٢)(٢) + (١)(-٣) \\ (٣)(-١) + (-١)(٠) & (٣)(٢) + (-١)(-٣) \\ (٠)(-١) + (٤)(٠) & (٠)(٢) + (٤)(-٣) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٢ & ١ \\ -٣ & ٩ \\ ٠ & -١٢ \end{pmatrix}$$

٢ ∵ أ مصفوفة على النظم ٢ × ٣ ، ب مصفوفة على النظم ٢ × ٣

∴ عدد أعمدة المصفوفة أ $\neq$ عدد صفوف المصفوفة ب ∴ أ ب غير ممكنة.

٣ ∵ أ مصفوفة على النظم ١ × ٣ ، ب مصفوفة على النظم ٣ × ١

∴ عدد أعمدة المصفوفة أ = عدد صفوف المصفوفة ب = ٣ ∴ أ ب ممكنة وتكون على النظم ١ × ١

$$∴ أب = \begin{pmatrix} ٢ & -١ & ٣ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -٢ \\ ١ \\ ٤ \end{pmatrix} = \left((٢)(-٢) + (-١)(١) + (٣)(٤)\right) = (٧)$$

مثال ٢

إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ **أوجد :** أ بمد إن أمكن.

الحل

أ = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ على النظم ٢ × ٣ ، بمد = $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ على النظم ٣ × ٢

∵ عدد أعمدة المصفوفة أ = عدد صفوف المصفوفة بمد ∴ أ بمد ممكنة على النظم ٢ × ٢

∴ أ بمد = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & -9 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$

حاول بنفسك

إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ **فأوجد إن أمكن :** أ ب ، أ بمد ، أمد ب

خواص عملية ضرب المصفوفات

إذا كانت أ ، ب ، ج ثلاث مصفوفات ، I هى مصفوفة الوحدة فإن الخواص الآتية تتحقق :

١ خاصية الدمج (التنسيق)

(أ ب) ج = أ (ب ج) حيث عمليات الضرب ممكنة

فمثلًا إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ ، ج = $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

فإن : أ ب = $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -23 \\ 5 & -1 & 24 \end{pmatrix}$

∴ (أ ب) ج = $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -23 \\ 5 & -1 & 24 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ -17 \end{pmatrix}$ ، ب ج = $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$

∴ أ (ب ج) = $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ -17 \end{pmatrix}$

أى أن (أ ب) ج = أ (ب ج)

٢ خاصية وجود المحايد الضربى

مصفوفة الوحدة I هى المحايد الضربى.

أى أن أ I = I أ = أ حيث أ مصفوفة مربعة لها نفس نظم I

فمثلًا $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

٣ خاصية توزيع ضرب المصفوفات على جمعها

$\text{أ}(\text{ب}+\text{ج}) = \text{أب} + \text{أج}$ ، $(\text{أ}+\text{ب})\,\text{ج} = \text{أج} + \text{ب ج}$ حيث عمليات الضرب والجمع ممكنة.

فمثلًا إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} ١ & -٢ \\ -٣ & ٠ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} ٣ & -٥ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix}$ ، $\text{ج} = \begin{pmatrix} -٢ & ٦ \\ ١ & -١ \end{pmatrix}$

فإن : $\text{ب} + \text{ج} = \begin{pmatrix} ٣ & -٥ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -٢ & ٦ \\ ١ & -١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$

$\therefore \text{أ}(\text{ب}+\text{ج}) = \begin{pmatrix} ١ & -٢ \\ -٣ & ٠ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & -١ \\ -٣ & -٣ \end{pmatrix}$ (١)

، $\because \text{أب} + \text{أج} = \begin{pmatrix} ١ & -٢ \\ -٣ & ٠ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٣ & -٥ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ١ & -٢ \\ -٣ & ٠ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -٢ & ٦ \\ ١ & -١ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ٥ & -٩ \\ -٩ & ١٥ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -٤ & ٨ \\ ٦ & -١٨ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & -١ \\ -٣ & -٣ \end{pmatrix}$ (٢)

$\therefore$ من (١) ، (٢) ينتج أن : $\text{أ}(\text{ب}+\text{ج}) = \text{أب} + \text{أج}$

ملاحظة

إذا كانت أ ، ب مصفوفتين قابلتين للضرب على أى صورة بمعنى أن أ ب ممكنة ، ب أ ممكنة أيضًا.

فإنه ليس من الضرورى أن يكون أ ب = ب أ

وهذا يعنى أن **ضرب المصفوفات ليس عملية إبدالية**

فمثلًا إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٤ & -٣ \\ ٢ & -١ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} -٢ & ١ \\ ٥ & ٦ \end{pmatrix}$ ، $\text{ج} = \begin{pmatrix} -٢ & ٠ \\ ٠ & -٢ \end{pmatrix}$

فإن :

١ $\text{أب} = \begin{pmatrix} ٤ & -٣ \\ ٢ & -١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -٢ & ١ \\ ٥ & ٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٢٣ & -١٤ \\ -٩ & -٤ \end{pmatrix}$

، $\text{ب أ} = \begin{pmatrix} -٢ & ١ \\ ٥ & ٦ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٤ & -٣ \\ ٢ & -١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٦ & ٥ \\ ٣٢ & -٢١ \end{pmatrix}$ **أى أن** $\text{أب} \neq \text{ب أ}$

٢ $\text{أج} = \begin{pmatrix} ٤ & -٣ \\ ٢ & -١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -٢ & ٠ \\ ٠ & -٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٨ & ٦ \\ -٤ & ٢ \end{pmatrix}$

، $\text{ج أ} = \begin{pmatrix} -٢ & ٠ \\ ٠ & -٢ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٤ & -٣ \\ ٢ & -١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٨ & ٦ \\ -٤ & ٢ \end{pmatrix}$ **أى أن** $\text{أج} = \text{ج أ}$

لاحظ أنه

يمكن ضرب أى مصفوفتين مربعتين على نفس النظم.

مثال ٣

إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ **فأوجد قيمة كل من :** أ^2 ، أ^3

الحل

$\text{أ}^2 = \text{أ} \times \text{أ} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$

، $\text{أ}^3 = \text{أ}^2 \times \text{أ} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 22 \\ -11 & -9 \end{pmatrix}$

لاحظ أنه

إذا كانت أ مصفوفة غير مربعة فإن أ^2 غير ممكنة.

مثال ٤

إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ **فأثبت أن :** $\text{أ}^2 - 2\,\text{أ} - 3\,I^2 = \square$

الحل

$\text{أ}^2 - 2\,\text{أ} - 3\,I^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \square$

لاحظ أن

* $I^2 = I$
* $I^n = I$ حيث $n \in$ ص$^+$

حاول بنفسك

إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ **فأثبت أن :** $\text{أ}^2 - 5\,\text{أ} + 2\,I = \square$

تفكير ناقد

١ إذا كانت : أ ، ب مصفوفتين ، وكان : $\text{أ}\,\text{ب} = \square$

فهل هذا يعني دائمًا أن : $\text{أ} = \square$ أو $\text{ب} = \square$ ؟

الإجابة : لا

فإذا اتخذنا $\text{أ} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ فإن : $\text{أ}\,\text{ب} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

، ∵ $\text{أ} \neq \square$ ، $\text{ب} \neq \square$

أي أنه إذا كانت : $\text{أ}\,\text{ب} = \square$ فهذا لا يعنى دائمًا أن : $\text{أ} = \square$ أو $\text{ب} = \square$

[٢] إذا كانت : أ مصفوفة مربعة وكان $أ^{٢} = I$ فهل هذا يعنى دائمًا أن $أ = I$ ؟

الإجابة : لا

فإذا اتخذنا $أ = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & -١ \end{pmatrix}$ فإن : $أ^{٢} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & -١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & -١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} = I$

أى أن إذا كانت : $أ^{٢} = I$ فهذا لا يعنى دائمًا أن : $أ = I$

[٣] إذا كانت : أ ، ب مصفوفتين وكان : $أ \times ب = أ$ فهل هذا يعنى دائمًا أن : $ب = I$ ؟

الإجابة : لا

فإذا اتخذنا $أ = \begin{pmatrix} ١ & -١ \\ ٢ & -٢ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٢ & -٢ \\ ١ & -١ \end{pmatrix}$

فإن : $أ \times ب = \begin{pmatrix} ١ & -١ \\ ٢ & -٢ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٢ & -٢ \\ ١ & -١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & -١ \\ ٢ & -٢ \end{pmatrix} = أ$

أى أن إذا كانت : $أ \times ب = أ$ فهذا لا يعنى دائمًا أن : $ب = I$

مدور حاصل ضرب مصفوفتين

إذا كانت : أ ، ب مصفوفتين وكانت أ ب ممكنة فإن : $(أ ب)^{مد} = ب^{مد} أ^{مد}$

وبصفة عامة : $(أ ب ج ... هـ)^{مد} = هـ^{مد} ... ج^{مد} ب^{مد} أ^{مد}$ بشرط أن تكون عمليات الضرب ممكنة.

مثال ٥

إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٢ & -١ & ٤ \\ ٣ & ٥ & ٧ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٦ & ١ \\ -٣ & ٩ \\ ٢ & -٨ \end{pmatrix}$ **فحقق أن :** $(أ ب)^{مد} = ب^{مد} أ^{مد}$

الحل

$\because أ ب = \begin{pmatrix} ٢ & -١ & ٤ \\ ٣ & ٥ & ٧ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٦ & ١ \\ -٣ & ٩ \\ ٢ & -٨ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢٣ & -٣٩ \\ ١٧ & -٨ \end{pmatrix}$ $\therefore (أ ب)^{مد} = \begin{pmatrix} ٢٣ & ١٧ \\ -٣٩ & -٨ \end{pmatrix}$ (١)

، $\because ب^{مد} = \begin{pmatrix} ٦ & -٣ & ٢ \\ ١ & ٩ & -٨ \end{pmatrix}$ ، $أ^{مد} = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ -١ & ٥ \\ ٤ & ٧ \end{pmatrix}$

$\therefore ب^{مد} أ^{مد} = \begin{pmatrix} ٦ & -٣ & ٢ \\ ١ & ٩ & -٨ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ -١ & ٥ \\ ٤ & ٧ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢٣ & ١٧ \\ -٣٩ & -٨ \end{pmatrix}$ (٢)

من (١) ، (٢) : $\therefore (أ ب)^{مد} = ب^{مد} أ^{مد}$

مثال ٦

إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 6 \\ 5 & -7 & 4 \end{pmatrix}$ ، $\text{ج} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -5 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

فأوجد المصفوفة س التى تحقق العلاقة : $15\,\text{س}^{\text{مد}} = \text{أ}^2 + (\text{ب ج})^{\text{مد}}$

الحل

$\because \text{أ}^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -7 \\ -21 & 28 \end{pmatrix}$

، $\text{ب ج} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 6 \\ 5 & -7 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -5 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 36 \\ 52 & -13 \end{pmatrix}$ $\therefore (\text{ب ج})^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} 1 & 52 \\ 36 & -13 \end{pmatrix}$

$\therefore 15\,\text{س}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} 7 & -7 \\ -21 & 28 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 52 \\ 36 & -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 45 \\ 15 & 15 \end{pmatrix}$ $\therefore \text{س}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} \frac{8}{15} & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore \text{س} = \begin{pmatrix} \frac{8}{15} & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

مثال ٧

أوجد قيم أ ، ب ، ح إذا كان : $\begin{pmatrix} 1 & \text{أ} & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 5 & -1 & \text{ب} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 7 & 6 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 & -6 & 4 \\ 6 & \text{ح} & 28 \\ -24 & 12 & 36 \end{pmatrix}$

الحل

يمكن إيجاد قيم أ ، ب ، ح دون إجراء عملية الضرب كاملة كالتالى :

نضرب عناصر الصف الأول من المصفوفة الأولى × عناصر العمود الأول من المصفوفة الثانية

$\therefore 1 \times -1 + \text{أ} \times 7 + 2 \times -2 = -19$ $\therefore \text{أ} = -2$

، نضرب عناصر الصف الثالث من المصفوفة الأولى × عناصر العمود الأول من المصفوفة الثانية

$\therefore 5 \times -1 - 1 \times 7 + \text{ب} \times -2 = -24$ $\therefore \text{ب} = 6$

، نضرب عناصر الصف الثانى من المصفوفة الأولى × عناصر العمود الثانى من المصفوفة الثانية

$\therefore 0 \times 0 + 2 \times 6 + 4 \times 3 = \text{ح}$ $\therefore \text{ح} = 24$

ملاحظة

يمكن استخدام الآلة الحاسبة العلمية فى ضرب المصفوفات وسوف نقوم بعرض ذلك فى نهاية الوحدة.

تمارين 3

على ضرب المصفوفات



من أسئلة الكتاب المدرسي ● تذكر ● فهم ○ تطبيق ● مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت أ مصفوفة على النظم م × ن ، ب مصفوفة على النظم ر × ل

فإن حاصل الضرب أ ب يكون ممكنًا إذا كانت ....

(أ) م = ر   (ب) ن = ر   (جـ) ن = ل   (د) م = ل

(٢) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٣ × ١ ، ب مصفوفة على النظم ١ × ٣

فإن أ ب مصفوفة على النظم ....

(أ) ٣ × ١   (ب) ١ × ١   (جـ) ٣ × ٣   (د) ١ × ٣

(٣) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٣ × ٢ ، أ ب مصفوفة على النظم ٢ × ١

فإن ب مصفوفة على النظم ....

(أ) ٣ × ٢   (ب) ٢ × ١   (جـ) ٣ × ١   (د) ٢ × ٢

(٤) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٣ × ٢ ، $ب^{مد}$ مصفوفة على النظم ١ × ٣

فإن المصفوفة أ ب تكون على النظم ....

(أ) ٣ × ١   (ب) ٢ × ١   (جـ) ٣ × ٢   (د) ١ × ٣

(٥) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٣ × ١ ، ب مصفوفة على النظم ٣ × ٢

فإن : $ب^{مد}$ $أ^{مد}$ على النظم ....

(أ) ٢ × ٣   (ب) ٣ × ٢   (جـ) ٢ × ١   (د) ١ × ٢

(٦) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٢ × ١ ، ب مصفوفة على النظم ٢ × ٢ ، جـ مصفوفة على النظم ١ × ٢

فإن : (ب أ) جـ على النظم ....

(أ) ٢ × ١   (ب) ١ × ١   (جـ) ١ × ٢   (د) ٢ × ٢

(٧) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٣ × ١ ، $ب^{مد}$ مصفوفة على النظم ١ × ٣ فإنه يمكن إجراء أى من العمليات الآتية ؟

(أ) أ + ب   (ب) $ب^{مد}$ + $أ^{مد}$ (جـ) أ $ب^{مد}$ (د) أ ب

(٨) $\begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ٠ & ٢ \end{pmatrix}$ = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٠ & ٢ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$

(٩) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ = ...

(أ) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (د) غير ممكنة.

(١٠) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}$ = ...

(أ) $\begin{pmatrix} 20 & -12 & -8 \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} 20 \\ -12 \\ -8 \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$ (د) غير ممكنة.

(١١) إذا كانت : أ ، ب مصفوفتين حيث أ ب = $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ فإن : ب$^{\text{مد}}$ أ$^{\text{مد}}$ = ...

(أ) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

(١٢) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} 2 & 5 \end{pmatrix}$ فإن : (ب أ)$^{\text{مد}}$ = ...

(أ) $\begin{pmatrix} 4 & 10 \\ -4 & -10 \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 10 & -10 \end{pmatrix}$ (جـ) (-6) (د) (6)

(١٣) إذا كانت : I هي مصفوفة الوحدة فإن : $I^{\text{ن}}$ = ... (حيث ن عدد صحيح موجب)

(أ) $I^{\text{مد}}$ (ب) I^{2}

(جـ) I^{3} (د) جميع ما سبق صحيح.

(١٤) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ فإن : أ^{2} = ...

(أ) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ (جـ) $\square_{1 \times 1}$ (د) $\square_{2 \times 2}$

(١٥) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ فإن : أ^{4} = ...

(أ) أ (ب) ٢ أ (جـ) ٤ أ (د) ٨ أ

(١٦) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} \text{س} & 0 \\ 1 & \text{ص} \end{pmatrix}$ ، أ × ب = $\begin{pmatrix} 9 & 6 \end{pmatrix}$

فإن : س + ص = ...

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) ٩

(١٧) إذا كانت : $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \text{س} & 7 \\ 3 & \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 11 & 18 \end{pmatrix}$ فإن : س + ص = ...

(أ) −٣ (ب) ٣ (جـ) −٢ (د) −١

(١٨) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ فإن : أ^{2} − أ = ...

(أ) I (ب) $\square$ (جـ) $3\,I$ (د) $5\,I$

(١٩) إذا كانت : $س = \begin{pmatrix} ٣ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٣ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٣ \end{pmatrix}$ فإن : $س^٢ + ٣ س = \ldots\ldots$

(أ) ١٢ I (ب) ١٨ I (جـ) ٩ س (د) ١٢ س

(٢٠) 📖 إذا كانت : $\begin{pmatrix} ٤ & ١ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١ & -١ \\ -٣ & س \end{pmatrix} = I$ فإن : $س = \ldots\ldots$

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) −٣ (د) −٤

(٢١) إذا كانت س مصفوفة بحيث $س \times \begin{pmatrix} ١ \\ ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ \\ ٢ \end{pmatrix}$ فإن : س يمكن أن تكون ……

(أ) $\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ١ \\ ١ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ١ & ١ \end{pmatrix}$

(٢٢) إذا كانت : $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ & س \\ ٤ & ٥ & ١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & ٠ \\ ص & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٤ & -١ \\ ١٩ & -٢ \end{pmatrix}$ فإن : $س - ص = \ldots\ldots$

(أ) ٥ (ب) ٣ (جـ) −٥ (د) −٣

(٢٣) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٣ & ٠ & ١ \\ ٢ & -١ & ٠ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ & ٠ \\ ٠ & -٥ & ٤ \end{pmatrix}$ وكان : $أ ب^{مد} + س = \begin{pmatrix} ٦ & ٣ \\ ٥ & ٨ \end{pmatrix}$

فإن : $س = \ldots\ldots$

(أ) $\begin{pmatrix} ٦ & ٤ \\ ١ & ٥ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ١٢ & ٧ \\ ٦ & ١٣ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٠ & ٤ \\ -١ & ٣ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٠ & -١ \\ ٤ & ٣ \end{pmatrix}$

(٢٤) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٢ \\ ٣ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ١ & -٣ \\ ٢ & ٠ \end{pmatrix}$ ، $ج = \begin{pmatrix} ٣ & ١ \end{pmatrix}$ فإن : $أ ج ب = \ldots\ldots$

(أ) $\begin{pmatrix} ١٠ & -١٨ \\ ١٥ & -٢٧ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} -٢١ & -٧ \\ ١٢ & ٤ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٦ & -٦ \\ ١٨ & ٠ \end{pmatrix}$ (د) غير ممكنة.

(٢٥) $\begin{pmatrix} ت^٢ & ٠ \\ -ت & ت \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ت & -ت \\ ٠ & ت \end{pmatrix} = \ldots\ldots$ (حيث $ت^٢ = -١$)

(أ) $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & -١ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ١ & -١ \\ ١ & -٢ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ١ & -١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$ (د) غير ممكنة.

(٢٦) $\begin{pmatrix} حا\,\theta & حتا\,\theta \\ -حتا\,\theta & حا\,\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} حا\,\theta & حتا\,\theta \\ حتا\,\theta & -حا\,\theta \end{pmatrix} = \ldots\ldots$

(أ) I (ب) − I (جـ) $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & -١ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} -١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$

(٢٧) إذا كانت : $س = \begin{pmatrix} ٥ & ٢ \\ -٣ & ١ \end{pmatrix}$ فإن مجموع عناصر المصفوفة $(س س^{مد})$ يساوى ……

(أ) ١٣ (ب) ٢٩ (جـ) ٤٧ (د) ٦٥

(٢٨) إذا كانت المصفوفة $ج = \begin{pmatrix} ٢ & ٢ \\ أ & ب \end{pmatrix}$ وكان $ج^٢ = \square$ فإن : $أ ب = \ldots\ldots$

(أ) صفر (ب) −٤ (جـ) ٤ (د) ١٦

(٢٩) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} س & 0 \\ 0 & ص \end{pmatrix}$ وكان : أ ب = ب أ فإن : ....

(أ) س = ص (ب) س = ٢ ص (جـ) س = ٣ ص (د) س = $\frac{1}{2}$ ص

(٣٠) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} س & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ وكانت : $أ^2 = 9\,I$ فإن : س = ...

(أ) ٤ (ب) ٣

(جـ) -٣ (د) لا توجد قيمة لـ س تحقق $أ^2 = 9\,I$

(٣١) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} 2 & س \\ -س & 2 \end{pmatrix}$ ، $أ^2 = \begin{pmatrix} -5 & 12 \\ -12 & -5 \end{pmatrix}$ فإن : س = ...

(أ) ٣ (ب) -٣ (جـ) ٤ (د) صفر

(٣٢) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$ ، $أ^2 = 8\,أ + ك\,I$ حيث ك عدد صحيح فإن : ك = ...

(أ) -١ (ب) ١ (جـ) -٧ (د) ٧

(٣٣) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} 3 & ك \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} 13 & 11 \\ 11 & 17 \end{pmatrix}$ وكان : $أ \times أ^{مد} = ب$ فإن : ك = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٣٤) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ أ & ب & 0 \end{pmatrix}$ فإن : $أ^2$ = ...

(أ) I (ب) $\square$ (جـ) أ (د) -أ

(٣٥) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ فإن : $أ^2$ = ...

(أ) أ (ب) ٣ أ (جـ) ٤ أ (د) ٥ أ

(٣٦) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ فإن : $أ^5$ = ...

(أ) ٥ أ (ب) ١٠ أ (جـ) ١٦ أ (د) ٣٢ أ

(٣٧) فى محل للكشرى كانت أ مصفوفة تمثل عدد الأطباق المباعة فى ثلاثة أيام متتالية (الأحد والأثنين والثلاثاء) ، ب مصفوفة تمثل سعر كل طبق حسب حجمه (صغير - وسط - كبير) ، جـ مصفوفة تمثل مجموع أثمان كل نوع من الأطباق المباعة خلال الثلاث أيام حيث :

	صغير	وسط	كبير
الأحد	٢٠٠	٣٠٠	١٥٠
الأثنين	٢٥٠	٤٠٠	١٠٠
الثلاثاء	٣٠٠	٤٠٠	٣٠٠

$أ = \begin{pmatrix} 200 & 300 & 150 \\ 250 & 400 & 100 \\ 300 & 400 & 300 \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 25 \end{pmatrix}$ (صغير ، وسط ، كبير) فإن : جـ = ...

(أ) $\begin{pmatrix} 12750 \\ 14250 \\ 20000 \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} 12750 \\ 20000 \\ 14250 \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} 14250 \\ 12750 \\ 20000 \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} 20000 \\ 14250 \\ 12750 \end{pmatrix}$

(٣٨) إذا كانت : $(١ \quad ٢ \quad ١) \begin{pmatrix} ٠ & ٢ & ١ \\ ١ & ٠ & ٢ \\ ٢ & ٠ & ١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٠ \\ ٢ \\ س \end{pmatrix} = \square$ فإن : س = ...

(أ) -٤ (ب) -١ (جـ) ١ (د) ٤

(٣٩) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ١ & -١ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ص & س \\ ل & ع \end{pmatrix}$ وكان : أ × ب = أ − ب فإن : ب = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ٢ & -٣ \\ ٣ & ٦ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٠ & -٥ \\ ٧ & ١ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} -١ & ٢ \\ ١ & -١ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٨ & ٧ \end{pmatrix}$

(٤٠) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} -١ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٤ \\ ٢ \end{pmatrix}$ وكان : أ × س = ب + س

فإن المصفوفة س = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ٦ \\ -١ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٤ \\ ٣ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٢ \\ ٨ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٥ \\ -٤ \end{pmatrix}$

(٤١) إذا كانت : أ = (طا س جا س جتا س) وكان : $أ أ^{مد} = (٢)$ فإن : س = ...

حيث س $\in]\frac{\pi}{٢} ، \pi[$

(أ) $\frac{٥\pi}{٣}$ (ب) $\frac{٣\pi}{٤}$ (جـ) $\frac{٢\pi}{٣}$ (د) $\frac{\pi}{٣}$

(٤٢) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} -٦ & ٧ \\ -٧ & ٨ \end{pmatrix}$ فإن : $أ^{٢٠٢٥} =$ ....

(أ) I (ب) أ (جـ) $\frac{١}{٢} أ^{٢}$ (د) ٢ I

(٤٣) إذا كانت : $س = \begin{pmatrix} جا\theta & ٠ \\ ٠ & جا\theta \end{pmatrix}$ حيث $٠ < \theta < \frac{\pi}{٢}$ وكانت $س^{٢} = \frac{١}{٢} I$

فإن قيمة θ التى تحقق ذلك = ...

(أ) $\frac{\pi}{١٢}$ (ب) $\frac{\pi}{٦}$ (جـ) $\frac{\pi}{٤}$ (د) $\frac{\pi}{٣}$

(٤٤) إذا كانت أ ، ب ، جـ ثلاث مصفوفات مربعة من نفس النظم :

(١) إذا كان : أ = ب فإن : أ جـ = ب جـ (٢) إذا كان : أ جـ = ب جـ فإن : أ = ب

أى الخيارات الآتية صحيحة ؟

(أ) (١) صحيح بينما (٢) خطأ. (ب) (١) خطأ بينما (٢) صحيح.

(جـ) كل من (١) ، (٢) صحيح. (د) كل من (١) ، (٢) خطأ.

(٤٥) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} -١ & ٢ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ وكانت الدالة د معرفة على مجموعة المصفوفات المربعة حيث

د (س) = (س + I) (س − I) فإن : د (أ) = ...

(أ) $\begin{pmatrix} -١ & ١ \\ -٢ & ٢ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} -٢ & ٢ \\ -٢ & ٢ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ -١ & ١ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & -٢ \end{pmatrix}$

(٤٦) إذا كانت أ مصفوفة مربعة بحيث كان : $أ^{٢} - أ = I$ فإن : $أ^{٣} =$ ....

(أ) أ + ٢ I (ب) ٢ أ + I (جـ) ٣ أ + I (د) أ + ٣ I

(٤٧) إذا كانت أ مصفوفة مربعة حيث : $أ^{٢} = أ$ فإن : $(I + أ)^{٢} =$ ....

(أ) أ + ٢ I (ب) I + ٢ أ (جـ) ٣ أ + I (د) ٣ I + أ

(٤٨) إذا كانت أ ، ب مصفوفتان على النظم ٢ × ٢ أى مما يأتى يكون صحيح دائمًا ؟

(أ) $(أ + ب)(أ - ب) = أ^{٢} - ب^{٢}$ (ب) $(أ + ب)^{٢} = أ^{٢} + ٢ أ ب + ب^{٢}$

(جـ) $(أ + ب)^{مد} = أ^{مد} + ب^{مد}$ (د) $(أ ب)^{مد} = أ^{مد} ب^{مد}$

(٤٩) إذا كانت أ مصفوفة مربعة بحيث $أ^{٢} = أ$ فإن لكل م عدد طبيعى يكون $أ^{م + ١} =$ ....

(أ) I (ب) $\square$ (جـ) أ (د) − أ

(٥٠) إذا كانت أ مصفوفة مربعة حيث $أ^{٢} = I$ فإن : $أ^{م} = أ$ عندما م عدد ....

(أ) طبيعى. (ب) طبيعى زوجى.

(جـ) طبيعى فردى. (د) طبيعى يقبل القسمة على ٣

(٥١) إذا كانت أ مصفوفة وكان : $ب = أ أ^{مد}$ فإن ب تكون ....

(أ) متماثلة. (ب) شبه متماثلة.

(جـ) مصفوفة الوحدة I (د) المصفوفة الصفرية $\square$

(٥٢) إذا كانت كل من أ ، ب مصفوفة متماثلة فإن المصفوفة (أ ب أ) تكون ....

(أ) متماثلة. (ب) شبه متماثلة. (جـ) قطرية. (د) مثلثية.

(٥٣) إذا كانت أ ، ب مصفوفتان متماثلتان فإن المصفوفة (أ ب − ب أ) تكون ....

(أ) متماثلة. (ب) شبه متماثلة. (جـ) قطرية. (د) صفرية.

(٥٤) إذا كانت أ ، ب مصفوفتين متماثلتين فإن (أ ب) مصفوفة متماثلة إذا كان ....

(أ) أ ب = I (ب) أ = ب (جـ) أ ب = ب أ (د) جميع ما سبق.

(٥٥) إذا كانت المصفوفة $(أ^{مد} ب أ)$ متماثلة فإن ذلك يشترط أن تكون ....

(أ) أ متماثلة. (ب) أ شبه متماثلة.

(جـ) ب متماثلة. (د) ب شبه متماثلة.

(٥٦) إذا كانت : أ × $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٤ & ١ & ٠ \end{pmatrix}$ × أ = ب فإن كلًا من المصفوفتين أ ، ب على النظم ....

(أ) ٢ × ٢ (ب) ٣ × ٣ (جـ) ٢ × ٣ (د) ٣ × ٢

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد مصفوفة حاصل الضرب فى كل مما يأتى (إن أمكن) مبينًا نظم المصفوفة الناتجة :

(١) $\begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ٤ & ٣ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ -١ & ٥ \end{pmatrix}$

(٢) $\begin{pmatrix} ٢ & -٣ \\ ٤ & ٥ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٣ \\ ٢ & ١ & ٠ \end{pmatrix}$

(٣) $\begin{pmatrix} ٤ & ٠ & ٢ \\ -١ & ١ & ٥ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -٢ \\ ٠ \\ ١ \end{pmatrix}$

(٤) $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -٢ \\ ٥ \end{pmatrix}$

(٥) $\begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & ٣ \\ ٤ & -٢ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٣ & ٠ \\ ٠ & ٢ \end{pmatrix}$

(٦) $\begin{pmatrix} ١ \\ ٢ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix}$

(٧) $\begin{pmatrix} ٠ & ١ & ٢ \\ ١ & ٢ & ٠ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ -١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$

(٨) $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ -١ & ٥ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$

(٩) $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ -١ & -٢ & -٣ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ -٢ & -٣ \end{pmatrix}$

(١٠) $\begin{pmatrix} ٥ \\ -٦ \\ ٨ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٤ & ٢ & -١ \end{pmatrix}$

(١١) $\begin{pmatrix} ٥ & ٨ & -٤ \\ ٦ & ٩ & -٥ \\ ٤ & ٧ & -٣ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ٥ \\ ٤ & -١ & ٣ \\ ٩ & ٦ & ٥ \end{pmatrix}$

(١٢) $\begin{pmatrix} ٤ & ٣ \\ ٧ & ٥ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -٢ & ٩ \\ ٣ & -١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٧ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix}$

---

٢ إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٦ & ٢ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} -١ & ٣ \\ ٣ & ٩ \end{pmatrix}$ فأوجد كلًا مما يأتى :

(١) أ ب (٢) ب أ (٣) (أ + ب) أ

---

٣ إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ٤ & ٥ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} -٣ & ٠ \\ ٧ & ٦ \end{pmatrix}$ فأوجد : أ ب ، $\text{أ}^{٢}$ ، $\text{أ}^{\text{مد}}\,\text{ب}$

---

٤ إذا كانت : $\text{س} = \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix}$ ، $\text{ص} = \begin{pmatrix} ٢ & ٢ \\ ٣ & ٣ \end{pmatrix}$ فأوجد قيمة : $\text{س}^{٢} - \text{ص}^{٢}$

---

٥ إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ١ \\ ١ & ٥ & ٦ \\ -١ & ٣ & ٤ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} -٢ & ٥ & -٧ \\ ١٠ & -٥ & ٥ \\ -٨ & ٥ & -٣ \end{pmatrix}$

فأثبت أن : $\text{أ ب} = ١٠\ I$

---

٦ إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٤ & ١ \\ -١ & ٠ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} -١ & ٥ \\ ٢ & ٠ \end{pmatrix}$ حقق أن : $(\text{أ ب})^{\text{مد}} = \text{ب}^{\text{مد}}\,\text{أ}^{\text{مد}}$

٧ إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & -٣ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} -١ & ٠ \\ ٢ & -٣ \end{pmatrix}$ ، $ج = \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$

فحقق أن : $أ (ب + ج) = أ ب + أ ج$

---

٨ إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٣ & -٢ \\ ٠ & ٢ \\ -١ & ٤ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٣ & -١ \\ ٥ & ٧ \end{pmatrix}$ ، $ج = \begin{pmatrix} ٤ & ٠ & ٣ \\ ٥ & ٢ & -١ \end{pmatrix}$

فحقق كلاً مما يأتي : (١) $(أ ب) ج = أ (ب ج)$ (٢) $ب I = I ب = ب$

---

٩ إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & -١ \end{pmatrix}$ ، $(أ + ب)^{مد} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ -١ & ٠ \end{pmatrix}$ فأوجد : $(أ^{مد} ب)^{مد}$

---

١٠ إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ١ & ١ & -١ \\ ٢ & -٣ & ٤ \\ ٣ & -٢ & ٣ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} -١ & -٢ & -١ \\ ٦ & ١٢ & ٦ \\ ٥ & ١٠ & ٥ \end{pmatrix}$

فبيّن أن : أ ب = ☐ بينما ب أ ≠ ☐

---

١١ إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} -١ & ٢ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٢ & -٣ \\ ٤ & ٠ \end{pmatrix}$ ، $ج = \begin{pmatrix} ٠ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}$

حقق أن : $(أ ب ج)^{مد} = ج^{مد} ب^{مد} أ^{مد}$

---

١٢ إذا كانت : $أ^{مد} = \begin{pmatrix} ٢ & -٤ \\ ٤ & ٣ \end{pmatrix}$ فأثبت أن : $أ^٢ - ٥ أ + ٢٢ I =$ ☐

---

١٣ أوجد س ، ص ، ع التي تحقق : $\begin{pmatrix} س & -١ \\ ١ & ص \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١ & ٢ & -٣ \\ ٢ & -١ & ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ع & -١٣ \\ ٥ & ٠ & ٥ \end{pmatrix}$ «٣ ، ٢ ، ٧»

---

١٤ إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ س & ص \end{pmatrix}$

أوجد قيمة كل من س ، ص التي تجعل : أ ب = ب أ «٠ ، ٢»

---

١٥ إذا كانت : $م = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}$ أوجد قيمة كل من س ، ص التي تحقق المعادلة :

$م^٢ - س م + ص I =$ ☐ «٤ ، ٣»

---

١٦ إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ١٣ & ٧ \\ -١ & ٨ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} -٣ & ٤ & ٥ \\ ٩ & ٠ & ٧ \end{pmatrix}$ ، $ج = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ -١ & ٤ \\ ٢ & ٥ \end{pmatrix}$

فأوجد المصفوفة س التي تحقق العلاقة : $٢ س^{مد} = أ^٢ + (ب ج)^{مد}$

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

1 اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت : س = $\begin{pmatrix} جتا θ \\ جا θ \end{pmatrix}$ ، ص = $\begin{pmatrix} جا θ \\ -جتا θ \end{pmatrix}$ فإن : س س^{مد} + ص ص^{مد} = ...

(أ) $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} \cdot & ١ \\ ١ & \cdot \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ١ & \cdot \\ \cdot & ١ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & ١ \end{pmatrix}$

(٢) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ١ & ١ \\ \cdot & ١ \end{pmatrix}$ وكان : أ^{٢٧} = $\begin{pmatrix} أ & ب \\ حـ & ء \end{pmatrix}$ فإن : أ + ب + حـ + ء = ...

(أ) ١٩ (ب) ٢٧ (جـ) ٢٩ (د) ٣٦

(٣) إذا كانت ل ، م هما جذرا المعادلة س^٢ − ٣ س + ١ = ٠

فإن : $\begin{pmatrix} ٣ & ل \\ ل & ٢ \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} ٢ & م \\ م & ٣ \end{pmatrix}$ = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ٦ & ٣ \\ ٢ & ٦ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٧ & ٩ \\ ٦ & ٧ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ -٣ & ١ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٢ & ٦ \\ ٣ & -٢ \end{pmatrix}$

(٤) إذا كانت كل من المصفوفتين أ ، ب ليست مصفوفة صف أو مصفوفة عمود وكان عدد عناصر المصفوفة أ = ١٠ وعدد عناصر المصفوفة ب = ٦ وكان : أ ب ممكن فإن عدد عناصر المصفوفة (أ ب) يساوى ....

(أ) ٦٠ (ب) ١٦ (جـ) ١٥ (د) ٦

(٥) إذا كانت أ ، ب مصفوفتين مربعتين على نفس النظم فإن : (أ + ب)^٢ = أ^٢ + ٢ أ ب + ب^٢ إذا كان ....

(أ) أ ب = ب أ (ب) أ = − ب (جـ) أ = ب^{مد} (د) ٢ أ = − ب

(٦) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ١ & ك \\ \cdot & ١ \end{pmatrix}$ فإن : أ^ن = ... حيث ن عدد صحيح موجب.

(أ) $\begin{pmatrix} ١ & ن ك \\ \cdot & ١ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ن & ن ك \\ \cdot & ن \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ن & ك^ن \\ \cdot & ن \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ١ & ك^ن \\ \cdot & ١ \end{pmatrix}$

(٧) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ت & \cdot \\ \cdot & ت \end{pmatrix}$ ، ن ∈ ص$_+$ فإن : أ^{٤ن} = ...

(أ) I (ب) $\begin{pmatrix} ت & \cdot \\ \cdot & ت \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} \cdot & ت \\ ت & \cdot \end{pmatrix}$ (د) ☐

(٨) إذا كان : أ ب = ☐ فإن : ....

(أ) أ = ☐ أ، ب = ☐ (ب) أ = ☐ و ب = ☐

(جـ) ليس من الضرورى أن يكون أ = ☐ أ، ب = ☐ (د) جميع ما سبق خطأ

(٩) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ١ \end{pmatrix}$ وكان : $أ^{س}$ = $\begin{pmatrix} ٣٢ & ٣٢ \\ ٣٢ & ٣٢ \end{pmatrix}$ فإن : س = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

(١٠) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٢ × ٢ وكان : $أ^{٢}$ = ٣ أ + ٢ I ، $أ^{٣}$ = م أ + ل I

فإن : م + ل = ...

(أ) ٢٠ (ب) ١٧ (جـ) ١١ (د) ٦

(١١) إذا كانت أ مصفوفة مربعة على النظم ٢ × ٢ ، أ × $\begin{pmatrix} ١ \\ ٢ \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ٤ \\ -٣ \end{pmatrix}$ ، أ × $\begin{pmatrix} -١ \\ ١ \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} -١ \\ -٣ \end{pmatrix}$

فإن : أ × $\begin{pmatrix} ٣ \\ -٢ \end{pmatrix}$ = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ٦ \\ ٧ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٤ \\ ٧ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} -٤ \\ ٣ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} -٤ \\ ٤ \end{pmatrix}$

---

٢ إذا كان : $ب^{مد}$ + $جـ^{مد}$ = $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ -٣ & ٠ \end{pmatrix}$ ، أ = $\begin{pmatrix} -١ & ٠ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}$

فأوجد المصفوفة س التى تحقق أن : س = $(أ ب + أ جـ)^{مد}$

---

٣ إذا كانت : س = $\begin{pmatrix} أ & ٠ \\ ١ & ب \end{pmatrix}$ **أوجد أ ، ب إذا كان : $س^{٢}$ + س = ☐**

---

٤ إذا كانت : س ، ص ، ع مصفوفات غير صفرية مربعة وكان : ع = $ص^{مد}$ $س^{مد}$ + س ص

فأثبت أن : ع مصفوفة متماثلة.

---

٥ إذا كانت : س = $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & -١ \end{pmatrix}$ **فأثبت أن : $س^{٢٠١٤}$ = I**

تطبيق حياتى

الربط بالسياحة : لدى شركة سياحية ٣ فنادق بمدينة الغردقة ، يبين الجدول المقابل عدد الغرف المختلفة فى كل فندق ، فإذا كانت الأجرة اليومية للغرفة التى تحتوى على سرير واحد ٢٥٠ جنيهًا ، وللغرفة التى تحتوى على سريرين ٤٥٠ جنيهًا ، وللجناح ٦٠٠ جنيه.

الفندق	غرفة بسرير	غرفة بسريرين	جناح
الزهرة	٢٨	٦٤	٨
اللؤلؤة	٣٥	٩٥	٢٠
الماسة	٢٠	٨٠	١٥

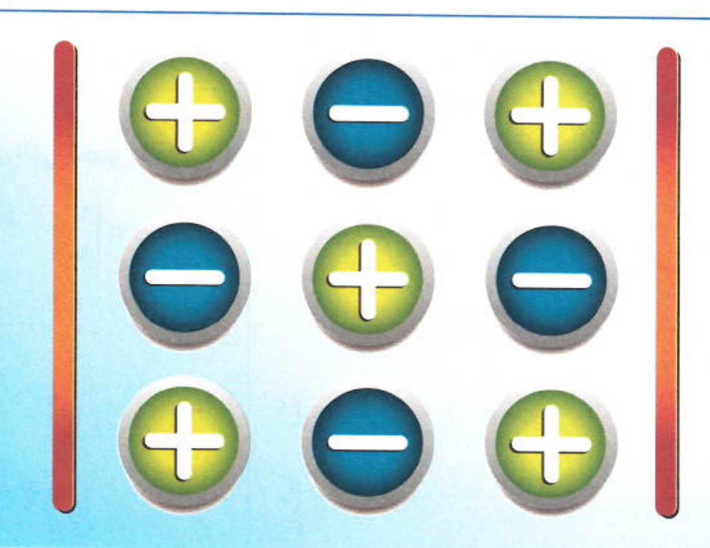
(١) اكتب مصفوفة تمثل عدد الغرف المختلفة فى الثلاثة فنادق ، ثم اكتب مصفوفة أسعار الغرف.

(٢) اكتب مصفوفة تمثل الدخل اليومى للشركة ، على فرض أن جميع الغرف تم شغلها.

(٣) ما الدخل اليومى للشركة على فرض أن جميع الغرف تم شغلها ؟ «١٥٤١٠٠»

الدرس 4

المحـــــــددات



محدد الرتبة الثانية

إذا كانت : أ مصفوفة مربعة على النظم ٢ × ٢ حيث أ = $\begin{pmatrix} أ & ب \\ حـ & ء \end{pmatrix}$

فإن : محدد المصفوفة أ يرمز له بالرمز |أ|

ويسمى بمحدد الرتبة الثانية وهو العدد المعرف كالآتى : $|أ| = \begin{vmatrix} أ & ب \\ حـ & ء \end{vmatrix} = أ ء - حـ ب$

أى أن : قيمة محدد الرتبة الثانية تساوى حاصل ضرب عنصرى القطر الرئيسى مطروحًا منه حاصل ضرب عنصرى القطر الآخر.

مثال ١

أوجد قيمة كل من المحددات الآتية :

١ $\begin{vmatrix} ٢ & ٥ \\ ٣ & ٨ \end{vmatrix}$ ٢ $\begin{vmatrix} ٤ & -٧ \\ ٢ & ٦ \end{vmatrix}$ ٣ $\begin{vmatrix} ٦ & ٣ \\ -٨ & -٤ \end{vmatrix}$ ٤ $\begin{vmatrix} \text{حا}\,\theta & \text{حتا}\,\theta \\ -\text{حتا}\,\theta & \text{حا}\,\theta \end{vmatrix}$

الحل

١ $\begin{vmatrix} ٢ & ٥ \\ ٣ & ٨ \end{vmatrix} = ٢ \times ٨ - ٣ \times ٥ = ١٦ - ١٥ = ١$

٢ $\begin{vmatrix} ٤ & -٧ \\ ٢ & ٦ \end{vmatrix} = ٤ \times ٦ - ٢ \times (-٧) = ٢٤ + ١٤ = ٣٨$

٣ $\begin{vmatrix} ٦ & ٣ \\ -٨ & -٤ \end{vmatrix} = ٦ \times (-٤) - (-٨) \times ٣ = -٢٤ + ٢٤ =$ صفر

٤ $\begin{vmatrix} \text{حا}\,\theta & \text{حتا}\,\theta \\ -\text{حتا}\,\theta & \text{حا}\,\theta \end{vmatrix} = \text{حا}\,\theta \times \text{حا}\,\theta - (-\text{حتا}\,\theta) \times \text{حتا}\,\theta = \text{حا}^٢\,\theta + \text{حتا}^٢\,\theta = ١$

حاول بنفسك

أوجد قيمة كل محدد مما يلى : (١) $\begin{vmatrix} ٣ & ٧ \\ ٠ & -٤ \end{vmatrix}$ (٢) $\begin{vmatrix} -١ & ٣ \\ -٥ & -٢ \end{vmatrix}$

مثال ٢

أوجد قيمة س التى تحقق كلاً من المعادلتين الآتيتين :

(١) $\begin{vmatrix} س^٢ - ٤ & ١ \\ ٠ & ١ \end{vmatrix} =$ صفر (٢) $\begin{vmatrix} س + ٢ & ٣ \\ -٢ & س - ٢ \end{vmatrix} = ١$

الحل

(١) ∵ $\begin{vmatrix} س^٢ - ٤ & ١ \\ ٠ & ١ \end{vmatrix} = (س^٢ - ٤) \times ١ - ٠ \times ١ = س^٢ - ٤$

∴ $س^٢ - ٤ = ٠$ ∴ $س^٢ = ٤$ ∴ $س = \pm\sqrt{٤} = \pm ٢$

(٢) ∵ $\begin{vmatrix} س + ٢ & ٣ \\ -٢ & س - ٢ \end{vmatrix} = (س + ٢)(س - ٢) - (-٢) \times ٣ = س^٢ - ٤ + ٦ = س^٢ + ٢$

∴ $س^٢ + ٢ = ١$ ∴ $س^٢ = -١$ ∴ $س = \pm\sqrt{-١}$

∴ س = ت أ، س = − ت (حيث : $ت^٢ = -١$)

حاول بنفسك

أوجد قيمة س التى تحقق المعادلة : $\begin{vmatrix} ٢ س & -٢ \\ ٤ & ١ \end{vmatrix} = ٦$

محدد الرتبة الثالثة

إذا كانت : أ مصفوفة مربعة على النظم ٣ × ٣ حيث أ = $\begin{pmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} & أ_{٣١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} & أ_{٣٢} \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} & أ_{٣٣} \end{pmatrix}$

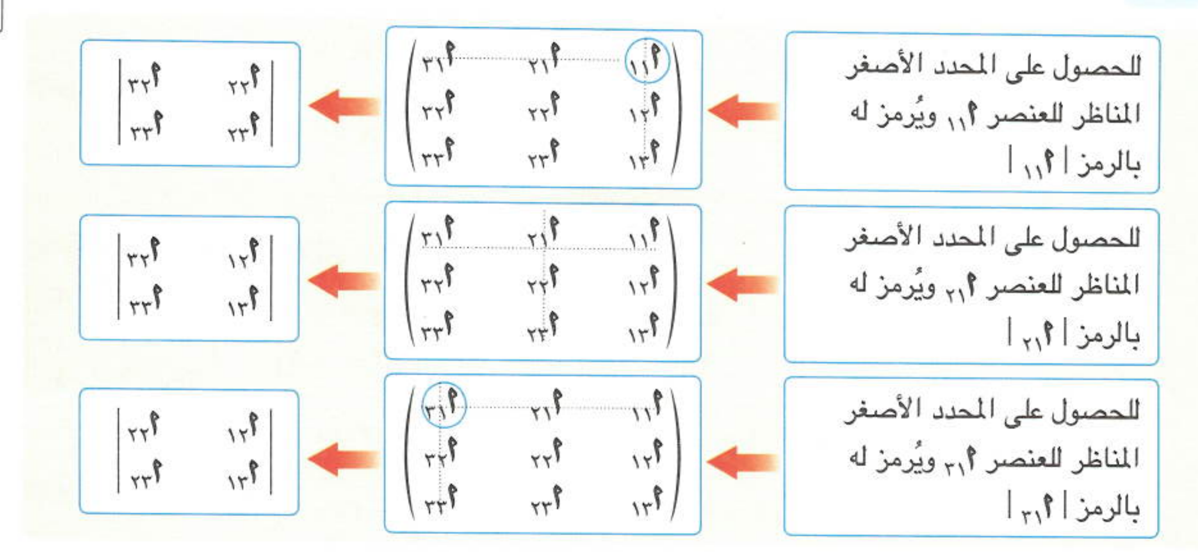
فإن : محدد المصفوفة أ يرمز له بالرمز | أ |

ويُسمى بمحدد الرتبة الثالثة حيث : $|أ| = \begin{vmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} & أ_{٣١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} & أ_{٣٢} \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} & أ_{٣٣} \end{vmatrix}$

وقبل التعرف على كيفية فك محدد الرتبة الثالثة سنتعرف أولاً على «**المحدد الأصغر**» المناظر لأى عنصر فى المصفوفة أ وكيفية تحديد إشارته.

لكل عنصر فى المصفوفة أ محدد أصغر يمكن الحصول عليه بحذف الصف والعمود المتقاطعين على هذا العنصر.

فمثلًا يمكن الحصول على المحدد الأصغر المناظر لكل عنصر من عناصر الصف الأول كما يلى :



- ويمكن تحديد إشارة أى محدد أصغر لعنصر ما فى المصفوفة بأن :

نجمع رتبة الصف ورتبة العمود الذين يتقاطعان عند هذا العنصر فإذا كان مجموع الرتبتين :

– **زوجيًا** : كانت الإشارة موجبة. – **فرديًا** : كانت الإشارة سالبة.

فمثلًا

– إشارة $|أ_{١١}|$ موجبة لأن : ١ + ١ = ٢ (زوجى)

– إشارة $|أ_{٢١}|$ سالبة لأن : ١ + ٢ = ٣ (فردى)

– إشارة $|أ_{٣١}|$ موجبة لأن : ١ + ٣ = ٤ (زوجى)

لاحظ أن

إشارة المحدد الأصغر المناظر للعنصر $أ_{ص ع}$ تتعين بالقاعدة : $(-١)^{ص + ع}$

- وعلى هذا يمكن كتابة قاعدة الإشارات للمحدد الأصغر كما بالشكل المقابل :

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

فك محدد الرتبة الثالثة

يمكن فك محدد الرتبة الثالثة بدلالة عناصر أى صف أو أى عمود ومحدداتها الصغرى وباستخدام قاعدة الإشارات السابق ذكرها.

فمثلًا إذا كان : $|أ| = \begin{vmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} & أ_{٣١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} & أ_{٣٢} \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} & أ_{٣٣} \end{vmatrix}$ فإن :

- $|أ| = أ_{١١} \begin{vmatrix} أ_{٢٢} & أ_{٣٢} \\ أ_{٢٣} & أ_{٣٣} \end{vmatrix} - أ_{٢١} \begin{vmatrix} أ_{١٢} & أ_{٣٢} \\ أ_{١٣} & أ_{٣٣} \end{vmatrix} + أ_{٣١} \begin{vmatrix} أ_{١٢} & أ_{٢٢} \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} \end{vmatrix}$ (باستخدام عناصر الصف الأول)

- $|أ| = -أ_{٢١} \begin{vmatrix} أ_{١٢} & أ_{٣٢} \\ أ_{١٣} & أ_{٣٣} \end{vmatrix} + أ_{٢٢} \begin{vmatrix} أ_{١١} & أ_{٣١} \\ أ_{١٣} & أ_{٣٣} \end{vmatrix} - أ_{٢٣} \begin{vmatrix} أ_{١١} & أ_{٣١} \\ أ_{١٢} & أ_{٣٢} \end{vmatrix}$ (باستخدام عناصر العمود الثانى)

مثـــال ٣

أوجد قيمة المحدد : $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}$

الحـل

باستخدام عناصر الصف الأول نجد أن :

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2\left(0 \times (-3) - 1 \times 4\right) - 3\left(-2 \times (-3) - 1 \times 4\right) - \left(-2 \times 1 - 1 \times 0\right)$$

$$= 2\left(0 - 4\right) - 3\left(6 - 4\right) - \left(-2 - 0\right) = 2 \times (-4) - 3 \times 2 + 2 = -12$$

مـلاحظـة

يمكن فك المحدد باستخدام أى صف أو أى عمود كما ذكرنا وسوف نقوم هنا بفكه مرة أخرى باستخدام عناصر العمود الثانى مع مراعاة قاعدة الإشارات.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + \text{صفر}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -3\left(-2 \times (-3) - 1 \times 4\right) + \text{صفر} - \left(2 \times 4 - (-2) \times (-1)\right)$$

$$= -3\left(6 - 4\right) - \left(8 - 2\right) = -3 \times 2 - 6 = -12$$

وهى نفس النتيجة التى حصلنا عليها سابقًا (حاول بنفسك استخدام أى صف أو أى عمود آخر)

مثـــال ٤

أوجد قيمة المحدد : $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & -3 & -1 \end{vmatrix}$

الحـل

يفضل فك هذا المحدد بدلالة عناصر العمود الأول لوجود أكبر عدد من الأصفار

$\therefore$ قيمة المحدد $= 4\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} - \text{صفر}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} + \text{صفر}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}$

$$= 4\left(5 \times (-1) - (-3) \times (-2)\right) - \text{صفر} + \text{صفر} = 4\left(-5 - 6\right) = 4 \times (-11) = -44$$

حاول بنفسك

أوجد قيمة المحدد : $\begin{vmatrix} 3 & 0 & -5 \\ -2 & 4 & 1 \\ 7 & -3 & 6 \end{vmatrix}$

بعض خواص المحــددات

١ لا تتغير قيمة المحدد عند تبديل صفوف المحدد بأعمدته المناظرة بنفس الترتيب.

• **وبمعنى آخر :** قيمة محدد المصفوفة المربعة تساوى قيمة محدد مدور هذه المصفوفة.

أى أن : إذا كانت : أ مصفوفة مربعة فإن : $|أ| = |أ^{مد}|$

فمثلًا : $\begin{vmatrix} ١ & -٣ & ٥ \\ ٤ & ٠ & ٧ \\ ٨ & ١٤ & -٣ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & ٤ & ٨ \\ -٣ & ٠ & ١٤ \\ ٥ & ٧ & -٣ \end{vmatrix}$

ويمكن التحقق من ذلك بإيجاد مفكوك كل من المحددين كالآتى :

$\begin{vmatrix} ١ & -٣ & ٥ \\ ٤ & ٠ & ٧ \\ ٨ & ١٤ & -٣ \end{vmatrix} = ١ \times -٩٨ + ٣ \times (-٦٨) + ٥ \times ٥٦ = -٢٢$

(باستخدام عناصر الصف الأول)

$\begin{vmatrix} ١ & ٤ & ٨ \\ -٣ & ٠ & ١٤ \\ ٥ & ٧ & -٣ \end{vmatrix} = ١ \times -٩٨ - ٤ \times (-٦١) + ٨ \times (-٢١) = -٢٢$

(باستخدام عناصر الصف الأول)

٢ قيمة المحدد تنعدم فى الحالتين الآتيتين :

(١) إذا كانت جميع عناصر أى صف (عمود) من المحدد تساوى صفر

فمثلًا : قيمة المحدد $\begin{vmatrix} ٢ & ١ & ٠ \\ ٤ & -٣ & ٠ \\ -١ & ٥ & ٠ \end{vmatrix}$ = صفر لأن جميع عناصر العمود الثالث $(ع_٣)$ أصفار

(٢) إذا تساوت العناصر المتناظرة فى أى صفين (عمودين) فى المحدد :

فمثلًا : $\begin{vmatrix} ٢ & ١ & ٣ \\ ٤ & -٣ & ٥ \\ ٢ & ١ & ٣ \end{vmatrix}$ = صفر لتساوى العناصر المتناظرة فى الصفين الأول والثالث

، واختصارًا تكتب لأن $(ص_١ = ص_٣)$

٣ إذا وجد عامل مشترك فى جميع عناصر صف (عمود) فى محدد فإن هذا العامل يمكن أخذه خارج المحدد.

فمثلًا : إذا كان $|أ| = \begin{vmatrix} ٢ & ٣ & ١ \\ ٤ & ٦ & ٢ \\ ٧ & ٥ & ٣ \end{vmatrix}$ بأخذ ٢ عامل مشترك من عناصر الصف الثانى $(ص_٢)$

$\therefore |أ| = ٢ \begin{vmatrix} ٢ & ٣ & ١ \\ ٢ & ٣ & ١ \\ ٧ & ٥ & ٣ \end{vmatrix}$ وبملاحظة تساوى عناصر الصفين الأول والثانى $(ص_١ = ص_٢)$

$\therefore |أ| = ٢ \times$ صفر = صفر

ملاحظات

١ من الخاصية (٣) نجد أن : ضرب المحدد فى عدد حقيقى $\text{ك} \neq ٠$ فإننا نضرب هذا العدد فى عناصر أى صف (عمود) واحد فقط.

فمثلًا : $\text{ك} \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{د} & \text{هـ} & \text{و} \\ \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ك أ} & \text{ك ب} & \text{ك جـ} \\ \text{د} & \text{هـ} & \text{و} \\ \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ك ب} & \text{جـ} \\ \text{د} & \text{ك هـ} & \text{و} \\ \text{س} & \text{ك ص} & \text{ع} \end{vmatrix} = \text{.............}$ وهكذا

٢ تنعدم قيمة المحدد إذا كانت عناصر أى صف (عمود) مضاعفات لعناصر صف (عمود) آخر فى المحدد

فمثلًا : قيمة المحدد $\begin{vmatrix} ٣ & ٣ & ١ \\ -٦ & -١ & -٢ \\ ١٥ & ٦ & ٥ \end{vmatrix} =$ صفر

لأن كل عنصر فى العمود الأول ٣ أمثال نظيره من العمود الثالث واختصارًا تكتب ($\text{ع}_{١} = ٣\ \text{ع}_{٣}$)

٤ إذا بدلنا موضعى صفين (عمودين) فإن : قيمة المحدد الناتج = − قيمة المحدد الأصلى.

فمثلًا : إذا كانت $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{د} & \text{هـ} & \text{و} \\ \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \end{vmatrix} = ١٠$ فإذا بدلنا موضعى الصفين الأول والثانى ($\text{ص}_{١}$ ، $\text{ص}_{٢}$)

فإن : $\begin{vmatrix} \text{د} & \text{هـ} & \text{و} \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \end{vmatrix} = -١٠$

أى أن : $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{د} & \text{هـ} & \text{و} \\ \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \text{د} & \text{هـ} & \text{و} \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \end{vmatrix}$

ويمكن إثبات ذلك بإيجاد قيمة المحدد بفكه فى الحالتين.

محدد المصفوفة المثلثة

المصفوفة المثلثة

هى مصفوفة جميع عناصرها التى تحت القطر الرئيسى (أو فوقه) أصفار.

مثل : $\begin{pmatrix} ٢ & -٥ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} -١ & ٠ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} -١ & ٢ & ٥ \\ ٠ & ٣ & -٢ \\ ٠ & ٠ & ٦ \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} ٢ & ٠ & ٠ \\ -١ & -٣ & ٠ \\ ٤ & ٢ & ٧ \end{pmatrix}$

> قيمة محدد المصفوفة المثلثة تساوى حاصل ضرب عناصر قطرها الرئيسى.

أى أن $\begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} \\ ٠ & \text{أ}_{٢٢} \end{vmatrix} = \text{أ}_{١١}\,\text{أ}_{٢٢}$ ، $\begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٣١} \\ ٠ & \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{٣٢} \\ ٠ & ٠ & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix} = \text{أ}_{١١}\,\text{أ}_{٢٢}\,\text{أ}_{٣٣}$

الإثبات $\begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} \\ ٠ & \text{أ}_{٢٢} \end{vmatrix} = \text{أ}_{١١}\,\text{أ}_{٢٢} - ٠ \times \text{أ}_{٢١} = \text{أ}_{١١}\,\text{أ}_{٢٢} - ٠ = \text{أ}_{١١}\,\text{أ}_{٢٢}$

، $\begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٣١} \\ ٠ & \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{٣٢} \\ ٠ & ٠ & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix} = \text{أ}_{١١} \begin{vmatrix} \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{٣٢} \\ ٠ & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix} - \text{صفر} \begin{vmatrix} \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٣١} \\ ٠ & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix} + \text{صفر} \begin{vmatrix} \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٣١} \\ \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{٣٢} \end{vmatrix}$ باستخدام عناصر العمود الأول

$= \text{أ}_{١١}\,(\text{أ}_{٢٢}\,\text{أ}_{٣٣} - \text{أ}_{٣٢} \times ٠) = \text{أ}_{١١}\,\text{أ}_{٢٢}\,\text{أ}_{٣٣}$

وعلى هذا فإن : $\begin{vmatrix} ٥ & ٠ \\ -٣ & ٢ \end{vmatrix} = ١٠$ ، $\begin{vmatrix} ٢ & ٠ & ٠ \\ -١ & -٣ & ٠ \\ ٤ & ٢ & ٧ \end{vmatrix} = ٢ \times (-٣) \times ٧ = -٤٢$

تحقق من فهمك

أوجد قيمة المحدد : $\begin{vmatrix} -١ & ٢ & ٥ \\ ٠ & ٣ & -٢ \\ ٠ & ٠ & ٦ \end{vmatrix}$

مثال ٥

حل المعادلة الآتية : $\begin{vmatrix} \text{س} & ٠ & ١ \\ ٨ & ١ - \text{س} & -\text{س} \\ \text{س} & -١ & ١ + \text{س} \end{vmatrix} = \text{صفر}$

الحل

بفك المحدد :

$\therefore \text{س} \begin{vmatrix} ١ - \text{س} & -\text{س} \\ -١ & ١ + \text{س} \end{vmatrix} - \text{صفر} \begin{vmatrix} ٨ & -\text{س} \\ \text{س} & ١ + \text{س} \end{vmatrix} + ١ \begin{vmatrix} ٨ & ١ - \text{س} \\ \text{س} & -١ \end{vmatrix} = \text{صفر}$

$\therefore \text{س} \left[(١ - \text{س})(١ + \text{س}) - (-\text{س} \times -١)\right] - \text{صفر} + ١ \left[٨ \times -١ - (١ - \text{س}) \times \text{س}\right] = \text{صفر}$

$\therefore \text{س}\,(١ - \text{س}^{٢} - \text{س}) + ١\,(-٨ - \text{س} + \text{س}^{٢}) = \text{صفر}$

$\therefore \text{س} - \text{س}^{٣} - \text{س}^{٢} - ٨ - \text{س} + \text{س}^{٢} = \text{صفر}$

$\therefore -\text{س}^{٣} - ٨ = \text{صفر}$ $\quad \therefore \text{س}^{٣} = -٨$ $\quad \therefore \boxed{\text{س} = -٢}$

حاول بنفسك

حل المعادلة : $\begin{vmatrix} \text{س} & ٢ & -٢ \\ ٢ & \text{س} & -٢ \\ -٢ & ٢ & \text{س} \end{vmatrix} = ٠$

مثال ٦

إذا كانت : أ مصفوفة على النظم ٢ × ٢ وكان : | أ | = ٧ **أوجد :** | ٣ أ |

الحل

نفرض أن : أ = $\begin{pmatrix} س & ص \\ ع & ل \end{pmatrix}$ ∴ | أ | = س ل − ص ع = ٧ (١)

، ٣ أ = ٣ $\begin{pmatrix} س & ص \\ ع & ل \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ٣س & ٣ص \\ ٣ع & ٣ل \end{pmatrix}$

∴ | ٣ أ | = $\begin{vmatrix} ٣س & ٣ص \\ ٣ع & ٣ل \end{vmatrix}$ = ٩ س ل − ٩ ص ع = ٩ (س ل − ص ع) (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن : | ٣ أ | = ٩ × ٧ = ٦٣

- **من المثال السابق يمكن استنتاج الملاحظات التالية :**

ملاحظات

١ إذا كان : أ مصفوفة على النظم ن × ن ، ك ∈ ح فإن : | ك أ | = $ك^ن$ | أ |

فمثلاً :

* إذا كان : أ مصفوفة على النظم ٢ × ٢ وكان : | أ | = ٣

فإن : | ٥ أ | = $٥^٢$ × | أ | = ٢٥ × ٣ = ٧٥

* إذا كان : أ مصفوفة على النظم ٣ × ٣ وكان : | أ | = ٥

فإن : | ٢ أ | = $٢^٣$ × | أ | = ٨ × ٥ = ٤٠

٢ إذا كان : أ ، ب مصفوفتين مربعتين بحيث : أ ب موجودة فإن : | أ ب | = | أ | × | ب |

إيجاد مساحة سطح المثلث باستخدام المحددات

يمكن استخدام المحددات لإيجاد مساحة سطح مثلث باستخدام إحداثيات رؤوسه كما يلى :

إذا كان : س ص ع مثلثاً **حيث :** س (أ ، ب) ، ص (حـ ، ء) ، ع (هـ ، و)

فإن : مساحة سطح Δ س ص ع هى | م |

حيث : م = $\frac{١}{٢}$ $\begin{vmatrix} أ & ب & ١ \\ حـ & ء & ١ \\ هـ & و & ١ \end{vmatrix}$

الإحداثيات السينية لرؤوس المثلث

الإحداثيات الصادية لرؤوس المثلث

تذكر أن

| م | تعنى مقياس م

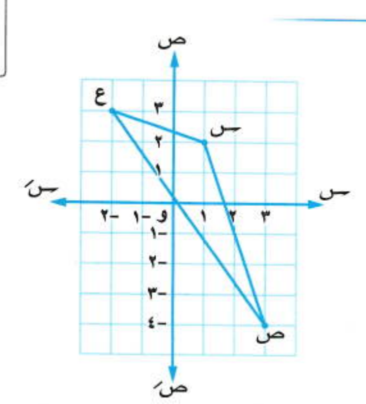
(أى قيمة م الموجبة فقط).

وسوف نعرض فى نهاية هذا الدرس إثبات القانون السابق كنشاط إثرائى.



مثال ٧

أوجد مستخدمًا المحددات مساحة سطح المثلث المقابل الذى إحداثيات رؤوسه س (١ ، ٢) ، ص (٣ ، -٤) ، ع (-٢ ، ٣)



الحـل

$$\because م = \frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & -4 & 1\\ -2 & 3 & 1\end{vmatrix}$$

وباستخدام عناصر العمود الثالث :

$$\therefore م = \frac{1}{2}\left[\begin{vmatrix}3 & -4\\ -2 & 3\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}1 & 2\\ -2 & 3\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & -4\end{vmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[(9-8) - (3+4) + (-4-6)\right] = \frac{1}{2}(1 - 7 - 10) = -8$$

$\therefore$ مساحة Δ س ص ع = | م | = | -٨ | = ٨ وحدة مربعة

لاحظ أننا استخدمنا عناصر العمود الثالث فى فك المحدد لأنها الأسهل فى إجراء العمليات الحسابية لوجود الواحد الصحيح.

حاول بنفسك

فى الشكل المقابل :

س ص ع مثلث حيث : س (٤ ، -٢)

، ص (-٢ ، -٢) ، ع (-٢ ، ٥)

أوجد باستخدام المحددات مساحة سطح Δ س ص ع

وتأكد من صحة الحل باستخدام قانون حساب مساحة المثلث.

مـلاحظـة

لإثبات أن ثلاث نقاط س (أ ، ب) ، ص (حـ ، ء) ، ع (هـ ، و) تقع على استقامة واحدة

باستخدام المحددات نثبت أن : $\begin{vmatrix}أ & ب & 1\\ حـ & ء & 1\\ هـ & و & 1\end{vmatrix}$ = صفر

مثال ٨

أثبت باستخدام المحددات أن : النقط (–٢ ، ٤) ، (٣ ، ٠) ، (٨ ، –٤) تقع على استقامة واحدة.

الحل

$$\because \begin{vmatrix} -٢ & ٤ & ١ \\ ٣ & ٠ & ١ \\ ٨ & -٤ & ١ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٣ & ٠ \\ ٨ & -٤ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -٢ & ٤ \\ ٨ & -٤ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -٢ & ٤ \\ ٣ & ٠ \end{vmatrix}$$

$= (-١٢ - ٠) - (٨ - ٣٢) + (٠ - ١٢) = -١٢ + ٢٤ - ١٢ =$ صفر

∴ النقط (–٢ ، ٤) ، (٣ ، ٠) ، (٨ ، –٤) تقع على استقامة واحدة.

حاول بنفسك

أثبت باستخدام المحددات أن النقط : (٤ ، ٤) ، (٢ ، ١) ، (–٢ ، –٥) تقع على استقامة واحدة.

حل نظام من المعادلات الخطية بطريقة كرامر

أولًا حل أنظمة المعادلات الخطية فى مجهولين

- حل نظام من المعادلات الخطية فى مجهولين يُقصد به إيجاد قيم المجهولين الذين يحققان المعادلتين معًا.
- إذا كان لدينا نظام من المعادلات الخطية فى مجهولين كالتالى :

$$أ\,س + ب\,ص = م$$
$$حـ\,س + ء\,ص = ن$$

فإنه لحل هذا النظام نتبع ما يأتى :

١ نوجد قيم ثلاثة محددات وذلك بعد وضع المعادلتين على الصورة السابقة ، وهذه المحددات هى :

المحدد	الوصف
$\begin{vmatrix} أ & ب \\ حـ & ء \end{vmatrix}$	• يسمى محدد مصفوفة المعاملات ويُرمز له بالرمز Δ ويُقرأ (دلتا) • نحصل عليه بوضع معاملى س فى المعادلتين فى العمود الأول ، ومعاملى ص فى المعادلتين فى العمود الثانى.
$\begin{vmatrix} م & ب \\ ن & ء \end{vmatrix}$	• يسمى محدد المجهول س ويُرمز له بالرمز $\Delta_{س}$ ويُقرأ (دلتا س) • نحصل عليه من محدد المعاملات Δ وذلك بتغيير عنصرى العمود الأول (معاملى س) بالثابتين م ، ن
$\begin{vmatrix} أ & م \\ حـ & ن \end{vmatrix}$	• يسمى محدد المجهول ص ويُرمز له بالرمز $\Delta_{ص}$ ويُقرأ (دلتا ص) • نحصل عليه من محدد المعاملات Δ وذلك بتغيير عنصرى العمود الثانى (معاملى ص) بالثابتين م ، ن

٢ نوجد قيمة س ، وقيمة ص كما يأتى (بفرض أن : $\Delta \neq$ ٠) :

$$\text{س} = \frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} \text{ب} & \text{م} \\ \text{ء} & \text{ن} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ \text{ء} & \text{حـ} \end{vmatrix}} = \frac{\text{م ء} - \text{ن ب}}{\text{أ ء} - \text{حـ ب}}$$

$$\text{ص} = \frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} \text{م} & \text{أ} \\ \text{ن} & \text{حـ} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ \text{ء} & \text{حـ} \end{vmatrix}} = \frac{\text{أ ن} - \text{حـ م}}{\text{أ ء} - \text{حـ ب}}$$

لاحظ أنه إذا كان : $\Delta \neq$ صفر فإن للنظام حلًا وحيدًا

أما إذا كان : $\Delta =$ صفر فإن للنظام عدد لانهائى من الحلول أو ليس له حل

والمثال التالى يوضح الخطوات السابق ذكرها.

مثال ٩

حل بطريقة كرامر المعادلتين الآتيتين : ٦ س − ٥ ص = −٢٣ ، ٣ س + ٣ ص = ١٦

الحل

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٥- & ٦ \\ ٣ & ٣ \end{vmatrix} = ٦ \times ٣ - ٣ \times (-٥) = ١٨ + ١٥ = ٣٣$$

$$\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} ٥- & ٢٣- \\ ٣ & ١٦ \end{vmatrix} = -٢٣ \times ٣ - ١٦ \times (-٥) = -٦٩ + ٨٠ = ١١$$

$$\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} ٢٣- & ٦ \\ ١٦ & ٣ \end{vmatrix} = ٦ \times ١٦ - ٣ \times (-٢٣) = ٩٦ + ٦٩ = ١٦٥$$

$$\therefore \text{س} = \frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta} = \frac{١١}{٣٣} = \frac{١}{٣} \text{ ، ص} = \frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta} = \frac{١٦٥}{٣٣} = ٥$$

وتكون مجموعة الحل = $\left\{\left(\frac{١}{٣} \text{ ، } ٥\right)\right\}$

ملاحظة

يمكنك التأكد من صحة الحل بالتعويض فى كل من المعادلتين بقيمة س ، وقيمة ص

حاول بنفسك

حل المعادلتين الآتيتين باستخدام طريقة كرامر : ٤ س + ٣ ص = −٤ ، ٣ س − ص = −٣

ثانيًا حل أنظمة المعادلات الخطية فى ثلاثة مجاهيل

إذا كان لدينا نظام من المعادلات الخطية فى ثلاثة مجاهيل كالآتى :

[١] $\text{أ}_١ \text{س} + \text{ب}_١ \text{ص} + \text{ح}_١ \text{ع} = \text{م}$ | [٢] $\text{أ}_٢ \text{س} + \text{ب}_٢ \text{ص} + \text{ح}_٢ \text{ع} = \text{ن}$

[٣] $\text{أ}_٣ \text{س} + \text{ب}_٣ \text{ص} + \text{ح}_٣ \text{ع} = \text{ك}$

فإنه بطريقة مماثلة لما فعلناه فى حالة نظام معادلتين خطيتين فى مجهولين يكون :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \text{أ}_١ & \text{ب}_١ & \text{ح}_١ \\ \text{أ}_٢ & \text{ب}_٢ & \text{ح}_٢ \\ \text{أ}_٣ & \text{ب}_٣ & \text{ح}_٣ \end{vmatrix} = \text{محدد المعاملات}$$

$$\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} \text{م} & \text{ب}_١ & \text{ح}_١ \\ \text{ن} & \text{ب}_٢ & \text{ح}_٢ \\ \text{ك} & \text{ب}_٣ & \text{ح}_٣ \end{vmatrix} = \text{محدد المجهول س}$$

ونحصل عليه بتغيير عناصر العمود الأول (معاملات س) بالثوابت م ، ن ، ك

$$\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} \text{أ}_١ & \text{م} & \text{ح}_١ \\ \text{أ}_٢ & \text{ن} & \text{ح}_٢ \\ \text{أ}_٣ & \text{ك} & \text{ح}_٣ \end{vmatrix} = \text{محدد المجهول ص}$$

ونحصل عليه بتغيير عناصر العمود الثانى (معاملات ص) بالثوابت م ، ن ، ك

$$\Delta_{\text{ع}} = \begin{vmatrix} \text{أ}_١ & \text{ب}_١ & \text{م} \\ \text{أ}_٢ & \text{ب}_٢ & \text{ن} \\ \text{أ}_٣ & \text{ب}_٣ & \text{ك} \end{vmatrix} = \text{محدد المجهول ع}$$

ونحصل عليه بتغيير عناصر العمود الثالث (معاملات ع) بالثوابت م ، ن ، ك

وبفرض أن $\Delta \neq$ صفر فإن : $\text{س} = \frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta}$ ، $\text{ص} = \frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta}$ ، $\text{ع} = \frac{\Delta_{\text{ع}}}{\Delta}$

والمثال التالى يوضح الخطوات السابقة.

مثال ١٠

حل نظام المعادلات الآتية بطريقة كرامر :

٣ ص + ٢ س = ع + ١ ، ٣ س + ٢ ع = ٨ - ٥ ص ، ٣ ع - ١ = س - ٢ ص

الحل

[١] نضع نظام المعادلات على الصورة : أ س + ب ص + حـ ع = م كالتالى :

٢ س + ٣ ص - ع = ١ ، ٣ س + ٥ ص + ٢ ع = ٨ ، س - ٢ ص - ٣ ع = -١

٢ نوجد كلاً من : Δ ، $\Delta_{س}$ ، $\Delta_{ص}$ ، $\Delta_{ع}$ كالتالى :

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٢ & ٣ & -١ \\ ٣ & ٥ & ٢ \\ ١ & -٢ & -٣ \end{vmatrix} = ٢\,(-١٥ + ٤) - ٣\,(-٩ - ٢) + (-١)\,(-٦ - ٥)$$

$$= -٢٢ + ٣٣ + ١١ = ٢٢$$

$$\Delta_{س} = \begin{vmatrix} ١ & ٣ & -١ \\ ٨ & ٥ & ٢ \\ -١ & -٢ & -٣ \end{vmatrix} = ١\,(-١٥ + ٤) - ٣\,(-٢٤ + ٢) + (-١)\,(-١٦ + ٥)$$

$$= -١١ + ٦٦ + ١١ = ٦٦$$

$$\Delta_{ص} = \begin{vmatrix} ٢ & ١ & -١ \\ ٣ & ٨ & ٢ \\ ١ & -١ & -٣ \end{vmatrix} = ٢\,(-٢٤ + ٢) - ١\,(-٩ - ٢) + (-١)\,(-٣ - ٨)$$

$$= -٤٤ + ١١ + ١١ = -٢٢$$

$$\Delta_{ع} = \begin{vmatrix} ٢ & ٣ & ١ \\ ٣ & ٥ & ٨ \\ ١ & -٢ & -١ \end{vmatrix} = ٢\,(-٥ + ١٦) - ٣\,(-٣ - ٨) + ١\,(-٦ - ٥)$$

$$= ٢٢ + ٣٣ - ١١ = ٤٤$$

٣ نوجد قيم المجاهيل س ، ص ، ع كالتالى :

$$س = \frac{\Delta_{س}}{\Delta} = \frac{٦٦}{٢٢} = ٣ \quad ، \quad ص = \frac{\Delta_{ص}}{\Delta} = \frac{-٢٢}{٢٢} = -١ \quad ، \quad ع = \frac{\Delta_{ع}}{\Delta} = \frac{٤٤}{٢٢} = ٢$$

وتكون مجموعة الحل = $\{(٣ ، -١ ، ٢)\}$

ملاحظتان

- يمكنك التأكد من صحة الحل بالتعويض عن المجاهيل الثلاثة فى كل معادلة.
- يُسمى (٣ ، −١ ، ٢) ثلاثى مرتب.

حاول بنفسك

حل نظام المعادلات الآتية بطريقة كرامر :

٢س + ص − ع = ٣ ، س + ص = ١ − ع ، س = ٢ص + ٣ع + ٤

ملاحظة

يمكن استخدام الآلة الحاسبة العلمية فى إيجاد قيمة المحدد وسوف نقوم بعرض ذلك فى نهاية الوحدة.

نشاط طريقة لإثبات قانون إيجاد مساحة المثلث باستخدام المحددات

بفرض أن س ص ع مثلث حيث :

س (أ ، ب) ، ص (حـ ، ء) ، ع (هـ ، و) فإن :

مساحة Δ س ص ع

= مساحة شبه المنحرف س سَ عَ ع

+ مساحة شبه المنحرف ع عَ صَ ص

− مساحة شبه المنحرف س سَ صَ ص

$$= \frac{\text{ب}+\text{و}}{2}(\text{هـ}-\text{أ}) + \frac{\text{و}+\text{ء}}{2}(\text{حـ}-\text{هـ}) - \frac{\text{ب}+\text{ء}}{2}(\text{حـ}-\text{أ})$$

$$= \frac{1}{2}\left[(\text{ب}+\text{و})(\text{هـ}-\text{أ}) + (\text{و}+\text{ء})(\text{حـ}-\text{هـ}) - (\text{ب}+\text{ء})(\text{حـ}-\text{أ})\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\text{ب هـ} - \cancel{\text{ب أ}} + \cancel{\text{و هـ}} - \text{و أ} + \text{و حـ} - \cancel{\text{و هـ}} + \cancel{\text{ء حـ}} - \text{ء هـ} - \text{ب حـ} + \cancel{\text{ب أ}} - \cancel{\text{ء حـ}} + \text{ء أ}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\text{ب هـ} - \text{و أ} + \text{و حـ} - \text{ء هـ} - \text{ب حـ} + \text{ء أ}\right] \qquad (1)$$

وبفك المحدد $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & 1 \\ \text{حـ} & \text{ء} & 1 \\ \text{هـ} & \text{و} & 1 \end{vmatrix}$ باستخدام عناصر العمود الثالث نجد أن :

$$\text{المحدد} = \frac{1}{2}\left[\begin{vmatrix} \text{حـ} & \text{ء} \\ \text{هـ} & \text{و} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{هـ} & \text{و} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{حـ} & \text{ء} \end{vmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\text{حـ و} - \text{هـ ء} - \text{أ و} + \text{هـ ب} + \text{أ ء} - \text{ب حـ}\right] \qquad (2)$$

وبمقارنة الناتج الذى حصلنا عليه فى (١) ، والناتج الذى حصلنا عليه فى (٢) نجد أن :

مساحة Δ س ص ع $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & 1 \\ \text{حـ} & \text{ء} & 1 \\ \text{هـ} & \text{و} & 1 \end{vmatrix}$ (بشرط أخذ القيمة المطلقة للناتج)



تمارين 4 على المحـــــددات

من أسئلة الكتاب المدرسي • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) قيمة المحدد : $\begin{vmatrix} ٧ & ٥ \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix}$ = ...

(أ) ٢٩ (ب) ١ (جـ) −١ (د) ١١

(٢) قيمة المحدد : $\begin{vmatrix} -٢ & -٢ \\ ٤ & ٠ \end{vmatrix}$ = ...

(أ) −٨ (ب) ٨ (جـ) صفر (د) ١٠

(٣) قيمة المحدد : $\begin{vmatrix} ٢ & ٠ & ٠ \\ -١ & ٣ & ٠ \\ ٤ & ٢ & ٥ \end{vmatrix}$ = ...

(أ) ١٠ (ب) ٣٠ (جـ) ١٥ (د) ٥

(٤) إذا كانت المصفوفة أ = $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & -١ \\ ٠ & ٤ & ٢ \\ ٢ & ٣ & -٥ \end{pmatrix}$ فإن : |أ| = ...

(أ) ٨ (ب) −٨ (جـ) ٢٠ (د) −٢٠

(٥) $\begin{vmatrix} ١ & -١ & ٥ \\ ٠ & -١ & ٢ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} ٣ & -٧ \\ -٢ & ٥ \end{vmatrix}^{٢}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) −١ (د) −٢٩

(٦) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ٢ & -٢ \\ -١ & ٤ \end{pmatrix}$ فإن : $\dfrac{|٢\,أ|}{٢\,|أ|}$ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ٨

(٧) إذا كان : $\begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & س \end{vmatrix}$ = ٠ فإن : س = ...

(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) ١

(٨) إذا كان : $\begin{vmatrix} ٢ - س & ٢ \\ -٣ & س + ٢ \end{vmatrix}$ = ١ فإن : س = ...

(أ) −٣ (ب) ٣ (جـ) ± ٣ (د) ± ٤

(٩) إذا كان : $\begin{vmatrix} \text{س}^{٢} & ٥ \\ ٣ & \text{س} \end{vmatrix} = ١٢$ فإن : س = ...

(أ) ١٥ (ب) ٣ (جـ) ١٢ (د) ٢٧

(١٠) إذا كان : $\begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٣ & ٢\text{س} & ٥ \\ ٦ & ١ & ٤ \end{vmatrix} = ١١$ فإن : س = ...

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ٥

(١١) إذا كان : $\begin{vmatrix} \text{س} & ١٢ \\ ٣ & \text{س} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ١٠ & ٥ \end{vmatrix}$ فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ± ٦

(١٢) إذا كان : $\begin{vmatrix} \text{س} & -١ \\ ٢ & \text{س} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & \text{س} \end{vmatrix} = ٢$ فإن : س = ...

(أ) ٣ أ، −٢ (ب) −٣ أ، ٢ (جـ) ٣ أ، ٢ (د) −٣ أ، −٢

(١٣) مجموعة حل المعادلة : $\begin{vmatrix} \text{س} & ٠ & ٠ \\ ٥ & ٣ & ٠ \\ ٤ & -١ & ٢\text{س} \end{vmatrix} = ٦$ هى ....

(أ) {٣} (ب) {٦} (جـ) {١ ، −١} (د) {٦ ، −٦}

(١٤) إذا كان : $\begin{vmatrix} ٢\text{س} & ٠ & ٠ \\ ١ & ٣\text{س} & ٠ \\ ٢ & ٤ & -\text{س} \end{vmatrix} = ٤٨$ فإن : قيمة س = ...

(أ) ٢ (ب) −٢ (جـ) ± ٢ (د) صفر

(١٥) مجموعة حل المعادلة : $\begin{vmatrix} \text{س}^{٢} & -٢ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix}$ = صفر فى ك هى ....

(أ) ∅ (ب) {−٢ ، ٢} (جـ) {−٢ ت ، ٢ ت} (د) {− ت ، ت}

(١٦) مجموعة حل المعادلة : $\begin{vmatrix} \text{س} + ٢ & ٢ \\ \text{س} & \text{س} - ٣ \end{vmatrix} = ٤$ هى ....

(أ) {٣ ، −٢} (ب) {٢ ، −٣} (جـ) {٥ ، −٢} (د) {٢ ، −٥}

(١٧) قيمة أ التى تجعل المحدد $\begin{vmatrix} ١ & ٢ & -١ \\ ٣ & \text{أ} & ١ \\ -١ & ٤ & -٢ \end{vmatrix} = ٠$ هى ....

(أ) ٥ (ب) −٢ (جـ) ١ (د) ٣

(١٨) $\begin{vmatrix} ٣ & ٥ & ٣ \\ ٤ & ٨ & ٤ \\ ٧ & ٢ & ٧ \end{vmatrix} = \cdots\cdots\cdots$

(أ) صفر (ب) -١ (ج) ١ (د) ٣ × ٤٨

(١٩) $\begin{vmatrix} ٤ & ٦ & ٨ \\ ٨ & ٦ & ٢ \\ ١٢ & ٢٠ & ١٠ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & ٣ & ٤ \\ ٢ & ٣ & ١ \\ ٣ & ١٠ & ٥ \end{vmatrix} \times \cdots\cdots\cdots$

(أ) ٢ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

(٢٠) $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{حـ} \\ \text{ء} & \text{هـ} & \text{و} \\ \text{ز} & \text{ح} & \text{ط} \end{vmatrix} = (-١) \times \cdots\cdots\cdots$

(أ) $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ء} & \text{ز} \\ \text{ب} & \text{هـ} & \text{ح} \\ \text{حـ} & \text{و} & \text{ط} \end{vmatrix}$ (ب) $\begin{vmatrix} \text{أ}+\text{ء} & \text{ء} & \text{ز} \\ \text{ب}+\text{هـ} & \text{هـ} & \text{ح} \\ \text{حـ}+\text{و} & \text{و} & \text{ط} \end{vmatrix}$

(جـ) $\begin{vmatrix} \text{ء} & \text{أ} & \text{ز} \\ \text{هـ} & \text{ب} & \text{ح} \\ \text{و} & \text{حـ} & \text{ط} \end{vmatrix}$ (د) $\begin{vmatrix} ٢\text{أ} & \text{ء} & \text{ز} \\ ٢\text{ب} & \text{هـ} & \text{ح} \\ ٢\text{حـ} & \text{و} & \text{ط} \end{vmatrix}$

(٢١) إذا كان : $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{حـ} \\ \text{ء} & \text{هـ} & \text{و} \\ \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \end{vmatrix} = ١٢$ فإن : $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ء} & \text{س} \\ \text{ب} & \text{هـ} & \text{ص} \\ \text{حـ} & \text{و} & \text{ع} \end{vmatrix} = \cdots\cdots\cdots$

(أ) -١٢ (ب) ١٢ (جـ) صفر (د) ٢٤

(٢٢) 📖 إذا كان : $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{حـ} \\ \text{ء} & \text{هـ} & \text{و} \\ \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \end{vmatrix} = ١٥$ فإن : $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{حـ} \\ \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ \text{ء} & \text{هـ} & \text{و} \end{vmatrix} = \cdots\cdots\cdots$

(أ) -٣٠ (ب) -١٥ (جـ) صفر (د) ١٥

(٢٣) 📖 إذا كان : $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{حـ} \\ \text{ء} & \text{هـ} & \text{و} \\ \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \end{vmatrix} = ١٢$ فإن : $\begin{vmatrix} \text{ع} & \text{س} & \text{ص} \\ \text{و} & \text{ء} & \text{هـ} \\ \text{حـ} & \text{أ} & \text{ب} \end{vmatrix} = \cdots\cdots\cdots$

(أ) -١٢ (ب) -٦ (جـ) ٦ (د) ١٢

(٢٤) 📖 $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{أ} & \text{أ} \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{حـ} \\ \text{حـ} & \text{حـ} & \text{حـ} \end{vmatrix} = \cdots\cdots\cdots$

(أ) صفر (ب) أحـ (جـ) بحـ (د) أبحـ

(٢٥) إذا كان : $\begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{حـ} \\ ٢ & -١ & ٨ \end{vmatrix} = ١٠$ فإن : $\begin{vmatrix} ٢\text{أ} & ٢\text{ب} & ٢\text{حـ} \\ \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ ٤ & -٢ & ١٦ \end{vmatrix} = \cdots\cdots\cdots$

(أ) -٤٠ (ب) -٢٠ (جـ) -١٠ (د) ٤٠

(٢٦) إذا كان : $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{حـ} \\ \text{د} & \text{هـ} & \text{و} \\ \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \end{vmatrix} = 2$ فإن : $\begin{vmatrix} 5\text{أ} & \text{ب} & \text{حـ} \\ 5\text{د} & \text{هـ} & \text{و} \\ 35\text{س} & 7\text{ص} & 7\text{ع} \end{vmatrix} =$ ....

(أ) ٧٠٠ (ب) ١٠ (جـ) ٣٥ (د) ٧٠

(٢٧) إذا كان : $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{حـ} \\ \text{د} & \text{هـ} & \text{و} \\ \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \end{vmatrix} = 10$ فإن : $\begin{vmatrix} 2\text{أ} & 2\text{ب} & 2\text{حـ} \\ 2\text{د} & 2\text{هـ} & 2\text{و} \\ 2\text{س} & 2\text{ص} & 2\text{ع} \end{vmatrix} =$ ....

(أ) ١٠ (ب) ٢٠ (جـ) ٤٠ (د) ٨٠

(٢٨) إذا كان : $\text{ن} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$ ، $\text{م} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 9 \\ 4 & 6 & 10 \\ 5 & 20 & 10 \end{vmatrix}$ فإن : م = ...

(أ) ن (ب) ١٠ ن (جـ) ٢٠ ن (د) ٣٠ ن

(٢٩) إذا كان : $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$ فإن : $2\,\Delta \neq$ ....

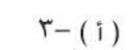
(أ) $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 10 & 14 \end{vmatrix}$ (ب) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 10 & 7 \end{vmatrix}$ (جـ) $\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 14 \end{vmatrix}$ (د) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 10 & 14 \end{vmatrix}$

(٣٠) إذا كانت : أ (٣ ، ٥) ، ب (٢ ، ٠) ، حـ (-٣ ، ٣)

فإن مساحة سطح المثلث أ ب حـ تساوى .... وحدة مربعة.

(أ) ٢٨ (ب) ١٤ (جـ) ٧ (د) ٢

(٣١) مساحة Δ أ ب حـ = ... وحدة مساحة.



(أ) -٣

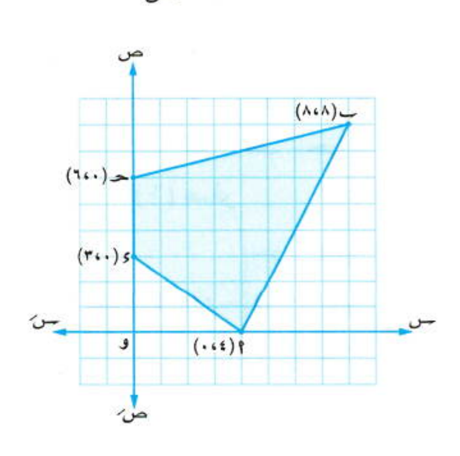
(ب) -١,٥

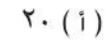
(جـ) ١,٥

(د) ٣

(٣٢) فى الشكل المقابل :

مساحة الشكل الرباعى أ ب حـ د = ... وحدة مربعة.





(أ) ٢٠

(ب) ١٠

(جـ) ٦٨

(د) ٣٤

(٣٣) إذا كان : $\begin{vmatrix} أ & ب \\ جـ & ء \end{vmatrix} = ٦$ وكان $\begin{vmatrix} أك & كجـ \\ ب & ء \end{vmatrix} = -٢٤$ فإن : ك = ...

(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) −٣ (د) −٤

(٣٤) إذا كان : $\begin{vmatrix} أ & ب \\ جـ & ء \end{vmatrix} = ٥$ وكان ء − جـ = ٧ فإن : $\begin{vmatrix} أ+٢ & ب+٢ \\ جـ & ء \end{vmatrix} =$ ....

(أ) ٥ (ب) ١٤ (جـ) −٩ (د) ١٩

(٣٥) إذا كان : $\begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ١ & ٠ \end{vmatrix} \times \begin{pmatrix} س & ٢ص \\ ٠ & ع \end{pmatrix} + I = \begin{pmatrix} ٣ & ٠ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix}^{مد}$ فإن : س × ص × ع = ...

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) ٢ (د) ٤

(٣٦) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ٢ \end{pmatrix}$ وكان : $|أ - م\, I| =$ صفر فإن : م = ...

(أ) ١ أ، ٤ (ب) −١ أ، ٤ (جـ) −٤ أ، ١ (د) −٤ أ، −١

(٣٧) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix}$ وكان : $م^٢ - ٥م = ٧$ فإن : $|أ - م\, I| =$ ....

(أ) صفر (ب) ٧ (جـ) ١٠ (د) ١٤

(٣٨) إذا كان : $\begin{vmatrix} ٢ك - ١ & ٢ \\ ٣ & ك + ١ \end{vmatrix} = ٢ك^٢ + ١$ فإن : ك = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

(٣٩) إذا كان : $\begin{vmatrix} ل & ٢ & -١ \\ س - ٢ & م & ٣ \\ ٠ & ٠ & ن \end{vmatrix} =$ ل م ن حيث ل ، م ، ن أعداد غير صفرية

فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) −٢ (جـ) ٦ (د) ل م

(٤٠) إذا كان : $\begin{vmatrix} أ & ٥ \\ ٥ & ب \end{vmatrix} = ٠$ ، $\begin{vmatrix} ب & ٢ \\ ٢ & جـ \end{vmatrix} = ٠$ ، $\begin{vmatrix} أ & ١ \\ ١ & جـ \end{vmatrix} = ٠$

فإن : $\begin{vmatrix} أ & ٠ & ٠ \\ -١ & ب & ٠ \\ ٢ & ٥ & جـ \end{vmatrix} =$ ....

(أ) ± ١٠ (ب) ± ٥٠ (جـ) ± ١٠٠ (د) ± ٢٠

(٤١) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & س \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ١ & س \\ ٢ & ص \end{pmatrix}$ وكان $|ب| = ٣$ ، $|أ + ب| = ٥$

فإن : س = ...

(أ) ٣ (ب) ١٥ (جـ) ٩ (د) ٢١

(٤٢) إذا كانت أ مصفوفة مربعة بحيث : |أ| = ٢ فإن : |أ^مد| = ...

(أ) صفر (ب) −٢ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ٢

(٤٣) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٢ × ٢ وكان : |أ| = ٧ فإن : |أ^٢| = ...

(أ) ١٤ (ب) ٢٨ (جـ) ٤٩ (د) ٥٦

(٤٤) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٢ × ٢ وكان : |أ| = ١٥ فإن : |٢ أ| = ...

(أ) ١٥ (ب) ٣٠ (جـ) ٦٠ (د) ١٢٠

(٤٥) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٣ \end{pmatrix}$ وكان : |ب| = ١٢ فإن : |أ ب| = ...

(أ) −٢٤ (ب) ٢٤ (جـ) ٤٨ (د) ٣

(٤٦) إذا كانت أ ، ب مصفوفتين على النظم ٣ × ٣ بحيث كان : |أ| = ٢ ، |ب| = −١

فإن : |٣ أ ب| = ...

(أ) −٦ (ب) −١٨ (جـ) ٥٤ (د) −٥٤

(٤٧) إذا كانت أ مصفوفة مربعة تحقق العلاقة : أ أ^مد = I فإن : |أ| = ...

(أ) صفر فقط. (ب) ١ فقط. (جـ) −١ فقط. (د) ± ١

(٤٨) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ٢ & س \\ س & ٢ \end{pmatrix}$ وكان : |أ^٣| = ١٢٥ فإن : س = ...

(أ) صفر (ب) ± ٢ (جـ) ± ٣ (د) ± ٥

(٤٩) إذا كانت : أ^٣ = $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ١٤ & ٣ \end{pmatrix}$ فإن : |أ| = ...

(أ) ٨ (ب) −٨ (جـ) ٢ (د) −٢

(٥٠) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٢ × ٢ وكان : |أ| = ٥ فإن : |− أ| = ...

(أ) −٥ (ب) صفر (جـ) ٥ (د) ٢٥

(٥١) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٣ × ٣ وكان : |أ| = ٥ فإن : |− أ| = ...

(أ) −٥ (ب) صفر (جـ) ٥ (د) ٢٥

(٥٢) إذا كانت : أ = − أ^مد حيث : أ مصفوفة على النظم ٣ × ٣ فإن : |أ| = ...

(أ) −١ (ب) صفر (جـ) ١ (د) ٢

(٥٣) إذا كانت أ مصفوفة شبه متماثلة على النظم م × م حيث م عدد زوجي فإن : |أ| = ...

(أ) صفر فقط. (ب) ١ فقط. (جـ) −١ فقط. (د) أي عدد حقيقي.

(٥٤) إذا كانت أ مصفوفة مربعة على النظم ٢ × ٢ وكان : |٢ أ| = ٨ فإن : |٣ أ| = ...

(أ) ٩ (ب) ١٢ (جـ) ١٨ (د) ٢٤

(٥٥) في نظام المعادلات $أ_١$ س + $ب_١$ ص = $ج_١$ ، $أ_٢$ س + $ب_٢$ ص = $ج_٢$

إذا كان : $\begin{vmatrix} أ_١ & ب_١ \\ أ_٢ & ب_٢ \end{vmatrix} = ٥$ ، $\begin{vmatrix} ج_١ & ب_١ \\ ج_٢ & ب_٢ \end{vmatrix} = -١٠$ ، $\begin{vmatrix} أ_١ & ج_١ \\ أ_٢ & ج_٢ \end{vmatrix} = ١٥$

فإن : (س ، ص) = ...

(أ) (−٢ ، ٣) (ب) (٣ ، −٢) (جـ) (−٥٠ ، ٧٥) (د) (٧٥ ، −٥٠)

(٥٦) عند حل نظام المعادلات : ٢ س + ٣ ص − ع = ١ ، ٣ س + ٥ ص + ٢ ع = ٨

، س − ٢ ص − ٣ ع = −١ يكون $\frac{\Delta_{س}}{\Delta}$ = ...

(أ) −١ (ب) ٢ (جـ) −٢ (د) ٣

(٥٧) في الشكل المقابل :

$\overline{أ جـ}$ قطعة مماسة للدائرة م ، $\overline{أ ب}$ قطر في الدائرة

فإن قيمة المحدد $\begin{vmatrix} ٥ & ٠ & ٠ \\ ٣ & ع & ص \\ ٢ & س & ع \end{vmatrix}$ = ...

(أ) ٥ (ب) ٣

(جـ) صفر (د) ٢

(٥٨) مجموعة حل المعادلة : $\begin{vmatrix} س-٢ & ٠ & ٠ \\ ٣ & س-٣ & ٠ \\ ٤ & -١ & س \end{vmatrix}$ = صفر هي ....

(أ) {٠} (ب) {٣ ، ٤ ، −١} (جـ) {٢ ، ٣} (د) {٠ ، ٢ ، ٣}

(٥٩) مجموعة حل المعادلة : $\begin{vmatrix} س-٢ & ٠ & ٠ \\ ١ & ١ & ٠ \\ ٢ & ٣ & س+٢ \end{vmatrix}$ = ٥ هي ....

(أ) {٢ ، −٢} (ب) {٣ ، −٣} (جـ) {٣ ، ٢} (د) {١ ، −١}

(٦٠) إذا كان : $\begin{vmatrix} جا\theta & ٠ & ٠ \\ ٢ & قتا\theta & ٠ \\ ١ & ٣ & س \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} جا\theta & جتا\theta \\ -جتا\theta & جا\theta \end{vmatrix} = ٠$ فإن : س = ...

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) صفر (د) جا θ

(٦١) إذا كان : $\begin{vmatrix} س & ١ & ٣ \\ ٠ & ٢س & ٥ \\ ٠ & ٠ & س \end{vmatrix}$ = ٨ س فإن مجموعة حل المعادلة هي ....

(أ) {٢ ، −٢} (ب) {٠ ، −٢ ، ٢} (جـ) $\{\frac{١}{٢} ، \frac{-١}{٢}\}$ (د) $\{٠ ، \frac{-١}{٢} ، \frac{١}{٢}\}$

(٦٢) إذا كانت : θ ∈] ٠ ، $\frac{\pi}{2}$ [فإن مجموعة حل المعادلة $\begin{vmatrix} \text{طا } \theta & \text{حتا } \theta \\ \text{حتا } \theta & \text{طتا } \theta \end{vmatrix}$ = $\frac{3}{4}$ هي ....

(أ) $\{\frac{\pi}{3}\}$ (ب) $\{\frac{\pi}{4}\}$ (جـ) $\{\frac{\pi}{6}\}$ (د) $\{\frac{\pi}{12}\}$

(٦٣) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $س^2 - 4 س - 10 = 0$ فإن : قيمة المحدد $\begin{vmatrix} 2 \text{ ل} & -1 \\ 3 & \text{م} \end{vmatrix}$

تساوى ....

(أ) −١٧ (ب) −١٢ (جـ) −٨ (د) −٦

(٦٤) إذا كانت : أ ، ب ، حـ ، ء أربعة أعداد صحيحة متتالية فإن : $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{حـ} & \text{ء} \end{vmatrix}$ = ...

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) −٢ (د) ١

(٦٥) إذا كانت النقط (١ ، −٢) ، (٣ ، ٢) ، (٥ ، ٣) منتصفات أضلاع Δ أ ب حـ

فإن مساحة Δ أ ب حـ تساوى .... وحدة مساحة.

(أ) ١,٥ (ب) ٣ (جـ) ٦ (د) ١٢

(٦٦) إذا كان : أ (ك ، ك + ١) ، ب (٢ ، ٣) ، حـ (٣ ، ١) هى رؤوس المثلث أ ب حـ

وكانت مساحة Δ أ ب حـ تساوى ١,٥ وحدة مساحة فإن : ك = ...

(أ) ١ فقط. (ب) ٢ فقط. (جـ) ١ أ، ٣ (د) ٢ أ، ٣

(٦٧) إذا كانت النقط (٣ ، ٢) ، (٥ ، ٩) ، (٩ ، ٤) ثلاثة رؤوس لمتوازى الأضلاع فإن مساحة متوازى

الأضلاع = ... وحدة مربعة.

(أ) ١٩ (ب) ٣٨ (جـ) ٧٦ (د) ٣٠٤

(٦٨) إذا كانت مساحة Δ أ ب حـ = ٥ وحدة مساحة حيث أ (١ ، −١) ، ب (٠ ، ٢) ، حـ ($س_1$ ، $ص_1$)

وكانت حـ تقع على المستقيم ٣ س + ص − ٤ ك = ٠ فإن : ك ∈ ....

(أ) {−٣ ، −٢} (ب) {−٣ ، ٢} (جـ) {٣ ، −٢} (د) {٣ ، ٢}

(٦٩) إذا كان : أ (١ ، ٢) ، ب (٢ ، ١) ، حـ (٣ ، ٤) ، و (٠ ، ٠)

فإن مساحة الشكل الرباعى أ و ب حـ = ... وحدة مساحة.

(أ) ٧ (ب) ٥ (جـ) ٣,٥ (د) ٢,٥

(٧٠) مساحة المثلث المحصور بين المستقيمات $ل_1$: س + ص = ٣ ، $ل_2$: ٢ س + ص = −٥

، ومحور السينات يساوى .... وحدة مساحة.

(أ) ٣٠ (ب) $\frac{121}{4}$ (جـ) $\frac{125}{4}$ (د) $\frac{127}{7}$

(٧١) لكي يكون لنظام المعادلات $\text{أ}_1 \text{س} + \text{ب}_1 \text{ص} = \text{حـ}_1$ ، $\text{أ}_2 \text{س} + \text{ب}_2 \text{ص} = \text{حـ}_2$

حل وحيد يجب أن يكون ....

(أ) $\begin{vmatrix} \text{أ}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{أ}_2 & \text{ب}_2 \end{vmatrix} = ٠$ (ب) $\begin{vmatrix} \text{حـ}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{حـ}_2 & \text{ب}_2 \end{vmatrix} = ٠$

(جـ) $\begin{vmatrix} \text{أ}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{أ}_2 & \text{ب}_2 \end{vmatrix} \neq ٠$ (د) $\begin{vmatrix} \text{حـ}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{حـ}_2 & \text{ب}_2 \end{vmatrix} \neq ٠$

(٧٢) إذا كان : $\frac{١}{\text{أ}_1 \text{ب}_2 - \text{أ}_2 \text{ب}_1} \begin{pmatrix} \text{ب}_2 & -\text{ب}_1 \\ -\text{أ}_2 & \text{أ}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -١ & ٢ \\ ٢ & -٣ \end{pmatrix}$

فإن مجموعة حل نظم المعادلات : $\left\{ \begin{array}{l} \text{أ}_1 \text{س} + \text{ب}_1 \text{ص} = ٥ \\ \text{أ}_2 \text{س} + \text{ب}_2 \text{ص} = ٣ \end{array} \right.$ هى ....

(أ) $\{(١ ، -١)\}$ (ب) $\{(١)\}$ (جـ) $\{(-١ ، ١)\}$ (د) $\{(١ ، ١)\}$

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد قيمة كل من المحددات الآتية :

(١) $\begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & -١ \end{vmatrix}$ (٢) $\begin{vmatrix} -\frac{٣}{٤} & \frac{٢}{٣} \\ -١ & \frac{٨}{٩} \end{vmatrix}$

(٣) $\begin{vmatrix} \text{أ} + \text{س} & \text{أ} \\ \text{ب} + \text{ص} & \text{ب} \end{vmatrix}$ (٤) $\begin{vmatrix} \text{س} + ١ & \text{س}^2 + ١ \\ \text{ص} + ١ & \text{ص}^2 + ١ \end{vmatrix}$

(٥) $\begin{vmatrix} ١ & \text{قا}\,\theta \\ \text{قا}\,\theta & \text{ظا}^2\theta \end{vmatrix}$ (٦) $\begin{vmatrix} \frac{١}{\text{جتا}\,\theta} & ١ + \text{ظا}^2\theta \\ ١ & \frac{١}{\text{جتا}\,\theta} \end{vmatrix}$

٢ أثبت أن :

(١) $\begin{vmatrix} ٢\text{س} & -١ \\ ٢ & ٣\text{س} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٣ & ٦\text{س} \\ \text{س} & ١ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٣ & ١٣ \\ -٢ & -٧ \end{vmatrix}$ (٢) $\begin{vmatrix} \text{قا}\,\theta & \text{ظا}^2\theta \\ ١ & \text{قا}\,\theta \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} ٢ & -٣ \\ ٥ & -٧ \end{vmatrix} = ١$

٣ إذا كان : $\begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} \\ \text{ع} & \text{ل} \end{vmatrix} = ٣$ **فاحسب قيمة كل من :**

(١) $\begin{vmatrix} ٢\text{س} & ٥\text{ص} \\ ٢\text{ع} & ٥\text{ل} \end{vmatrix}$ (٢) $\begin{vmatrix} \text{س} - \text{ص} & ٤\text{ص} \\ \text{ع} - \text{ل} & ٤\text{ل} \end{vmatrix}$

٤ أوجد قيمة كل من المحددات الآتية :

(١) $\begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ -١ & ٤ & ٤ \\ ٠ & ٧ & ٨ \end{vmatrix}$ (٢) $\begin{vmatrix} ١٣ & ٣ & ٢٣ \\ ٣٠ & ٧ & ٥ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{vmatrix}$

(٣) $\begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ & ٦ \\ ٧ & ٨ & ٩ \end{vmatrix}$ (٤) $\begin{vmatrix} ١ & ٠ & ١ + \text{ت} \\ ٠ & ١ & \text{ت} \\ ١ - \text{ت} & -\text{ت} & ١ \end{vmatrix}$ (حيث $\text{ت}^2 = -١$)

٥ بدون فك المحدد أوجد قيمة :

① $\begin{vmatrix} ٥ & -١ & ١٠ \\ ٤ & ٢ & ٨ \\ -٥ & ٢ & -١٠ \end{vmatrix}$ (٢) $\begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & -٣ & -١ \\ -٤ & ٦ & ٢ \end{vmatrix}$ «صفر ، صفر»

٦ حل كلًا من المعادلات الآتية :

(١) $\begin{vmatrix} ٣\,س & -٤ \\ ٢ & ٢ - س \end{vmatrix} = -١$ «-١ أ ، ٣»

(٢) $\begin{vmatrix} س^٢ - ١ & س + ١ \\ س + ١ & س^٢ - ١ \end{vmatrix} =$ صفر «-١ أ ، صفر أ ، ٢»

(٣) $\begin{vmatrix} ٠ & -١ & س \\ س & ٤ & ٣ \\ ٢ & ١ & ٢ \end{vmatrix} = ١٠$ «٨ أ ، -٢»

(٤) $\begin{vmatrix} ٠ & ٣ & س \\ س & ١ & ٠ \\ ١ & س + ٣ & ٣ \end{vmatrix} =$ صفر «-٥ أ ، ٠ أ ، ٢»

(٥) $\begin{vmatrix} جا ٢٠° & جا ٧٠° \\ -جتا ٢٠° & جتا ٧٠° \end{vmatrix} = ٢\,س - ٣$ «٢»

٧ أوجد قيمة س التي تجعل : $\begin{vmatrix} ٣\,س & ١ \\ -٣ & ٢ \end{vmatrix}$ يساوى ثلاثة أمثال $\begin{vmatrix} -١ & -٢ & ٣ \\ ٢ & ١ & ٥ \\ -١ & س & ٧ \end{vmatrix}$ « $\frac{-١١}{٣}$ »

٨ أوجد مستخدمًا المحددات مساحة سطح المثلث :

(١) أ (٢ ، ٤) ، ب (-٢ ، ٤) ، حـ (٠ ، -٢) «١٢ وحدة مربعة»

(٢) س (٣ ، ٣) ، ص (-٤ ، ٢) ، ع (١ ، -٤) « $٢٣\frac{١}{٢}$ وحدة مربعة»

٩ باستخدام المحددات أثبت أن كلًا من النقط الآتية تقع على استقامة واحدة :

(١) (٣ ، ٥) ، (٤ ، -١) ، (٥ ، -٧) (٢) (٣ ، ٢) ، (-١ ، ٠) ، (-٥ ، -٢)

١٠ حل كل نظام من المعادلات الخطية الآتية بطريقة كرامر :

(١) س + ٣ ص = ٥ ، ٢ س + ٥ ص = ٨ «-١ ، ٢»

(٢) س + ٢ ص = ٠ ، ٢ س - ٣ ص = ١ « $\frac{٢}{٧}$ ، $\frac{-١}{٧}$ »

(٣) ٣ س = ١ - ٤ ص ، ٥ س + ١٢ = ٧ ص «-١ ، ١»

11 حل كل نظام من المعادلات الخطية بطريقة كرامر :

(١) ٢ س + ص − ٢ ع = ١٠ ، ٣ س + ٢ ص + ٢ ع = ١
، ٥ س + ٤ ص + ٣ ع = ٤ «١ ، ٢ ، −٣»

(٢) س + ٢ ص − ٣ ع = ٦ ، ٢ س − ص − ٤ ع = ٢
، ٤ س + ٣ ص − ٢ ع = ١٤ «٢ ، ٢ ، صفر»

(٣) ص + ٢ س + ٣ ع = ٦ ، ٢ س − ص + ع = −٣
، س − ٢ ص + ٢ ع = −١١ « $\frac{٥}{٣}$ ، $\frac{٦٥}{١٢}$ ، $\frac{-١١}{١٢}$ »

(٤) س + ٢ ص + ٣ ع = ٤ ، ٢ س + ٥ ص = ٣ ، ٣ ص + ع = ٤ «−١ ، ١ ، ١»

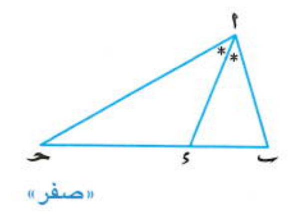
(٥) س − ص = ٥ ، ع − ص = ٨ ، س + ص + ع = ٤ «٢ ، −٣ ، ٥»

(٦) ٣ س + ع = ٧ − ٢ ص ، ٥ ص + ٣ ع = ٤ − س ، س = ٢ ص − ع − ١ «٢ ، ١ ، −١»

(٧) س + ص = ٥ − ٣ ع ، ص = ع ، ٢ س − ٤ ع = −٢ «١ ، ١ ، ١»

---

12 فى الشكل المقابل :



أ ب حـ مثلث ، $\overleftrightarrow{أء}$ ينصف ∠ ب أ حـ

أوجد قيمة : $\begin{vmatrix} ٥ & \cdot & \cdot \\ ٦ & أب & أحـ \\ ٧ & بء & ءحـ \end{vmatrix}$

«صفر»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

1 اختر الإجابة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} جتا \theta & جا \theta \\ ١ & ١ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} جتا \theta & -١ \\ جا \theta & ١ \end{pmatrix}$ حيث θ ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[

وكان | أ × ب | = $\frac{١}{٢}$ فإن : θ = ...

(أ) $\frac{\pi}{١٢}$ (ب) $\frac{\pi}{٦}$ (جـ) $\frac{\pi}{٤}$ (د) $\frac{\pi}{٣}$

(٢) مجموعة حل المعادلة : $\begin{vmatrix} |س - ١| & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{vmatrix}$ = ٧ هى ....

(أ) {٦ ، ٤} (ب) {٤ ، −٦} (جـ) {٦ ، −٤} (د) ∅

(٣) حل المعادلة : $\begin{vmatrix} جا س & \cdot & \cdot \\ جتا س & قا س & \cdot \\ قا س & ظتا س & ظا س \end{vmatrix}$ = ١ حيث ٠° ≤ س < ٣٦٠° هو ....

(أ) ٤٥° ، ١٣٥° (ب) ١٣٥° ، ٢٢٥° (جـ) ٤٥° ، ٢٢٥° (د) ٤٥° ، ٣١٥°

(٤) النقط أ (−١ ، ٥) ، ب (٢ ، ٢) ، حـ (٣ ، ١) ....

(أ) رؤوس مثلث قائم الزاوية مساحته ٥ وحدات مربعة.

(ب) رؤوس مثلث متساوى الساقين مساحته ١٠ وحدات مربعة.

(جـ) رؤوس مثلث متساوى الأضلاع مساحته ٩ وحدات مربعة.

(د) تقع على استقامة واحدة.

(٥) إذا كان : $\begin{vmatrix} \text{ك} + \frac{١}{\text{ك}} & ١ \\ ١ & \text{ك} + \frac{١}{\text{ك}} \end{vmatrix} = ١٥$ فإن : $\text{ك}^{٢} + \frac{١}{\text{ك}^{٢}} =$ ....

(أ) ١٦ (ب) ١٥ (جـ) ١٤ (د) ١٣

(٦) عدد قيم س الصحيحة التى تجعل قيمة المحدد $\begin{vmatrix} ٥\text{س} + ١٤ & -٢ \\ ٧\text{س} + ٨ & \text{س} \end{vmatrix} \geq ١$ يساوى ....

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

(٧) إذا كان : $\begin{vmatrix} \text{أ جاس} & ٠ & ٠ \\ ١ & \text{أ جتاس} & ٠ \\ \text{قاس} & \text{ظتاس} & \text{أ ظاس} \end{vmatrix} = -\text{أ}^{٣}\ \text{جتا}^{٢}\text{س} + ٨$ فإن : أ = ...

(أ) ٨ (ب) −٢ (جـ) −٨ (د) ٢

(٨) إذا ضربت جميع عناصر محدد من الدرجة الثالثة قيمته م فى العدد ٢ فإن قيمة المحدد الناتج تساوى ....

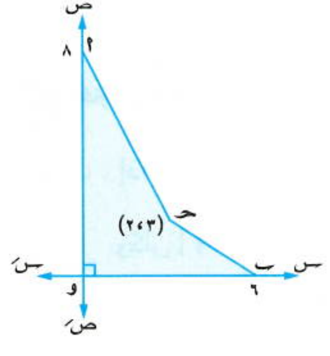
(أ) م (ب) ٢ م (جـ) ٤ م (د) ٨ م

---

٢ فى الشكل المقابل :

أوجد مساحة الشكل المظلل

مستخدمًا المحددات.



«١٨ وحدة مربعة»

---

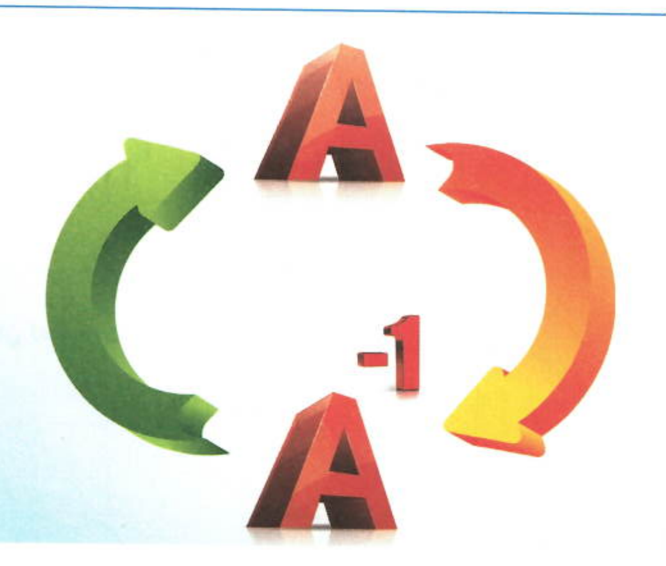
٣ باستخدام طريقة كرامر حل المعادلات الآتية :

$\begin{vmatrix} ٢ & \text{ص} \\ ١ & \text{س} \end{vmatrix} = ١$ ، $\begin{vmatrix} ٣ & \text{ع} \\ ٢ & \text{ص} \end{vmatrix} = ١$ ، $\begin{vmatrix} ٣ & \text{س} \\ ١ & \text{ع} \end{vmatrix} = ٢$

«١ ، ١ ، ١»

الدرس **5**

المعكوس الضربى للمصفوفة



إذا كانت : أ ، ب مصفوفتين مربعتين على النظم ٢ × ٢

وكان : أ ب = ب أ = I حيث I مصفوفة الوحدة على النظم ٢ × ٢

فإن : المصفوفتين أ ، ب كلًا منهما معكوس ضربى للآخر.

فمثلًا إذا كانت : أ $= \begin{pmatrix} ٤ & ٢- \\ ٣ & ١- \end{pmatrix}$ ، ب $= \begin{pmatrix} \frac{١-}{٢} & ١ \\ \frac{٣-}{٢} & ٢ \end{pmatrix}$

فإن : أ ب $= \begin{pmatrix} ٤ & ٢- \\ ٣ & ١- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{١-}{٢} & ١ \\ \frac{٣-}{٢} & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} = I$ ، ب أ $= \begin{pmatrix} \frac{١-}{٢} & ١ \\ \frac{٣-}{٢} & ٢ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٤ & ٢- \\ ٣ & ١- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} = I$

أى أن أ ب = ب أ = I

∴ المصفوفتان أ ، ب كل منهما معكوس ضربى للآخر.

ملاحظة

إذا كان المصفوفة أ $= \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٤- \\ ٢ & ١ & ٤- \end{pmatrix}$ ، المصفوفة ب $= \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ١ \\ ١ & ١ \end{pmatrix}$

فإن المصفوفة أ ليست معكوس ضربى للمصفوفة ب

على الرغم من أن : أ ب $= \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٤- \\ ٢ & ١ & ٤- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ١ \\ ١ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} = I$

وذلك لأن المصفوفة أ ، المصفوفة ب ليست مربعة.

المعكوس الضربى للمصفوفة ٢ × ٢

إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} أ & ب \\ حـ & ء \end{pmatrix}$ فإن المعكوس الضربى للمصفوفة أ

الذى يرمز له بالرمز $أ^{-١}$ يكون معرفًا (موجودًا) عندما يكون محدد أ = Δ ≠ ٠ ويكون :

$$أ^{-١} = \frac{١}{Δ} \begin{pmatrix} ء & -ب \\ -حـ & أ \end{pmatrix}$$ **حيث** $أ أ^{-١} = أ^{-١} أ = I$

مثال ١

أوجد المعكوس الضربي إذا كان له وجود لكل من المصفوفتين الآتيتين :

١ $أ = \begin{pmatrix} -٢ & ٢ \\ ٣ & -٤ \end{pmatrix}$ ٢ $ب = \begin{pmatrix} \frac{١}{٢} & ٢ \\ ٣ & ١٢ \end{pmatrix}$

الحل

١ ∵ $Δ = \begin{vmatrix} -٢ & ٢ \\ ٣ & -٤ \end{vmatrix} = (-٢)(-٤) - (٣)(٢) = ٢$ ∴ Δ ≠ ٠ ∴ للمصفوفة أ معكوس ضربى.

$$∴ أ^{-١} = \frac{١}{٢} \begin{pmatrix} -٤ & -٢ \\ -٣ & -٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٢ & -١ \\ -\frac{٣}{٢} & -١ \end{pmatrix}$$

٢ ∵ $Δ = \begin{vmatrix} \frac{١}{٢} & ٢ \\ ٣ & ١٢ \end{vmatrix} = \left(\frac{١}{٢}\right)(١٢) - (٢)(٣) = ٠$ ∴ $ب^{-١}$ غير معرف (ليس له وجود)

حاول بنفسك

أوجد إن أمكن المعكوس الضربي للمصفوفة : $أ = \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ٣ & -٢ \end{pmatrix}$

مثال ٢

أوجد قيم س الحقيقية التى تجعل للمصفوفة أ فى كل مما يأتى معكوسًا ضربيًا :

١ $أ = \begin{pmatrix} س & ٣ \\ ١٢ & س \end{pmatrix}$ ٢ $أ = \begin{pmatrix} س - ١ & ٤ \\ ٣ & س - ٢ \end{pmatrix}$

الحل

١ المصفوفة أ لا يكون لها معكوس ضربى إذا كان : |أ| = ٠

أى عندما $\begin{vmatrix} س & ٣ \\ ١٢ & س \end{vmatrix} = ٠$ ∴ $س^٢ - ٣٦ = ٠$ ∴ س = ± ٦

∴ المصفوفة أ لا يكون لها معكوس ضربى عند س = ± ٦

∴ يكون للمصفوفة أ معكوس ضربى عندما س ∈ ح - {-٦ ، ٦}

٢ المصفوفة أ لا يكون لها معكوس ضربى إذا كان $|\text{أ}| = ٠$

أى عندما $\begin{vmatrix} \text{س} - ١ & ٤ \\ ٣ & \text{س} - ٢ \end{vmatrix} = ٠$ $\therefore (\text{س} - ١)(\text{س} - ٢) - ١٢ = ٠$

$\therefore \text{س}^٢ - ٣\text{س} + ٢ - ١٢ = ٠$ $\therefore \text{س}^٢ - ٣\text{س} - ١٠ = ٠$

$\therefore (\text{س} - ٥)(\text{س} + ٢) = ٠$ $\therefore \text{س} = ٥$ أ، $\text{س} = -٢$

$\therefore$ المصفوفة أ لا يكون لها معكوس ضربى عندما $\text{س} = ٥$ أ، $\text{س} = -٢$

$\therefore$ المصفوفة أ يكون لها معكوس ضربى عندما $\text{س} \in \text{ح} - \{٥ ، -٢\}$

حاول بنفسك

أوجد قيم س الحقيقية التى تجعل للمصفوفة : $\text{أ} = \begin{pmatrix} \text{س} - ١ & ٤ \\ ٢ & \text{س} + ١ \end{pmatrix}$ معكوسًا ضربيًا.

مثال ٣

إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ٤ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ -٣ & ١ \end{pmatrix}$ **فأثبت أن :**

١ $(\text{أ}^{-١})^{-١} = \text{أ}$ ٢ $(\text{أ}\text{ب})^{-١} = \text{ب}^{-١}\text{أ}^{-١}$

الحل

١ $\because |\text{أ}| = \begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ٤ \end{vmatrix} = (١)(٤) - (٣)(٢) = -٢$ $\therefore \Delta \neq ٠$

$\therefore \text{أ}^{-١}$ له وجود (معرف) ، $\because \text{أ}^{-١} = \frac{١}{\Delta}\begin{pmatrix} \text{ء} & -\text{ب} \\ -\text{حـ} & \text{أ} \end{pmatrix}$ حيث : $\text{أ} = \begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{حـ} & \text{ء} \end{pmatrix}$

$\therefore \text{أ}^{-١} = \frac{١}{-٢}\begin{pmatrix} ٤ & -٣ \\ -٢ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٢ & \frac{٣}{٢} \\ ١ & \frac{-١}{٢} \end{pmatrix}$

، $\because |\text{أ}^{-١}| = \begin{vmatrix} -٢ & \frac{٣}{٢} \\ ١ & \frac{-١}{٢} \end{vmatrix} = (-٢)\left(\frac{-١}{٢}\right) - \left(\frac{٣}{٢}\right)(١) = \frac{-١}{٢} \neq ٠$ $\therefore (\text{أ}^{-١})^{-١}$ له وجود.

$\therefore (\text{أ}^{-١})^{-١} = \frac{١}{\frac{-١}{٢}}\begin{pmatrix} \frac{-١}{٢} & \frac{-٣}{٢} \\ -١ & -٢ \end{pmatrix} = -٢\begin{pmatrix} \frac{-١}{٢} & \frac{-٣}{٢} \\ -١ & -٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ٤ \end{pmatrix} = \text{أ}$

٢ $\because \text{أ}\text{ب} = \begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ٤ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ -٣ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٧ & ٢ \\ -٨ & ٢ \end{pmatrix}$

$\therefore |\text{أ}\text{ب}| = \begin{vmatrix} -٧ & ٢ \\ -٨ & ٢ \end{vmatrix} = (-٧)(٢) - (٢)(-٨) = ٢ \neq ٠$ $\therefore (\text{أ}\text{ب})^{-١}$ له وجود.

$\therefore (\text{أ}\text{ب})^{-١} = \frac{١}{٢}\begin{pmatrix} ٢ & -٢ \\ ٨ & -٧ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & -١ \\ ٤ & \frac{-٧}{٢} \end{pmatrix}$ (١)

، $\because |\text{ب}| = \begin{vmatrix} ٢ & -١ \\ -٣ & ١ \end{vmatrix} = (٢)(١) - (-١)(-٣) = -١$ $\therefore \text{ب}^{-١}$ له وجود.

∴ $ب^{-١} = \frac{١}{١-} \begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١- & ١- \\ ٢- & ٣- \end{pmatrix}$ ، ∵ $أ^{-١} = \begin{pmatrix} \frac{٣}{٢} & ٢- \\ \frac{١-}{٢} & ١ \end{pmatrix}$

∴ $ب^{-١} أ^{-١} = \begin{pmatrix} ١- & ١- \\ ٢- & ٣- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{٣}{٢} & ٢- \\ \frac{١-}{٢} & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١- & ١ \\ \frac{٧-}{٢} & ٤ \end{pmatrix}$ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن : $(أب)^{-١} = ب^{-١} أ^{-١}$

حاول بنفسك

باستخدام المصفوفتين أ ، ب فى المثال السابق أثبت أن : $(أ^{-١} ب)^{-١} = ب^{-١} أ$

ملاحظة

إذا كانت أ مصفوفة مربعة على النظم ٢ × ٢ بحيث $|أ| \neq ٠$ ، ج مصفوفة أخرى وكان :

١ $أ س = ج$ فإن : $س = أ^{-١} ج$

وذلك : بضرب طرفى المعادلة × $أ^{-١}$

∴ $أ^{-١} أ س = أ^{-١} ج$ ∴ $I س = أ^{-١} ج$ ∴ $س = أ^{-١} ج$

٢ $س أ = ج$ فإن : $س = ج أ^{-١}$

لاحظ أن

* $أ^{-١} أ = I$ ، $I س = س$
* $|أ^{-١}| = \frac{١}{|أ|}$

مثال ٤

أوجد المصفوفة س التى تحقق أن : $\begin{pmatrix} ١- & ٢ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix} \times س = \begin{pmatrix} ١- \\ ٣ \end{pmatrix}$

الحل

بفرض أن : $أ = \begin{pmatrix} ١- & ٢ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix}$ ، $ج = \begin{pmatrix} ١- \\ ٣ \end{pmatrix}$

∴ المعادلة هى : $أ س = ج$ ∴ $س = أ^{-١} ج$

، ∵ $|أ| = \begin{vmatrix} ١- & ٢ \\ ٠ & ٣ \end{vmatrix} = (٢)(٠) - (١-)(٣) = ٣ \neq ٠$

∴ $أ^{-١} = \frac{١}{٣} \begin{pmatrix} ١ & ٣- \\ ٢ & ٠ \end{pmatrix}$ … كما هو مطبوع: $\begin{pmatrix} \frac{١}{٣} & ٠ \\ \frac{٢}{٣} & ١- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & ٣- \end{pmatrix} \frac{١}{٣} = أ^{-١}$ ∴

∴ $س = \begin{pmatrix} \frac{١}{٣} & ٠ \\ \frac{٢}{٣} & ١- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١- \\ ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ \\ ٣ \end{pmatrix}$

حاول بنفسك

أوجد المصفوفة س التى تحقق أن : $س \times \begin{pmatrix} ٧ & ٣ \\ ٣ & ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٠ & ٣ \\ ٣ & ٠ \end{pmatrix}$

حل معادلتين آنيتين باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة

لحل المعادلتين الخطيتين على الصورة : $أ_1$ س + $ب_1$ ص = $حـ_1$ ، $أ_2$ س + $ب_2$ ص = $حـ_2$

آنيًا باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة نتبع الآتى :

1 نكتب المعادلتين على صورة المعادلة المصفوفية :

$$\begin{pmatrix} أ_1 & ب_1 \\ أ_2 & ب_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} حـ_1 \\ حـ_2 \end{pmatrix}$$ أى على الصورة $أ\,س = جـ$

حيث $أ = \begin{pmatrix} أ_1 & ب_1 \\ أ_2 & ب_2 \end{pmatrix}$ تسمى مصفوفة المعاملات

، $س = \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix}$ تسمى مصفوفة المجاهيل ، $جـ = \begin{pmatrix} حـ_1 \\ حـ_2 \end{pmatrix}$ تسمى مصفوفة الثوابت.

2 نوجد حل المعادلة المصفوفية : $أ\,س = جـ$ فيكون $س = أ^{-1}\,جـ$

ومن ذلك يمكن استنتاج قيم المجهولين س ، ص

مثال 5

حل كل نظام من المعادلات الخطية التالية باستخدام المصفوفات :

1 ٢ س + ٣ ص = ٧ ، س − ص = ١

2 س = ٢ ص − ١ ، ٣ ص = ٢ س

الحل

1 المعادلة المصفوفية هى : $أ\,س = جـ$ حيث :

$$أ = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & -١ \end{pmatrix} ،\quad س = \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} ،\quad جـ = \begin{pmatrix} ٧ \\ ١ \end{pmatrix}$$

$$\because \Delta = |أ| = \begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & -١ \end{vmatrix} = (٢)(-١) - (٣)(١) = -٥ \neq ٠$$

$\therefore$ للمصفوفة أ معكوس ضربى هو $أ^{-1}$ $\therefore أ^{-1} = \frac{١}{-٥}\begin{pmatrix} -١ & -٣ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{١}{٥} & \frac{٣}{٥} \\ \frac{١}{٥} & \frac{-٢}{٥} \end{pmatrix}$

، $\because س = أ^{-1}\,جـ$ $\therefore س = \begin{pmatrix} \frac{١}{٥} & \frac{٣}{٥} \\ \frac{١}{٥} & \frac{-٢}{٥} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٧ \\ ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ \\ ١ \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ \\ ١ \end{pmatrix}$ $\therefore$ س = ٢ ، ص = ١ وتكون مجموعة الحل = {(٢ ، ١)}

2 س − ٢ ص = −١ ، ٢ س − ٣ ص = ٠

المعادلة المصفوفية هى : $أ\,س = جـ$ حيث : $أ = \begin{pmatrix} ١ & -٢ \\ ٢ & -٣ \end{pmatrix}$ ، $س = \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix}$ ، $جـ = \begin{pmatrix} -١ \\ ٠ \end{pmatrix}$

∵ $\Delta = |أ| = \begin{vmatrix} ١ & -٢ \\ ٢ & -٣ \end{vmatrix} = (١)(-٣) - (-٢)(٢) = ١ \neq ٠$ ∴ $أ^{-١} = \frac{١}{١}\begin{pmatrix} -٣ & ٢ \\ -٢ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٣ & ٢ \\ -٢ & ١ \end{pmatrix}$

، ∵ $س = أ^{-١} ج$ ∴ $س = \begin{pmatrix} -٣ & ٢ \\ -٢ & ١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -١ \\ ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ \\ ٢ \end{pmatrix}$

∴ $\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ \\ ٢ \end{pmatrix}$ ∴ $س = ٣$ ، $ص = ٢$ وتكون مجموعة الحل = $\{(٣ ، ٢)\}$

حاول بنفسك

حل نظام المعادلات الآتية باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة : $س + ٢ ص = ٤$ ، $ص = ٢ س + ٧$

مثال ٦

إذا كان منحنى الدالة د : $د(س) = أ س^{٢} + ب$ يمر بالنقطتين (٢ ، ٠) ، (−١ ، −٣)

استخدم المصفوفات لإيجاد قيمتى الثابتين : أ ، ب

الحل

∵ منحنى الدالة د يمر بالنقطة (٢ ، ٠) ∴ $د(٢) = ٠$

∴ $أ \times (٢)^{٢} + ب = ٠$ ∴ $٤ أ + ب = ٠$ (١)

، ∵ منحنى الدالة د يمر بالنقطة (−١ ، −٣) ∴ $د(-١) = -٣$

∴ $أ \times (-١)^{٢} + ب = -٣$ ∴ $أ + ب = -٣$ (٢)

ولحل المعادلتين (١) ، (٢) نكتب المعادلة المصفوفية :

$أ س = ج$ حيث : $أ = \begin{pmatrix} ٤ & ١ \\ ١ & ١ \end{pmatrix}$ ، $س = \begin{pmatrix} أ \\ ب \end{pmatrix}$ ، $ج = \begin{pmatrix} ٠ \\ -٣ \end{pmatrix}$

فيكون $س = أ^{-١} ج$

، ∵ $\Delta = |أ| = \begin{vmatrix} ٤ & ١ \\ ١ & ١ \end{vmatrix} = ٤ \times ١ - ١ \times ١ = ٣$

∴ $أ^{-١} = \frac{١}{٣}\begin{pmatrix} ١ & -١ \\ -١ & ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{١}{٣} & \frac{-١}{٣} \\ \frac{-١}{٣} & \frac{٤}{٣} \end{pmatrix}$ ∴ $س = \begin{pmatrix} \frac{١}{٣} & \frac{-١}{٣} \\ \frac{-١}{٣} & \frac{٤}{٣} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٠ \\ -٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ \\ -٤ \end{pmatrix}$

∴ $\begin{pmatrix} أ \\ ب \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ \\ -٤ \end{pmatrix}$ ∴ $أ = ١$ ، $ب = -٤$

ملاحظة

يمكن استخدام الآلة الحاسبة العلمية فى إيجاد المعكوس الضربى للمصفوفة وسوف نقوم بعرض ذلك فى نهاية الوحدة.



تمارين 5

على المعكوس الضربى للمصفوفة

من أسئلة الكتاب المدرسى • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) أى المصفوفات الآتية ليس لها معكوس ضربى ؟

(أ) $\begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٥ & ٢ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٤ & ١- \\ ٨ & ٢ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٦ & ٢ \\ ٩ & ٣ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٠ & ٤ \\ ١ & ٢- \end{pmatrix}$

(٢) أى من المصفوفات الآتية لها معكوس ضربى ؟

(أ) $\begin{pmatrix} ٦ & ٢ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٣- & ٢ \\ ٣- & ٢ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٣ & ٣ \\ ٣ & ٣ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٠ & ٣ \\ ١ & ٣- \end{pmatrix}$

(٣) إذا كانت المصفوفة $\begin{pmatrix} ١ & س \\ ٣ & ٦ \end{pmatrix}$ ليس لها معكوس ضربى فإن : س = ...

(أ) -٢ (ب) صفر (جـ) ٢ (د) ٣

(٤) قيمة س التى تجعل المصفوفة $\begin{pmatrix} ٢ & ٦ \\ ٤- & س - ٤ \end{pmatrix}$ ليس لها معكوس ضربى هى ....

(أ) -٨ (ب) -١٠ (جـ) ٨ (د) ١٠

(٥) إذا كانت المصفوفة ب هى المعكوس الضربى للمصفوفة أ فإن ....

(أ) أ + ب = ☐ (ب) أ ب = I (جـ) أ ب = ☐ (د) أ = $\frac{١}{ب}$

(٦) المصفوفة $\begin{pmatrix} ١٢ & أ \\ أ & ٣ \end{pmatrix}$ لها معكوس ضربى عندما ....

(أ) أ = ٦ (ب) أ = ± ٦

(جـ) أ ∈ ح - {٦} (د) أ ∈ ح - {-٦ ، ٦}

(٧) المصفوفة $\begin{pmatrix} ٠ & س + ٣ \\ س - ٣ & ٢ \end{pmatrix}$ ليس لها معكوس ضربى عندما س = ...

(أ) ٣ فقط (ب) ± ٣ (جـ) ٥ فقط (د) ± ٥

(٨) المعكوس الضربى للمصفوفة $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ٢ & ١- \end{pmatrix}$ يساوى ....

(أ) I (ب) $\begin{pmatrix} ١- & ٢ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ٢ & ١- \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} \frac{٣-}{٧} & \frac{٢}{٧} \\ \frac{٢}{٧} & \frac{١}{٧} \end{pmatrix}$

(٩) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ فإن : $أ^{-1}$ = ...

(أ) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$

(١٠) إذا كانت : $\text{س} = \begin{pmatrix} 1 & أ \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ فإن : س^{-1} = ...

(أ) س (ب) $\text{س}^{\text{مد}}$ (جـ) I (د) ☐

(١١) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ وكانت $أ^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\text{س} & 3 \end{pmatrix}$ فإن : س = ...

(أ) ٣ (ب) −٣ (جـ) ٥ (د) − ٥

(١٢) إذا كان حاصل ضرب المصفوفتين أ × ب = I وكانت المصفوفة $أ = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$

فإن المصفوفة ب = ...

(أ) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}$

(١٣) إذا كان : $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & \text{س} \end{pmatrix} = I$ فإن : س = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(١٤) إذا كانت : $أ \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = I$ فإن : ٣ أ = ...

(أ) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ (ب) $3\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (جـ) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(١٥) إذا كانت : $أ^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ ، $أ\,ب = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ فإن : ب = ...

(أ) $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

(١٦) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ وكان $أ = أ^{-1} \times ب$ فإن : ب = ...

(أ) $\begin{pmatrix} -7 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} -7 & 8 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} 7 & -8 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} 7 & -8 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

(١٧) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} \text{س} & 2 \\ \text{ص} & -2 \end{pmatrix}$ وكان : $أ \times أ^{-1} = أ^{2}$ فإن : س × ص = ...

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) −٢ (د) −٣

(١٨) إذا كانت : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\text{س} = \begin{pmatrix} \text{س} & \text{س} + \text{ص} \\ 0 & \text{س} \end{pmatrix}$ فإن : س = ...

(أ) $\begin{pmatrix} \text{س} & 0 \\ \text{ص} & \text{س} \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} \text{س} & \text{س} \\ 0 & \text{ص} \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} \text{س} & \text{ص} \\ 0 & \text{س} \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} \text{س} & \text{ص} \\ 0 & \text{ص} \end{pmatrix}$

(١٩) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & ك \end{pmatrix}$ وكان : أ^{3} = − أ فإن : ك = ... حيث ك ∈ ص

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) صفر (د) ٣

(٢٠) إذا كان : $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} أ \\ ب \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}$ فإن : أ + ب = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

(٢١) عند حل المعادلتين : أس + ب ص = ٥ ، حـ س + ء ص = −١ وجد أن المصفوفة $\begin{pmatrix} أ & ب \\ حـ & ء \end{pmatrix}$

معكوسها الضربى هو $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ فإن : س + ص = ...

(أ) ٣ (ب) صفر (جـ) ٩ (د) −٣

(٢٢) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$ ، أ$^{-1}$ + (أ^{مد})^{مد} = س فإن المصفوفة س = ...

(أ) ٤ أ (ب) ٣ I (جـ) ٦ I (د) ١٠ I

(٢٣) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ وكان أ$^{-1}$ + ب^{مد} = أ^{مد} فإن المصفوفة ب = ...

(أ) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$

(٢٤) إذا كانت : أ$^{-1}$ = $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ وكان أ $\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ فإن : ص − س = ...

(أ) ١٧ (ب) −١٧ (جـ) ٧ (د) −٧

(٢٥) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ فإن : $\frac{1}{4}$ (أ + أ$^{-1}$) = ...

(أ) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(٢٦) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ وكانت : ب = أ$^{-1}$ × أ^{مد} فإن : ب = ...

(أ) $\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} 4 & -9 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} 2 & -9 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$

(٢٧) إذا كانت أ ، ب مصفوفتين مربعتين من نفس النظم بحيث كان : أب = ب$^{-1}$ فإن : أ$^{-1}$ = ...

(أ) أب (ب) ب أ (جـ) أ^{2} (د) ب^{2}

(٢٨) إذا كانت أ ، ب مصفوفتين فإن : (أب)$^{-1}$ أ = ...

(أ) أ$^{-1}$ (ب) ب$^{-1}$ (جـ) أ$^{-1}$ ب$^{-1}$ أ (د) أ ب أ$^{-1}$

(٢٩) إذا كان : أ س ب = ج فإن : س = ...

(أ) $أ^{-١}$ ج $ب^{-١}$ (ب) أ ج ب (جـ) $ب^{-١}$ ج $أ^{-١}$ (د) $أ^{-١}$ $ب^{-١}$ ج

(٣٠) إذا كانت أ ، ب مصفوفتين مربعتين بحيث | أ | ≠ ٠ ، | ب | ≠ ٠ وكان : ب = − $أ^{-١}$ ب أ

فإن : $(أ + ب)^{٢}$ = ...

(أ) $أ^{٢}$ + $ب^{٢}$ (ب) ☐ (جـ) $أ^{٢}$ + ٢ أ ب + $ب^{٢}$ (د) أ + ب

(٣١) إذا كانت أ مصفوفة شبه متماثلة على النظم ٢ × ٢ وكان : | أ | = ١ فإن : ....

(أ) أ = − أ (ب) أ = − I (جـ) أ = $أ^{-١}$ (د) $أ^{-١}$ = − أ

(٣٢) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} جتا θ & -جا θ \\ جا θ & جتا θ \end{pmatrix}$ فإن :

أولًا : أ لها معكوس ضربى عندما θ ∋ ....

(أ)] ٠ ، $\frac{π}{٤}$ [فقط. (ب)] $\frac{π}{٤}$ ، $\frac{π}{٢}$ [فقط. (جـ)] ٠ ، $\frac{٣π}{٢}$ [فقط. (د) ح

ثانيًا : $أ^{-١}$ = ...

(أ) − أ (ب) $أ^{مد}$ (جـ) − $أ^{مد}$ (د) أ

(٣٣) إذا كانت أ ، ب مصفوفتين على النظم ٢ × ٢ وكان : | أ ب | = ٩ ، | أ $ب^{-١}$ | = ٤

فإن : | أ | + | ب | يمكن أن تساوى ....

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) $\frac{١٣}{٢}$ (د) $\frac{١٥}{٢}$

(٣٤) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ١ & ١ \end{pmatrix}$ فإن المعكوس الضربى للمصفوفة $أ^{ن}$ حيث ن ∋ $ص^{+}$ هو ....

(أ) $\begin{pmatrix} -١ & ٠ \\ ن & ١ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٠ & -١ \\ ١ & ن \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ -ن & ١ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ن \end{pmatrix}$

(٣٥) إذا كانت : أ مصفوفة مربعة بحيث | أ | ≠ ٠ وكان $أ^{٢}$ = I فإن : $أ^{-١}$ = ...

(أ) ☐ (ب) أ (جـ) ٢ أ (د) أ + I

(٣٦) إذا كانت أ مصفوفة مربعة بحيث | أ | ≠ ٠ وكان : $أ^{٥}$ = I فإن : $أ^{-١}$ = ...

(أ) $أ^{٢}$ (ب) $أ^{٣}$ (جـ) $أ^{٤}$ (د) أ

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ بين المصفوفات التى لها معكوسات ضربية والمصفوفات التى ليس لها معكوسات ضربية فيما يلى وأوجد المعكوس إن وجد :

(١) $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ١ \end{pmatrix}$ (٢) $\begin{pmatrix} -١ & ٠ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix}$ (٣) $\begin{pmatrix} س & -ص \\ س & -ص \end{pmatrix}$ حيث س ص ≠ ٠

٢ ما قيم أ الحقيقية التى تجعل لكل من المصفوفات الآتية معكوسًا ضربيًا :

(١) $\begin{pmatrix} \text{أ} & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ (٢) $\begin{pmatrix} \text{أ} & 9 \\ 4 & \text{أ} \end{pmatrix}$ (٣) $\begin{pmatrix} \text{أ} & 4 \\ 3 & \text{أ} - 1 \end{pmatrix}$

(٤) $\begin{pmatrix} \text{أ} - 1 & -2 \\ 1 & \text{أ} - 2 \end{pmatrix}$ (٥) $\begin{pmatrix} 8 & \text{أ} - 3 \\ \text{أ} + 3 & 2 \end{pmatrix}$ (٦) $\begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ت} \\ \text{ت} & -1 \end{pmatrix}$ حيث $\text{ت}^2 = -1$

٣ أوجد قيم س الحقيقية التى تجعل المصفوفة $\begin{pmatrix} \text{س} & 27 \\ 3 & \text{س} \end{pmatrix}$ ليس لها معكوس ضربى. «± ٩»

٤ إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ فأثبت أن : المصفوفة ب معكوس ضربى للمصفوفة أ

٥ إذا كانت : $\text{س} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ فأثبت أن : $\text{س}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

٦ إذا كانت : $\text{ب} = \begin{pmatrix} \text{س} & -\text{س ص} \\ 0 & \text{ص} \end{pmatrix}$ فأثبت أن : $\text{ب}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\text{س}} & 1 \\ 0 & \frac{1}{\text{ص}} \end{pmatrix}$ علمًا بأن : س ص ≠ ٠

٧ إذا كانت : $\text{س} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ، $\text{ص} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ فأثبت أن :

(١) $(\text{س ص})^{-1} = \text{ص}^{-1}\,\text{س}^{-1}$ (٢) $(\text{س}^{-1})^{-1} = \text{س}$ (٣) $(\text{س}^{-1}\,\text{ص})^{-1} = \text{ص}^{-1}\,\text{س}$

٨ إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ فأثبت أن : $(\text{أ}^{\text{مد}})^{-1} = (\text{أ}^{-1})^{\text{مد}}$

٩ إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} 2 & \text{س} \\ \text{ص} & 4 \end{pmatrix}$ وكان : س ص = ٧ أثبت أن : $\text{أ} + \text{أ}^{-1} = 6\,I$

١٠ إذا كانت : $\text{ب} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ ، $\text{أ ب} = I$ فأوجد : المصفوفة أ

١١ أوجد المصفوفة أ فى كل مما يأتى :

(١) $\text{أ} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (٢) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{أ} = \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

١٢ إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ ، $\text{أ ب} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ فأوجد : المصفوفة ب

١٣ إذا كان : $(\text{أ ب})^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ وكانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ فأوجد : ب^{-1}

14 حل كل نظام من المعادلات الخطية التالية باستخدام المصفوفات :

(١) ٣ س + ٢ ص = ٥ ، ٢ س + ص = ٣

(٢) ٢ س − ٧ ص = ٣ ، س − ٣ ص = ٢

(٣) ٣ س + ٢ ص − ١ = ٠ ، س = ٣ ص − ٧

(٤) $\frac{1}{2}$ س − ص = −١ ، س + $\frac{1}{3}$ ص = ٥

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت : أ مصفوفة شبه متماثلة على النظم ٢ × ٢ فإن : $أ^{-1}$ تكون ....

(أ) متماثلة. (ب) شبه متماثلة. (جـ) مصفوفة قطرية. (د) غير موجودة.

(٢) إذا كان : أ مصفوفة شبه متماثلة على النظم ٣ × ٣ فإن : $أ^{-1}$ تكون ....

(أ) متماثلة. (ب) شبه متماثلة. (جـ) مصفوفة قطرية. (د) غير موجودة.

(٣) إذا كان : أ = $\begin{pmatrix} س & ١ \\ ص & ٣ \end{pmatrix}$ وكان : أ = ٣ $أ^{-1}$ فإن : س + ص = ...

(أ) −٣ (ب) −٥ (جـ) −٧ (د) −٩

(٤) إذا كانت : س = $\begin{pmatrix} ١ & ظا θ \\ -ظا θ & ١ \end{pmatrix}$ حيث θ زاوية حادة فإن :

أولًا : $س^{-1}$ = ...

(أ) $حا^2 θ$ س (ب) $حا^2 θ$ $س^{مد}$ (جـ) $قا^2 θ$ س (د) $قا^2 θ$ $س^{مد}$

ثانيًا : إذا كان : $س^{مد}$ $س^{-1}$ = I فإن : θ = ...

(أ) صفر (ب) $\frac{\pi}{2}$ (جـ) $\frac{\pi}{3}$ (د) $\frac{\pi}{4}$

(٥) إذا كانت س مصفوفة مربعة بحيث كان $س^2$ + ٥ س + ٥ I = ☐

فإن المعكوس الضربي للمصفوفة (س + ٢ I) يساوي ....

(أ) س − ٢ I (ب) س + ٣ I (جـ) س + ٢ I (د) س − ٣ I

(٦) إذا كان : $أ^2$ − أ + I = ☐ فإن المعكوس الضربي للمصفوفة أ هو ....

(أ) أ (ب) أ − I (جـ) I − أ (د) أ + I



استخدام الآلة الحاسبة العلمية فى المصفوفة

يمكن استخدام الآلة الحاسبة العلمية التى تدعم المصفوفات فى العديد من العمليات التى تتعلق بالمصفوفات مثل :

* إيجاد مدور المصفوفة. * إجراء عمليات الجمع والطرح والضرب على المصفوفات.

* إيجاد قيمة محدد المصفوفة. * إيجاد المعكوس الضربى للمصفوفة.

وما نعرضه هنا سيكون باستخدام الآلة من النوع (*CASIO fx-991ES PLUS*)

أولًا : إدخال المصفوفة أ = $\begin{pmatrix} -٧ & ٠ \\ ٤ & ٧ \end{pmatrix}$:

• اضغط على أزرار الآلة بالتتابع التالى من اليسار إلى اليمين : MODE 6 1 5



وذلك لاختيار مصفوفة من النظم ٢ × ٢

ثم أدخل عناصر المصفوفة أ بالضغط على الأزرار بالتتابع التالى :

إدخال عناصر الصف الأول ← (-) 7 = 0 =

إدخال عناصر الصف الثانى ← 4 = 7 =

ثانيًا : إدخال المصفوفة ب = $\begin{pmatrix} -٨ & ٤ \\ ٠ & ٧ \end{pmatrix}$:

• اضغط على أزرار الآلة بالتتابع التالى من اليسار لليمين : SHIFT [MATRIX] 4 2 2 5

لاختيار مصفوفة أخرى من النظم ٢ × ٢

ثم أدخل عناصر المصفوفة ب بالضغط على الأزرار بالتتابع التالى :

إدخال عناصر الصف الأول ← (-) 8 = 4 =

إدخال عناصر الصف الثانى ← 0 = 7 = AC

وهكذا نكون أدخلنا المصفوفتين أ ، ب ويمكن إجراء بعض العمليات عليهما كالتالى :

١ لإيجاد أ^مد اضغط الأزرار بالتتابع من اليسار لليمين :



ستظهر لك على الشاشة المصفوفة $\begin{pmatrix} -٧ & ٤ \\ ٠ & ٧ \end{pmatrix}$ التى تمثل أ^مد

٢ لإيجاد أ + ب اضغط الأزرار بالتتابع من اليسار لليمين :



ستظهر لك على الشاشة المصفوفة $\begin{pmatrix} -١٥ & ٤ \\ ٤ & ١٤ \end{pmatrix}$ والتى تمثل أ + ب

٣ لإيجاد أب اضغط الأزرار بالتتابع

من اليسار لليمين :

SHIFT 4 3 × SHIFT 4 4 =

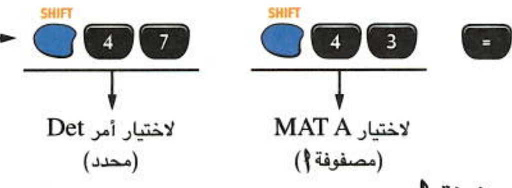
MAT A × MAT B

ستظهر لك على الشاشة المصفوفة $\begin{pmatrix} -٢٨ & ٥٦ \\ ٦٥ & -٣٢ \end{pmatrix}$ والتى تمثل أ ب

---

٤ لإيجاد قيمة محدد المصفوفة أ اضغط الأزرار

بالتتابع من اليسار لليمين :



سيظهر لك على الشاشة -٤٩ والذى يمثل قيمة محدد المصفوفة أ

---

٥ لإيجاد المعكوس الضربى للمصفوفة أ اضغط

الأزرار بالتتابع من اليسار لليمين :

SHIFT 4 3 x^{-1} =

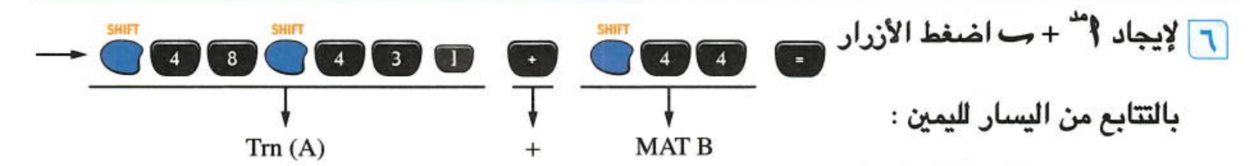
MAT A لاختيار
(مصفوفة أ)

ستظهر لك على الشاشة المصفوفة $\begin{pmatrix} ٠ & -\frac{١}{٧} \\ \frac{١}{٧} & \frac{٤}{٤٩} \end{pmatrix}$ والتى تمثل المعكوس الضربى للمصفوفة أ

---

٦ لإيجاد $أ^{مد}$ + ب اضغط الأزرار

بالتتابع من اليسار لليمين :



ستظهر لك على الشاشة المصفوفة $\begin{pmatrix} ٨ & -١٥ \\ ١٤ & ٠ \end{pmatrix}$ والتى تمثل $أ^{مد}$ + ب

حاول بنفسك

استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد كل مما يأتى :

$ب^{مد}$ ، أ - ب ، ب أ ، محدد ب ، $ب^{-١}$ ، أ + $ب^{مد}$ ، $أ^{مد}$ ب ، ب $أ^{مد}$



البرمجة الخطية

دروس الوحدة



نـواتـج الـتـعـلـّم

فى نهاية هذه الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن :

- يحل متباينات من الدرجة الأولى فى مجهول واحد مع تمثيل الحل بيانيًا.
- يحل متباينات من الدرجة الأولى فى مجهولين وتحديد منطقة الحل بيانيًا.
- يحل نظامًا من المتباينات الخطية بيانيًا.
- يحل مسائل حياتية على أنظمة المتباينات الخطية.
- يستخدم البرمجة الخطية فى حل مشكلات رياضية حياتية.
- يضع معلومات خاصة بموضوع مشكلة رياضية حياتية فى جدول مناسب ، ويترجم البيانات لها فى صورة متباينات خطية ، ثم يحدد منطقة الحل بيانيًا.
- يعين دالة الهدف بدلالة الإحداثيات ، مع تحديد النقط التى تنتمى إلى مجموعة الحل وإعطاء الحل الأمثل لدالة الهدف.

الدرس 1

المتباينة الخطية - حل أنظمة من المتباينات الخطية بيانيا



تذكر خواص علاقة التباين فى ح :

بفرض أن أ ، ب ، حـ ثلاثة أعداد حقيقية :

- إذا كان : أ ≥ ب فإن : أ + حـ ≥ ب + حـ سواء كانت حـ **موجبة أو سالبة**
- إذا كان : أ ≥ ب فإن : أ حـ ≥ ب حـ إذا كانت حـ **موجبة**
- إذا كان : أ ≥ ب فإن : أ حـ ≤ ب حـ إذا كانت حـ **سالبة**

- يمكنك استنتاج الخواص السابقة فى حالة علامات التباين الأخرى «≤ ، > ، <»

حل متباينة الدرجة الأولى فى متغير واحد بيانيًا

* كل من المتباينات : ٣ س > ٥ ، ٤ - س ≤ ٢ س ، ٣ ≥ س > ٦ تسمى متباينة من الدرجة الأولى فى متغير واحد.

* حل المتباينة معناه إيجاد جميع عناصر مجموعة التعويض التى تحقق المتباينة.

* وقد تكون مجموعة التعويض هى ح أو ح × ح

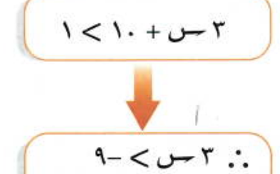
، وفيما يلى نوضح كيفية حل المتباينة من الدرجة الأولى فى متغير واحد فى كلتا الحالتين.

مثال توضيحى

وضح بيانيًا مجموعة حل المتباينة : ٣ س + ١٠ > ١

[١] إذا كانت مجموعة التعويض هى ح [٢] إذا كانت مجموعة التعويض هى ح × ح

الحـــل



١ إذا كانت مجموعة التعويض هى ح تمثل مجموعة الحل على خط الأعداد

- مجموعة الحل هى جميع الأعداد الحقيقية الأكبر من −٣
- مجموعة الحل تمثل الجزء من خط الأعداد الذى يقع يمين العدد −٣
- وجود حلقة مفرغة عند −٣ يعنى أنها ليست متضمنة فى مجموعة الحل.

٢ إذا كانت مجموعة التعويض هى ح × ح تمثل مجموعة الحل على الشبكة التربيعية

- مجموعة الحل هى جميع الأزواج المرتبة التى مسقطها السينى أكبر من −٣
- مجموعة الحل هى المنطقة التى تقع على يمين الخط المستقيم : ـس = −٣ (وتسمى نصف المستوى).
- رسم المستقيم ـس = −٣ بشكل متقطع يشير أن مجموعة نقاط هذا المستقيم ليست متضمنة فى مجموعة الحل.

مثـــال ١

وضح بيانيًا مجموعة الحل للمتباينة : ٥ ـس − ٧ ≤ ٢ ـس − ١ فى ح × ح

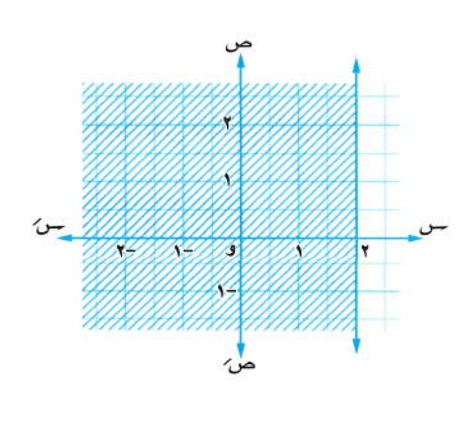
الحـــل

∵ ٥ ـس − ٧ ≤ ٢ ـس − ١

∴ ٥ ـس − ٢ ـس ≤ −١ + ٧

∴ ٣ ـس ≤ ٦

∴ ـس ≤ ٢



لاحظ أن

١ المنطقة المظللة على يسار المستقيم س = ٢ لأن علاقة التباين أصغر من.

٢ المستقيم س = ٢ رسم متصلًا لاحتواء علاقة التباين على علامة التساوى أى ≤

مثال ٢

وضح بيانيًا مجموعة حل المتباينة : س − ١ ≤ ٤ س + ٥ < س + ١٧ حيث س ∈ ح

الحل

∵ س − ١ ≤ ٤ س + ٥ < س + ١٧

∴ −١ ≤ ٣ س + ٥ < ١٧

∴ −٦ ≤ ٣ س < ١٢

∴ −٢ ≤ س < ٤

∴ م.ح = [−٢ ، ٤[

مثال ٣

أوجد بيانيًا مجموعة حل المتباينة :

٢ س − ٢ ≤ ٣ س − ١ < س + ٥ حيث س ∈ ح

الحل

بتجزئة المتباينة إلى متباينتين كالتالى :

٢ س − ٢ ≤ ٣ س − ١	٣ س − ١ < س + ٥
∴ ٢ س − ٣ س ≤ −١ + ٢	∴ ٣ س − س < ٥ + ١
∴ −س ≤ ١	∴ ٢ س < ٦
∴ س ≥ −١	∴ س < ٣
∴ م.ح = [−١ ، ∞[	∴ م.ح =]−∞ ، ٣[

∴ مجموعة حل المتباينة الأصلية = [−١ ، ∞[∩]−∞ ، ٣[= [−١ ، ٣[

حل متباينة الدرجة الأولى فى متغيرين بيانيًا

* من المعلوم أنه يمكن تمثيل المعادلة الخطية :

٢ س + ٣ ص = ٦ بيانيًا

بخط مستقيم كالتالى :

س	٠	٣
ص	٢	٠

«ويمكن أخذ زوج مرتب ثالث للتحقق من صحة الرسم»

* نلاحظ من الرسم أن هذا المستقيم يجزئ المستوى الكارتيزى إلى ثلاث مجموعات من النقط :

١ مجموعة نقط المستقيم ل (يسمى المستقيم الحدى) والتى كل منها يحقق أن : ٢ س + ٣ ص = ٦

٢ مجموعة نقط المستوى التى تقع على أحد جانبى المستقيم ل (وتسمى نصف مستوى)

ويرمز لها بالرمز $ف_١$ والتى كل منها يحقق أن : ٢ س + ٣ ص > ٦

٣ مجموعة نقط المستوى التى تقع على الجانب الآخر من المستقيم ل (وتسمى نصف مستوى أيضًا)

ويرمز لها بالرمز $ف_٢$ والتى كل منها يحقق أن : ٢ س + ٣ ص < ٦

ونستطيع من التوضيح السابق أن نستنتج أن :

- نصف المستوى $ف_١$ هو المنطقة التى تعبر عن مجموعة حل المتباينة : ٢ س + ٣ ص > ٦
- نصف المستوى $ف_١$ بالإضافة إلى المستقيم ل تعبر عن مجموعة حل المتباينة : ٢ س + ٣ ص ≥ ٦
- نصف المستوى $ف_٢$ هو المنطقة التى تعبر عن مجموعة حل المتباينة : ٢ س + ٣ ص < ٦
- نصف المستوى $ف_٢$ بالإضافة إلى المستقيم ل تعبر عن مجموعة حل المتباينة : ٢ س + ٣ ص ≤ ٦

خطوات حل متباينة الدرجة الأولى فى متغيرين بيانيًا

١ نمثل معادلة المستقيم المرتبطة بالمتباينة

وذلك بخط متصل فى حالة علامة التباين ≤ أ ، ≥ ، وبخط متقطع فى حالة علامة التباين < أ ، >

٢ نحدد نصف المستوى الذى تقع فيه منطقة الحل

وذلك بأخذ أى نقطة ($س_١$ ، $ص_١$) تنتمى إلى أحد نصفى المستوى كنقطة اختبار ونعوض بها فى المتباينة :

- فإن حققتها كانت منطقة الحل تقع فى هذا النصف.
- وإن لم تحققها كانت منطقة الحل تقع فى نصف المستوى الآخر الذى لا تنتمى إليه نقطة الاختبار.

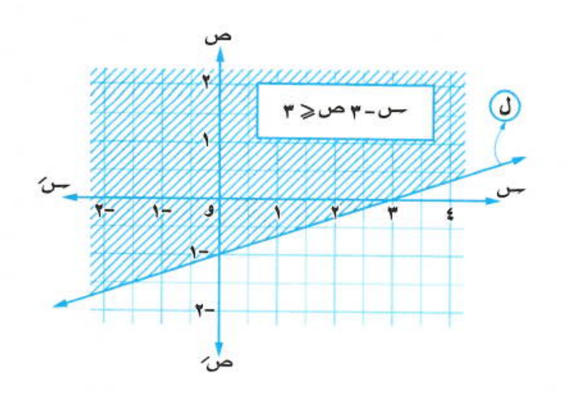
ملاحظة

للتسهيل يمكن اختيار نقطة الأصل (٠ ، ٠) كنقطة اختبار إذا كان المستقيم الحدى لا يمر بنقطة الأصل.

مثال ٤

مثل بيانيًا مجموعة الحل للمتباينة : س − ٣ ص ≥ ٣ فى ح × ح

الحل



[١] نرسم المستقيم الحدى ل الذى معادلته :

س − ٣ ص = ٣

(بخط متصل لأن علامة التباين ≥)

بالاستعانة بالجدول الآتى :

س	٠	٣
ص	−١	٠

[٢] نأخذ نقطة الأصل كنقطة اختبار :

، ∵ النقطة (٠ ، ٠) تحقق المتباينة : (لأن : ٠ ≥ ٣)

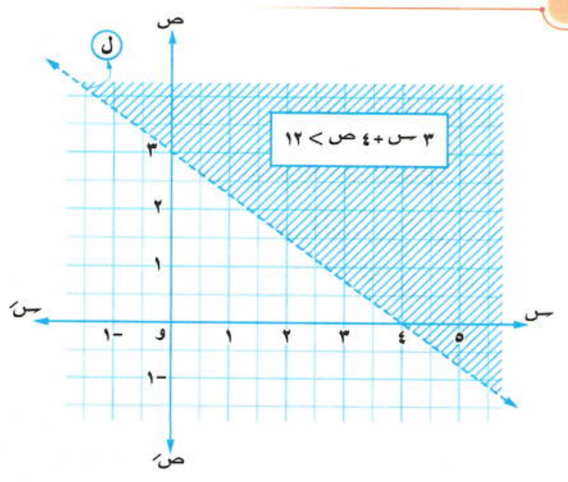
∴ مجموعة الحل للمتباينة هى المستقيم ل ∪ نصف المستوى الذى تنتمى إليه النقطة (٠ ، ٠) وتمثلها المنطقة المظللة فى الشكل السابق.

[لاحظ أنه يمكننا رسم المستقيم الحدى بدون تكوين الجدول السابق وذلك بالاستعانة بميل المستقيم والجزء المقطوع من محور الصادات كما درسنا فى الأعوام السابقة]

مثال ٥

مثل بيانيًا مجموعة الحل للمتباينة : ٣ س + ٤ ص > ١٢ فى ح × ح

الحل



[١] نرسم المستقيم الحدى ل الذى معادلته :

٣ س + ٤ ص = ١٢

(بخط متقطع لأن علامة التباين >)

بالاستعانة بالجدول الآتى :

س	٠	٤
ص	٣	٠

٢ نأخذ نقطة الأصل كنقطة اختبار

، ∵ (٠ ، ٠) لا تحقق المتباينة (لأن : ٠ < ١٢)

∴ مجموعة الحل للمتباينة هى نصف المستوى الذى لا تنتمى إليه النقطة (٠ ، ٠) وتمثلها المنطقة المظللة فى الشكل السابق.

ملاحظات

- المعادلة : ص = ٠ تمثل بيانيًا بمحور السينات.
- المعادلة : س = ٠ تمثل بيانيًا بمحور الصادات.
- المعادلة : ص = أ تمثل بيانيًا بمستقيم يوازى محور السينات ويمر بالنقطة (٠ ، أ)
- المعادلة : س = أ تمثل بيانيًا بمستقيم يوازى محور الصادات ويمر بالنقطة (أ ، ٠)
- معادلة المستقيم التى على الصورة : $\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = ١$ تمثل بيانيًا بمستقيم يمر بالنقطتين (أ ، ٠) ، (٠ ، ب)

حاول بنفسك

مثل بيانيًا مجموعة الحل للمتباينة : ٢ س − ٥ ص ≥ ١٠ فى ع × ع

حل أنظمة من المتباينات الخطية بيانيًا

لإيجاد الحل البيانى لمتباينتين نتبع الآتى :

١ نظلل المنطقة $س_١$ التى تمثل مجموعة الحل للمتباينة الأولى.

٢ نظلل المنطقة $س_٢$ التى تمثل مجموعة الحل للمتباينة الثانية.

فتكون مجموعة حل المتباينتين معًا تمثلها منطقة التظليل المشتركة س حيث س = $س_١ \cap س_٢$

مثال ٦

مثل بيانيًا مجموعة الحل للمتباينتين : س + ٣ ص ≥ ٣ ، ٢ س + ص ≥ ٤ فى ع × ع

الحل

١ نرسم المستقيم الحدى $ل_١$: س + ٣ ص = ٣ (بخط متصل)

س	٠	٣
ص	١	٠

، ∵ النقطة (٠ ، ٠) تحقق المتباينة (لأن : ٠ < ٣)

∴ المنطقة $س_١$ مجموعة حل المتباينة : س + ٣ ص ≥ ٣

يمثلها $ل_١ \cup$ نصف المستوى الذى تقع فيه نقطة الأصل [شكل (١)]

٢ نرسم المستقيم الحدى $ل_٢$: ٢ س + ص = ٤ (بخط متصل)

س	٠	٢
ص	٤	٠

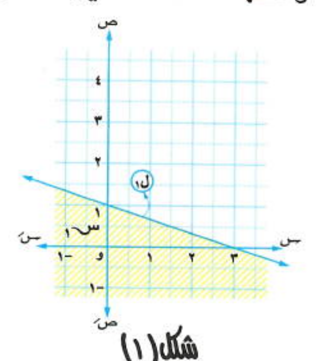
، ∵ النقطة (٠ ، ٠) تحقق المتباينة (لأن : ٠ < ٤)

∴ المنطقة $س_٢$ مجموعة حل المتباينة : ٢ س + ص ≥ ٤

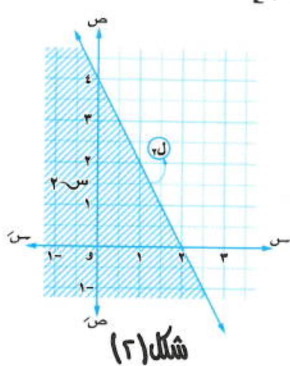
، يمثلها $ل_٢ \cup$ نصف المستوى الذى تقع فيه نقطة الأصل [شكل (٢)]

٣ مجموعة حل المتباينتين معًا هى : $س = س_{١} \cap س_{٢}$

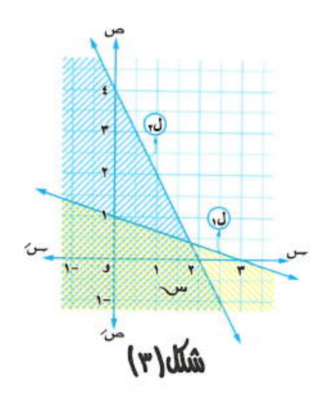
وتمثلها منطقة التظليل المشتركة [شكل(٣)]



شكل(١)



شكل(٢)



شكل(٣)

ملاحظة

محورا الإحداثيات السينى والصادى يقسمان المستوى إلى ٤ أرباع :

الربع الأول : حيث س > ٠ ، ص > ٠

، الربع الثانى : حيث س < ٠ ، ص > ٠

، الربع الثالث : حيث س < ٠ ، ص < ٠

، الربع الرابع : حيث س > ٠ ، ص < ٠

ص
س < ٠ ، ص > ٠ | س > ٠ ، ص > ٠
س َ — س
س < ٠ ، ص < ٠ | س > ٠ ، ص < ٠
ص َ

مثال ٧

مثل بيانيًا مجموعة الحل للمتباينات :

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، ص + ٣ س ≤ ٩ ، ص − س < ١ فى ح × ح

الحل

١ المتباينتان س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ مجموعة الحل لهما يمثلها و س ⟵ ∪ و ص ⟵ ∪ الربع الأول من المستوى.

٢ نرسم المستقيم الحدى $ل_{١}$: ص + ٣ س = ٩ (بخط متصل)

س	٢	٣
ص	٣	٠

، ∵ النقطة (٠ ، ٠) تحقق المتباينة (لأن : ٠ < ٩)

∴ المنطقة $س_{١}$ مجموعة حل المتباينة : ص + ٣ س ≤ ٩

، يمثلها $ل_{١}$ ∪ نصف المستوى الذى تقع فيه نقطة الأصل [شكل(١)]

٣ نرسم المستقيم الحدى $ل_{٢}$: ص − س = ١ (بخط متقطع)

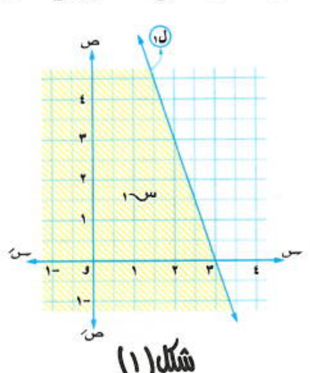
س	٠	−١
ص	١	٠

، ∵ النقطة (٠ ، ٠) تحقق المتباينة (لأن : ٠ < ١)

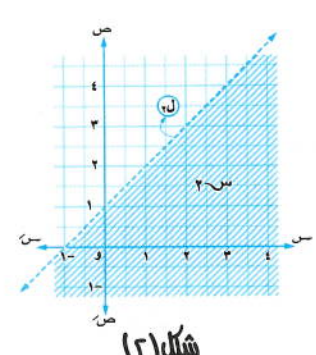
∴ المنطقة $س_{٢}$ مجموعة حل المتباينة : ص − س < ١

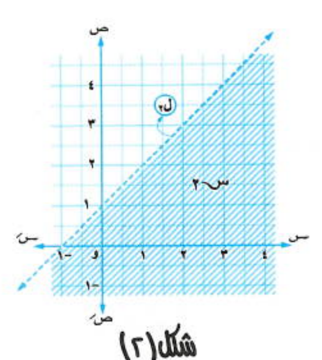
، يمثلها نصف المستوى الذى تقع فيه نقطة الأصل [شكل(٢)]

٤ س مجموعة الحل للمتباينات الأربعة تمثلها المنطقة الواقعة فى الربع الأول والمشتركة فى التظليل [**شكل(٣)**]



شكل (١)





شكل (٢)

شكل (٣)

ملاحظة

فى المثالين السابقين رسمنا رسمًا منفصلاً لتوضيح منطقة الحل لكل متباينة على حدة ثم جعلنا الشكل الأخير يوضح منطقة الحل لجملة المتباينات ويمكن للطالب بعد قليل من التمرين أن يستغنى عن هذه الأشكال ويكتفى بالشكل الأخير.

مثال ٨

مثل بيانيًا مجموعة الحل للمتباينتين :

٢ س + ص > ٦ ، ٤ س + ٢ ص ≤ ٤ فى ح × ح

الحل

١ نرسم المستقيم الحدى $ل_١$:

٢ س + ص = ٦ (بخط متقطع)

وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٦) ، (٣ ، ٠)

، ∵ النقطة (٠ ، ٠) لا تحقق المتباينة

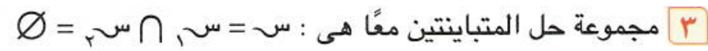
∴ مجموعة الحل $س_١$ يمثلها نصف المستوى

الذى لا تقع فيه نقطة الأصل.

٢ نرسم المستقيم الحدى $ل_٢$: ٤ س + ٢ ص = ٤

(بخط متصل) وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٢) ، (١ ، ٠)

، ∵ النقطة (٠ ، ٠) تحقق المتباينة.



∴ مجموعة الحل $س_٢$ يمثلها المستقيم $ل_٢$ ∪ نصف المستوى الذى تقع فيه نقطة الأصل.

٣ مجموعة حل المتباينتين معًا هى : س = $س_١ \cap س_٢$ = ∅

مثال ٩

مثل بيانيًا مجموعة الحل لجملة المتباينات الآتية :

٣ س + ٢ ص ≤ ٦ ، ص + ٣ ≥ ٠ ، س − ص > ٠ في ع × ع

الحل

١ نرسم المستقيم الحدى

$ل_١$: ٣ س + ٢ ص = ٦ (خط متصل)

وهو يمر بالنقطتين (٢ ، ٠) ، (٠ ، ٣)

، ∵ النقطة (٠ ، ٠) تحقق

المتباينة (لأن : ٠ < ٦)

∴ مجموعة الحل $س_١$ يمثلها

المستقيم $ل_١$ ∪ نصف المستوى

الذى تقع فيه نقطة الأصل.

٢ نرسم المستقيم الحدى $ل_٢$: ص = −٣ (خط متصل)

[مستقيم يوازى محور السينات ويمر بالنقطة (٠ ، −٣)]

، ∵ النقطة (٠ ، ٠) تحقق المتباينة (لأن : ٠ > −٣)

∴ مجموعة الحل $س_٢$ يمثلها المستقيم $ل_٢$ ∪ نصف المستوى الذى تقع فيه نقطة الأصل.

٣ نرسم المستقيم الحدى $ل_٣$: س − ص = ٠ (خط متقطع)

وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٠) ، (١ ، ١)

، ∵ النقطة (٠ ، ٢) لا تحقق المتباينة (لأن : −٢ ≯ ٠)

∴ مجموعة الحل $س_٣$ يمثلها نصف المستوى الذى لا تقع فيه النقطة (٠ ، ٢)

٤ مجموعة حل المتباينات الثلاث معًا هى : س = $س_١$ ∩ $س_٢$ ∩ $س_٣$

وتمثلها المنطقة المظللة.

مثال ١٠

مصنع لإنتاج لعب الأطفال ينتج لعبة على شكل سيارة وأخرى على شكل طائرة يعمل بطاقة إنتاج يومى قدرها ٢٥٠ لعبة على الأكثر فإذا كانت تكلفة إنتاج السيارة الواحدة ١٥ جنيهًا ، تكلفة إنتاج الطائرة الواحدة ١٠ جنيهات والتكلفة الإجمالية للإنتاج اليومى لا تزيد عن ٣٠٠٠ جنيه.

اكتب نظام متباينات خطية يمثل ما سبق ثم مثل بيانيًا منطقة حل هذا النظام.

الحـــل

بفرض عدد السيارات المنتجة س سيارة ، الطائرات ص طائرة.

- **نظام المتباينات هو :**

١ س ≥ ٠ ٢ ص ≥ ٠ ٣ س + ص ≤ ٢٥٠

٤ ١٥ س + ١٠ ص ≤ ٣٠٠٠ **أى أن** ٣ س + ٢ ص ≤ ٦٠٠

- **تعين المنطقة التى تمثل مجموعة الحل للمتباينات كالتالى :**

١ المتباينتان س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ يمثلها وس ∪ وص ∪ الربع الأول.

٢ نرسم المستقيم الحدى ل١ : س + ص = ٢٥٠ (بخط متصل)

وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٢٥٠) ، (٢٥٠ ، ٠)

، ∵ النقطة (٠ ، ٠) تحقق المتباينة (لأن : ٠ < ٢٥٠)

∴ مجموعة الحل لهذه المتباينة يمثلها المستقيم ل١ ∪ نصف المستوى الذى تقع فيه نقطة الأصل.

٣ نرسم المستقيم الحدى ل٢ : ٣ س + ٢ ص ≤ ٦٠٠ (بخط متصل)

وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٣٠٠) ، (٢٠٠ ، ٠)

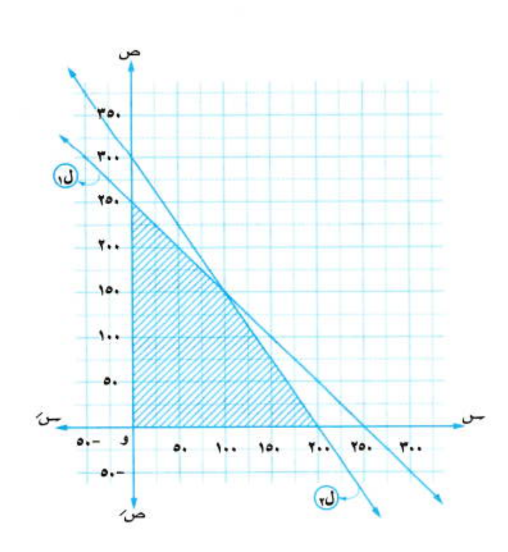
، ∵ النقطة (٠ ، ٠) تحقق المتباينة

(لأن : ٠ < ٦٠٠)

∴ مجموعة الحل لهذه المتباينة يمثلها

المستقيم ل٢ ∪ نصف المستوى الذى

تقع فيه نقطة الأصل.



٤ الأزواج المرتبة التى كل من إحداثيها السينى والصادى أعداد صحيحة بالمنطقة المظللة بالشكل البيانى مجموعة الحل لنظام المتباينات المطلوب.

تمارين 6



على المتباينة الخطية - حل أنظمة من المتباينات الخطية بيانيًا

من أسئلة الكتاب المدرسى • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مجموعة حل المتباينة : $-١ < -س \leq ١$ فى ح هى ....

(أ) $[-١ ، ١[$ (ب) ح $-]-١ ، ١]$ (جـ) $\{٠ ، ١\}$ (د) $]-١ ، ١]$

(٢) مجموعة حل المتباينة : $١ \leq ٢س - ١ < ٥$ فى ح هى ....

(أ) $]١ ، ٣[$ (ب) $]١ ، ٣]$ (جـ) $[١ ، ٣[$ (د) $[١ ، ٣]$

(٣) الربع الذى يمثل حل نظام المتباينتين : $س > ٠$ ، $ص > ٠$ هو ....

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

(٤) المنطقة التى تمثل مجموعة حل المتباينتين : $ص > ٠$ ، $س < ٠$ فى ح × ح هى الربع ....

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

(٥) النقطة التى تنتمى لمجموعة حل المتباينتين : $س > ٠$ ، $ص < ٠$ هى ....

(أ) $(٠ ، -٣)$ (ب) $(٢ ، ٠)$ (جـ) $(٢ ، -٣)$ (د) $(٢ ، ٣)$

(٦) النقطة التى تنتمى إلى مجموعة حل المتباينتين : $س > ٢$ ، $ص > ١$ معًا هى ....

(أ) $(١ ، ٢)$ (ب) $(٢ ، ١)$ (جـ) $(٣ ، ١)$ (د) $(٣ ، ٢)$

(٧) النقطة التى تقع فى منطقة حل المتباينة : $س + ص \geq ٣$ هى ....

(أ) $(١ ، ٣)$ (ب) $(٢ ، -٣)$ (جـ) $(٢ ، ٣)$ (د) $(١ ، ٤)$

(٨) النقطة .... لا تقع فى منطقة حل المتباينة : $٢س + ص \leq ٥$

(أ) $(-١ ، ٦)$ (ب) $(٥ ، -١)$ (جـ) $(١ ، ٤)$ (د) $(٢ ، ٤)$

(٩) النقطة $(٣ ، ٢)$ تنتمى لمجموعة حل المتباينة : $٣س - ص$ ١

(أ) $>$ (ب) $\geq$ (جـ) $<$ (د) أ ، ب معًا

(١٠) إذا كانت النقطة $(٢ ، ٣)$ تنتمى لمجموعة حل المتباينة $س + ص \geq أ$ فإن : ....

(أ) $أ > ٥$ (ب) $أ \leq ٥$ (جـ) $أ < ٥$ (د) $أ < ٠$

(١١) إذا كانت : $(١ ، ص)$ تنتمى إلى منطقة حل المتباينة : $س + ٢ص < ٧$ فإن : ....

(أ) $ص < ٣$ (ب) $ص > ٣$ (جـ) $ص = ٣$ (د) $ص > ٧$

(١٢) النقطتان (٣ ، ٥) ، (١ ، ٥) تنتميان لمجموعة حل المتباينة : س + ص ٨

(أ) $<$ (ب) $\leq$ (جـ) $>$ (د) $\geq$

(١٣) النقطة التى لا تنتمى إلى مجموعة حل المتباينات : س ≤ ٢ ، ص ≤ ٠ ، س + ص > ٣

هى ....

(أ) (٣ ، ١) (ب) (٢ ، ٢) (جـ) (٣ ، ٢) (د) (٢ ، ١)

(١٤) النقطة التى تنتمى إلى نظام حل المتباينات : س > ٣ ، ص < ١ ، س + ص ≥ ٥

هى ....

(أ) (٦ ، −٢) (ب) (١ ، −٢) (جـ) (٤ ، ٤) (د) (٣ ، −٢)

(١٥) النقطة التى تنتمى إلى مجموعة حل المتباينتين : ٢ س + ص < ٤ ، س + ٣ ص < ٦ هى ....

(أ) (١ ، −٤) (ب) (٢ ، ١) (جـ) (١ ، ٢) (د) (٣ ، −١)

(١٦) النقطة التى تنتمى إلى مجموعة حل نظام المتباينات : س ≤ ٠ ، ص ≤ ٠ ، س + ٢ ص ≤ ٤

، ٣ س + ٢ ص ≤ ٨ فى ح × ح هى ....

(أ) (٣ ، ٠) (ب) (٢ ، ١) (جـ) (٠ ، ٢) (د) (٠ ، ٣)

(١٧) فى المستوى الديكارتى : المنطقة التى تمثل مجموعة حل المتباينات : ١ ≤ س ≤ ٥ ، ٢ ≤ ص ≤ ٤

تكون منطقة ....

(أ) دائرية. (ب) مربعة. (جـ) مثلثة. (د) مستطيلة.

(١٨) مجموعة حل المتباينات : س ≤ ٠ ، ص ≤ ٠ ، س + ص ≥ ٤ تمثل منطقة مثلثة رؤوسها

النقط ....

(أ) (٠ ، ٤) ، (٠ ، ٠) ، (٤ ، ٤) (ب) (٠ ، ٠) ، (٤ ، ٠) ، (٠ ، ٤)

(جـ) (٤ ، ٤) ، (٠ ، ٤) ، (٤ ، ٠) (د) (٠ ، ٠) ، (٤ ، ٠) ، (٤ ، ٤)

(١٩) إذا كانت س هى مجموعة حل المتباينة : س + ص ≥ ٥ ، ص هى مجموعة حل المتباينة :

س + ص > ٥ فإن : ....

(أ) س = ص (ب) س ⊂ ص

(جـ) ص ⊂ س (د) س ∩ ص = ∅

(٢٠) إذا كانت أ هى مجموعة حل المتباينة : س + ص < ٤ ، ب هى مجموعة حل المتباينة : س + ص > ٤

فإن : ....

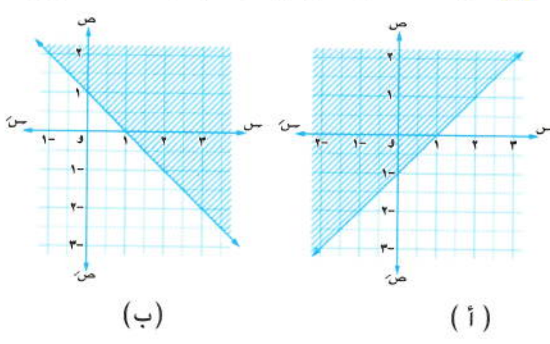
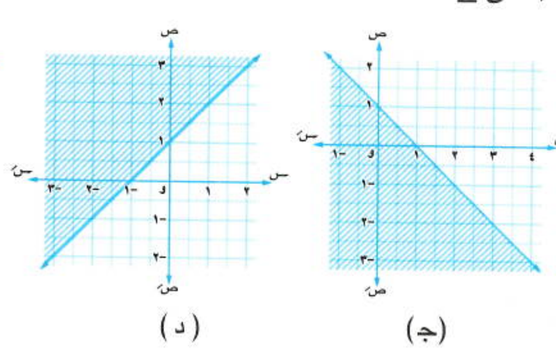
(أ) أ = ب (ب) أ ⊂ ب (جـ) ب ⊂ أ (د) أ ∩ ب = ∅

(٢١) إذا كانت النقط : (٠ ، ٠) ، (٢ ، ٠) ، (٠ ، ٤) هى رؤوس منطقة حل المتباينات :

س ≤ ٠ ، ص ≤ ٠ ، ٢ س + ص ≥ حـ فإن : حـ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٢٢) أي الأشكال الآتية يمثل مجموعة حل المتباينة : س + ص ≥ ١ ؟

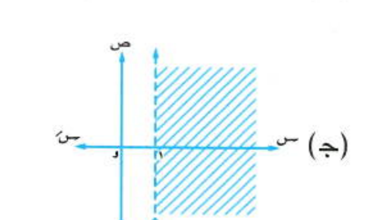



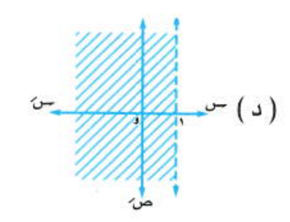
(أ)　　(ب)　　(جـ)　　(د)

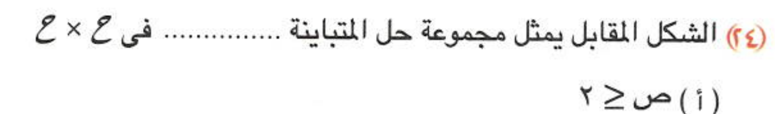
(٢٣) أي من الأشكال البيانية الآتية يمثل مجموعة حل للمتباينة : ٥ − ٢ س > ٣ في ح × ح ؟

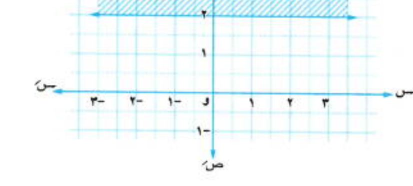
(أ) س　١

(ب) س


(جـ)


(د)



(٢٤) الشكل المقابل يمثل مجموعة حل المتباينة .... في ح × ح



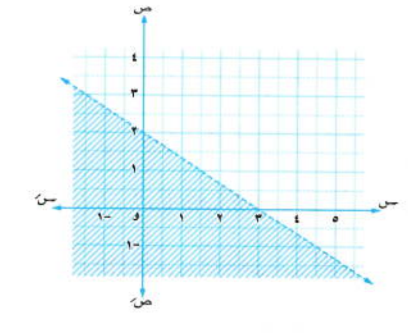

(أ) ص ≤ ٢

(ب) ص < ٢

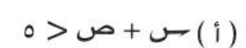
(جـ) ص ≥ ٢

(د) ص > ٢

(٢٥) الشكل المقابل يمثل مجموعة حل المتباينة .... في ح × ح



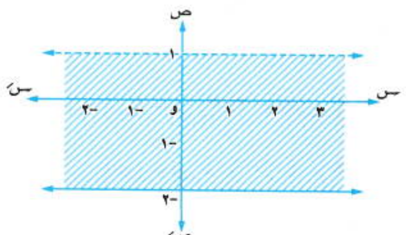
(أ) س + ص > ٥


(ب) ٢ س + ٣ ص ≤ ٦

(جـ) ٣ س + ٢ ص > ٦

(د) ٢ س + ٣ ص < ٦

(٢٦) الشكل المقابل يمثل مجموعة حل المتباينة .... في ح × ح



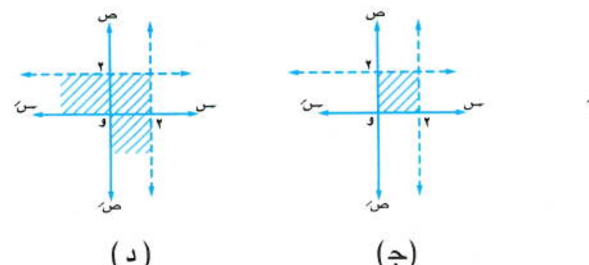
(أ) −٢ ≤ س < ١

(ب) −٢ < س ≤ ١

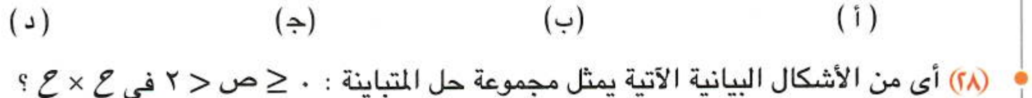
(جـ) −٢ ≤ ص < ١

(د) −٢ < ص ≤ ١

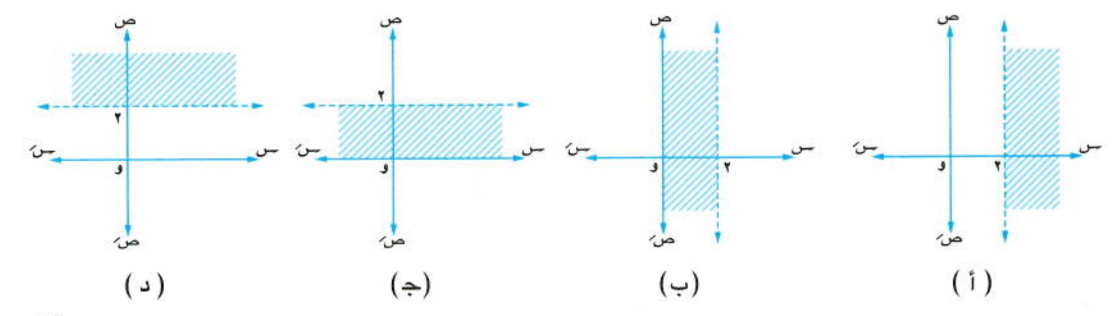
(٢٧) أى من الأشكال البيانية الآتية يمثل مجموعة حل المتباينة : ٠ ≤ س < ٢ فى ح × ح ؟



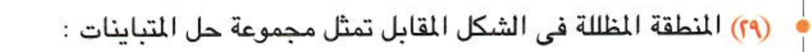
(أ) (ب) (جـ) (د)



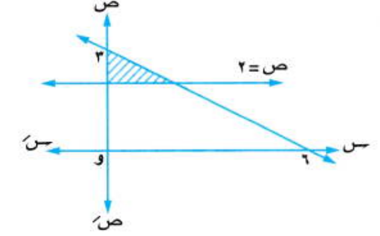
(٢٨) أى من الأشكال البيانية الآتية يمثل مجموعة حل المتباينة : ٠ ≤ ص < ٢ فى ح × ح ؟



(أ) (ب) (جـ) (د)



(٢٩) المنطقة المظللة فى الشكل المقابل تمثل مجموعة حل المتباينات :



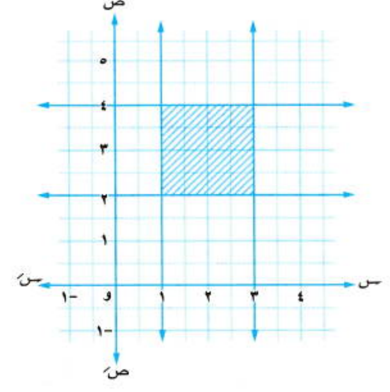
ص ≤ ٢ ، س ≤ ٠ ، ....

(أ) س + ٢ ص − ٦ ≥ ٠ . (ب) س + ٢ ص + ٦ ≥ ٠ .

(جـ) س + ٢ ص − ٦ ≤ ٠ . (د) س + ٢ ص + ٦ ≤ ٠ .



(٣٠) الجزء المظلل فى الشكل المقابل يمثل مجموعة حل المتباينات ....



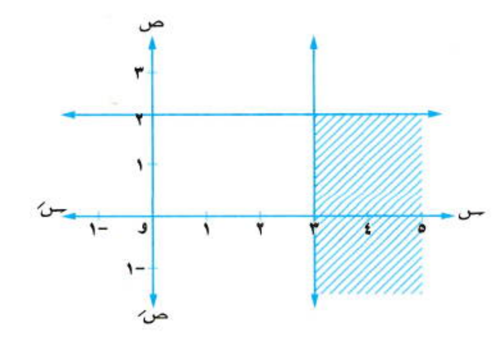
(أ) س > ١ ، ص < ٢

(ب) ١ < س < ٣ ، ٢ < ص < ٤

(جـ) ١ ≤ س ≤ ٣ ، ٢ ≤ ص ≤ ٤

(د) س + ص ≤ ٣ ، س − ص ≥ ٧

(٣١) الجزء المظلل فى الشكل المقابل يمثل مجموعة حل المتباينات ....



(أ) س < ٣ ، ص > ٢

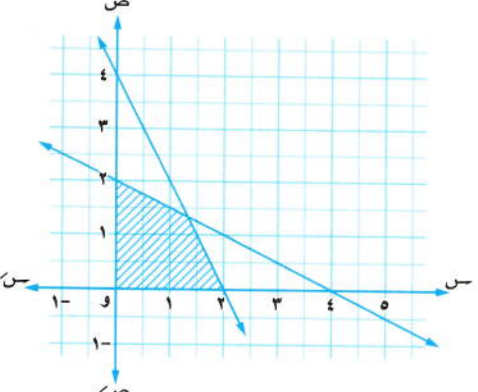
(ب) س ≤ ٣ ، ص ≤ ٢

(جـ) س + ١ > ٤ ، ص + ١ > ٣

(د) س + ١ ≤ ٤ ، ٢ ≤ ص ≤ ٤

(٣٢) الجزء المظلل فى الشكل المقابل





يمثل مجموعة حل المتباينات ....

(أ) س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س + ٢ ص ≤ ٤
، ٢ س + ص ≤ ٤

(ب) س + ٢ ص ≤ ٤ ، ٢ س + ص ≤ ٤

(جـ) س > ٠ ، ص > ٠ ، س + ٢ ص < ٤
، ٢ س + ص < ٤

(د) ٤ س + ٢ ص ≤ ٠ ، ٢ س + ٤ ص ≤ ٠ .

(٣٣) المنطقة المظللة فى الشكل المقابل تمثل مجموعة حل المتباينات

س ≤ ص ، س ≤ ٣ ، ....

(أ) ٤ س + ٣ ص ≥ ١٢

(ب) ٤ س + ٣ ص > ١٢

(جـ) ٣ س + ٤ ص ≥ ١٢

(د) ٣ س + ٤ ص + ١٢ ≥ ٠

(٣٤) الجزء المظلل فى الشكل المقابل

يمثل مجموعة حل المتباينة

أ س + ب ص ≤ حـ حيث ....

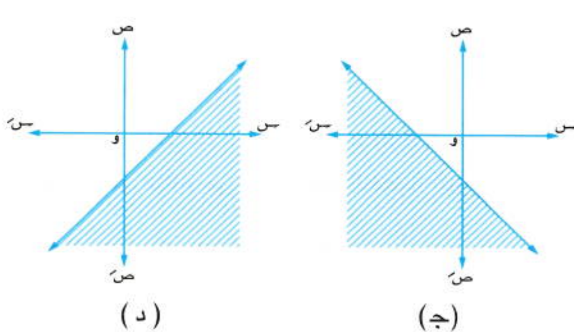
(أ) أ > ٠ ، ب > ٠ ، حـ > ٠

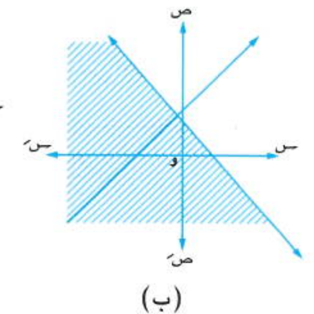
(ب) أ > ٠ ، ب < ٠ ، حـ < ٠

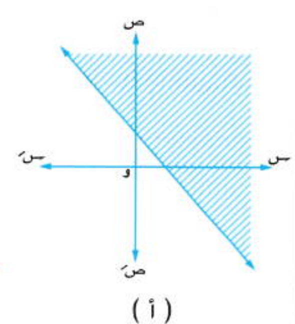
(جـ) أ > ٠ ، ب < ٠ ، حـ > ٠

(د) أ < ٠ ، ب > ٠ ، حـ < ٠

(٣٥) أى التمثيلات الآتية تصلح لتمثيل المتباينة : أ س + ب ص ≥ حـ حيث أ ، ب ، حـ ∈ ع+ ؟



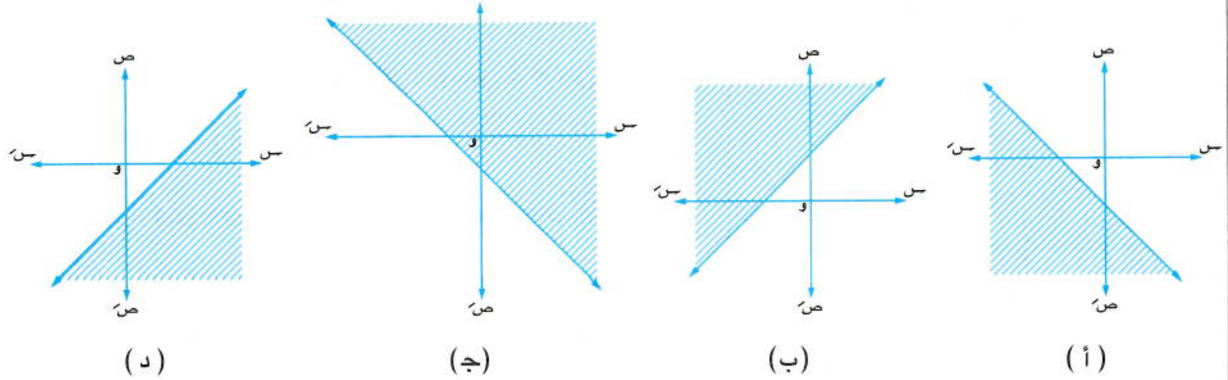




(أ) (ب) (جـ) (د)

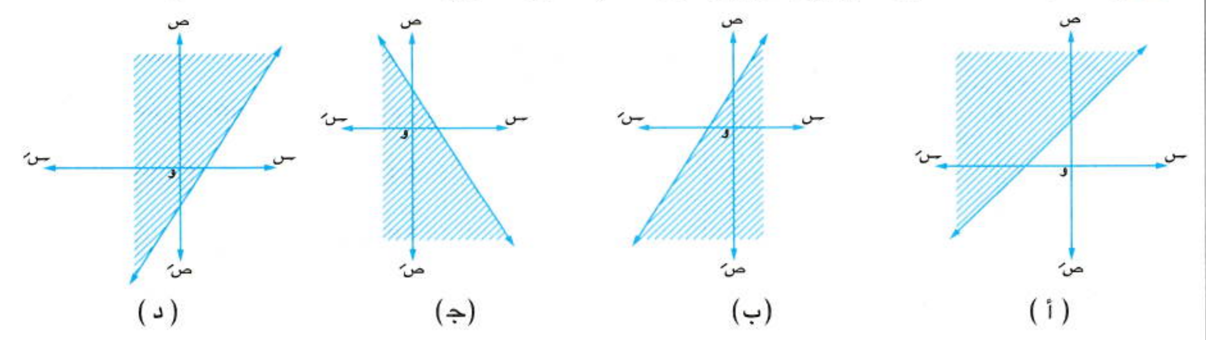


(٣٦) أى التمثيلات الآتية تصلح لتمثيل المتباينة : أ س + ب ص ≥ حـ حيث أ ، ب ∈ $ح^{+}$ ، حـ ∈ $ح^{-}$ ؟



(أ) (ب) (جـ) (د)

(٣٧) إذا كان أ ، ب عددين حقيقيين موجبين فإن أنسب تمثيل للمتباينة : ص ≥ أ س + ب هو ....



(أ) (ب) (جـ) (د)

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد مجموعة الحل فى ح لكل من المتباينات التالية ممثلًا إياها على خط الأعداد :

(١) ٢ س − ٣ ≤ ٥
(٢) ٤ − ٢ س ≤ ٦
(٣) ٣ س − ٩ > ٦ س
(٤) ٦ + س < ٣ س + ٢ ≤ ١٤ + س
(٥) ٢ س − ١ < س + ٣ < ٣ س + ٧

---

٢ أوجد مجموعة الحل فى ح × ح لكل من المتباينات التالية بيانيًا :

(١) ٢ س − ص ≥ ٦
(٢) س + ص < ٣
(٣) س ≥ −٢
(٤) ص ≤ ٥
(٥) ص > ٢ س − ٣
(٦) س < ٢ ص − ٤
(٧) ص ≥ ٢ س
(٨) −٢ < س ≤ ٤
(٩) −١ ≤ ص ≤ ٢

---

٣ حل كل نظام من المتباينات الخطية التالية بيانيًا فى ح × ح :

(١) س ≥ ١ ، ص < ٣
(٢) س − ٢ < ٠ ، ص > ١
(٣) س ≥ ٠ ، س + ٢ ص > ٤
(٤) −١ ≤ س < ٢ ، ٠ ≤ ص < ٣

(٥) ص ≤ ٢ س + ٦ ، ص + ٣ س < −١
(٦) ص > س ، س − ص > ١
(٧) ٢ س − ص ≤ ٥ ، ٢ ص ≤ ٢٠ + ٤ س
(٨) س + ص ≥ ٣ ، س − ص > ١
(٩) س > ١ ، س + ص ≥ −١
(١٠) ص > س + ١ ، ص > س − ١

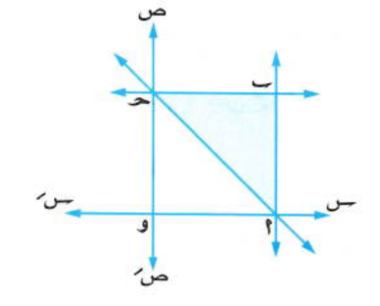
٤ حل كل نظام من المتباينات الخطية التالية بيانيًا فى ح × ح :

(١) س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س + ص ≤ ٥
(٢) س ≤ ٤ ، ص > س + ٢ ، س + ٢ ص ≥ −٢
(٣) س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، ص ≤ ٧ − ٢ س ، س + ٢ ص ≥ ٨
(٤) س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، ٢ س + ص ≤ ٦ ، س + ص ≤ ٤
(٥) ص − س > ٠ ، ٢ س + ٢ ص ≤ ١٢ ، ص > ٦ + ٢ س
(٦) س + ٤ ص > ٤ ، ٤ س + ص ≥ ٢ ، س − ص < ١
(٧) ٠ ≤ س ≤ ٥ ، ٠ ≤ ص ≤ ٣ ، س ≥ ص − ١
(٨) س ≤ ٤ ، ص ≥ ٦ ، ٢ ص − س ≥ ٢ ، ص + ٢ س ≥ ٦
(٩) س + ٤ ص > ٨ ، س − ٢ ص > ٦ ، ٠ ≤ س < ٤

٥ فى الشكل المقابل :

أ و حـ ب مربع مساحة سطحه ١٦ وحدة مربعة.

اكتب المتباينات التى تحقق مجموعة حل المنطقة المظللة بالشكل المقابل.



ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت النقطة (أ ، ب) لا تنتمى لمجموعة حل المتباينة : ٢ س + ص > ٣ فإن ....

(أ) ٢ أ + ب > ٣ (ب) ٢ أ + ب < ٣ (جـ) ٢ أ + ب ≤ ٣ (د) ٢ أ − ب > ٣

(٢) أى المتباينات الآتية لا تقع مجموعة حلها فى الربع الثانى أو الثالث ؟

(أ) س > ٠ (ب) س < ٠ (جـ) ص > ٠ (د) ص < ٠

(٣) إذا كانت مجموعة حل المتباينة : أ س + ص > ٢ لا تقع فى الربع الثالث أو الرابع فإن ....

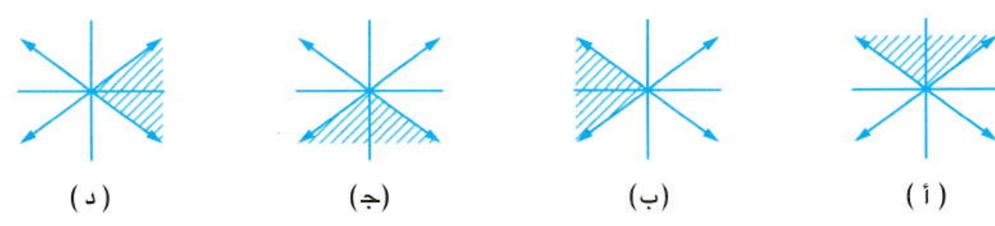
(أ) أ > ٠ (ب) أ < ٠ (جـ) أ = ٠ (د) أ > ٢

(٤) مجموعة حل المتباينتين : س + ص > ٤ ، س − ص < ٤ لا تقع فى الربع ....

(أ) الأول. (ب) الأول أو الثانى.

(جـ) الثانى أو الثالث. (د) الثالث أو الرابع.

(٥) مجموعة حل المتباينة : − س ≤ ص ≤ س هى ....



(أ) (ب) (جـ) (د)

(٦) إذا كان س ، ص عددين صحيحين فإن عدد حلول نظام المتباينات :

س > ٠ ، ص > ٠ ، س + ٢ ص ≤ ٦ ، ٢ س + ص ≤ ٦ يساوى ....

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) عدد لا نهائى.

(٧) إذا كانت النقطتان (١ ، ٤) ، (٤ ، ١) تنتميان لمجموعة حل المتباينة : أ س + ب ص ≤ حـ

فأى النقط الآتية من المؤكد أن تنتمى لمجموعة الحل أيضًا ؟

(أ) (٠ ، ٥) (ب) (٢ ، ٤) (جـ) (٢ ، ٣) (د) (٤ ، ٢)

(٨) إذا كانت النقطة (٤ ، ك) تقع على محور تماثل منطقة حل المتباينات

س + ص > أ ، س − ص > أ فإن : ك = ...

(أ) ٤ (ب) − ٤ (جـ) أ (د) صفر

(٩) إذا كانت مجموعة حل المتباينات : س + ٢ ص > ٣ ، أ س + ٤ ص < ١ هى ∅

فإن : أ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(١٠) إذا كان : س + ص ≤ أ ، س + ص ≥ ب وكانت مجموعة حل النظام تساوى ∅ فإن ....

(أ) أ < ب (ب) أ > ب (جـ) أ = ب (د) أ ≥ ب

تطبيق حياتى

يريد مربى حيوانات عمل حظيرة مستطيلة الشكل ، يجب أن لا يقل طول الحظيرة عن ٨٠ مترًا وأن لا يزيد محيطها عن ٣١٠ أمتار فما الأبعاد الممكنة للحظيرة ؟ (اكتب أربعة أبعاد ممكنة)

الدرس 2

البرمجة الخطية والحل الأمثل



* **البرمجة الخطية :** هى إحدى الطرق التى تستخدم للحصول على أفضل الحلول لتحقيق هدف معين فى ضوء القيود والإمكانيات المتاحة والوصول إلى الحل الأمثل.
بحيث يكون الهدف الذى نسعى لتحقيقه على صورة دالة خطية تسمى «**دالة الهدف**»
وتكون القيود والإمكانيات المتاحة على صورة مجموعة من المتباينات الخطية.

* **تعتمد طريقة البرمجة الخطية على :**

١ تمثيل نظام المتباينات الذى يعبر عن القيود بحيث نحصل على منطقة مضلعة تمثل «**مجموعة الحل**» وغالبًا ما تشتمل القيود على المتباينتين س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ وهذا يعنى أن منطقة الحل تقع فى الربع الأول.

٢ **تعيين دالة الهدف :** ر = ل س + م ص حيث ل ، م ثابتان فنرسم المستقيم ل س + م ص = ٠ الذى يمر بنقطة الأصل ثم نجعل هذا المستقيم يتحرك موازيًا لنفسه لأعلى حتى يمر برءوس المضلع الممثل لمجموعة حل المتباينات وحيث إن جميع هذه المستقيمات المتوازية تكون متساوية فى الميل ومختلفة فقط فى قيمة الحد المطلق (ر) وكل نقطة (س ، ص) تنتمى إلى مجموعة الحل وتنتمى لنفس المستقيم تعطى قيمة وحيدة للعدد (ر) وبالتالى نستطيع أن نحدد أكبر قيمة أو أصغر قيمة لدالة الهدف .

فمثلًا إذا كانت مجموعة الحل الممثلة لمجموعة المتباينات التى تمثل القيود هى المنطقة المظللة فى الشكل المقابل والمطلوب هو إيجاد أكبر وأقل قيمة للمقدار : ر = ٣ س + ٢ ص
فإننا نعوض بالنقط أ ، ب ، حـ ، ء (رؤوس المضلع) فى دالة الهدف

لاحظ أن

قيمة دالة الهدف عند أى نقطة تقع على ضلع من أضلاع المنطقة المظللة تكون محصورة بين قيمتيهما عند رأسى المضلع الواصل بينهما هذا الضلع

∴ $[ر]_{أ} = ٣ \times ١ + ٢ \times ٤ = ١١$ ، $[ر]_{ب} = ٣ \times ٤ + ٢ \times ١ = ١٤$

، $[ر]_{حـ} = ٣ \times ٥ + ٢ \times ٢ = ١٩$ ، $[ر]_{ء} = ٣ \times ٦ + ٢ \times ٥ = ٢٨$

وبالتالى تكون أكبر قيمة هى ٢٨ وذلك عند النقطة ء (٦ ، ٥) وأقل قيمة هى ١١ وذلك عند النقطة أ (١ ، ٤)

مثال ١

عين مجموعة حل المتباينات الآتية معًا بيانيًا :

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س + ٢ ص ≤ ٨ ، ٣ س + ٢ ص ≤ ١٢

ثم أوجد من مجموعة الحل قيم (س ، ص) التى تجعل (ر) أكبر ما يمكن حيث : ر = ٥٠ س + ٧٥ ص

الحل

أولاً : نعين المنطقة التى تمثل مجموعة الحل للمتباينات :

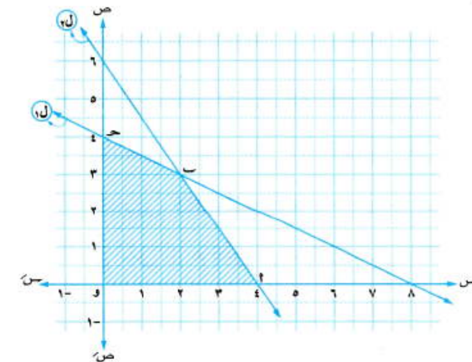
١ المتباينتان : س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ يمثلهما و س ⋃ و ص ⋃ الربع الأول.

٢ نرسم المستقيم الحدى $ل_١$: س + ٢ ص = ٨ (بخط متصل) وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٤) ، (٨ ، ٠)

٣ نرسم المستقيم الحدى $ل_٢$: ٣ س + ٢ ص = ١٢ (بخط متصل)

وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٦) ، (٤ ، ٠)

∴ مجموعة حل المتباينات تمثلها المنطقة المظللة بالشكل البيانى وهى المنطقة المضلعة أ ب حـ و



لإيجاد نقطة ب جبريًا

نحل المعادلتين الممثلتين بالمستقيمين $ل_١$ ، $ل_٢$ حيث :

$ل_١$: س + ٢ ص = ٨ ، $ل_٢$: ٣ س + ٢ ص = ١٢ آنيًا

فنجد أن : ب = (٢ ، ٣)

ثانيًا : نحدد رؤوس منطقة الحل :

رؤوس منطقة الحل هى : أ (٤ ، ٠) ، ب (٢ ، ٣) ، حـ (٠ ، ٤) ، و (٠ ، ٠)

ثالثًا : نحدد قيمة دالة الهدف عند كل رأس :

∵ دالة الهدف ر = ٥٠ س + ٧٥ ص

∴ $[ر]_{أ} = ٥٠ \times ٤ + ٧٥ \times ٠ = ٢٠٠$ ، $[ر]_{ب} = ٥٠ \times ٢ + ٧٥ \times ٣ = ٣٢٥$

، $[ر]_{حـ} = ٥٠ \times ٠ + ٧٥ \times ٤ = ٣٠٠$ ، $[ر]_{و} = ٥٠ \times ٠ + ٧٥ \times ٠ = ٠$

∴ أكبر قيمة لدالة الهدف هى ٣٢٥ وذلك عند النقطة ب (٢ ، ٣)

تطبيقات حياتية على البرمجة الخطية

المشكلات الحياتية المرتبطة بالبرمجة الخطية يمكن التعامل معها بالخطوات التالية :

١ تحليل الموقف أو المشكلة وذلك بتحديد المتغيرات والقيود والمعلومات المتاحة وتنظيمها فى جدول.

٢ ترجمة القيود فى صورة نظام من المتباينات الخطية.



٣ كتابة دالة الهدف.

٤ تمثيل نظام المتباينات الخطية بيانيًا وتحديد منطقة الحل.

٥ تحديد رؤوس منطقة الحل.

٦ إيجاد دالة الهدف عند كل رأس من الرؤوس السابقة لتحديد الرأس الذى يتحقق عنده الهدف المطلوب.

مثال ٢

مخبز ينتج نوعين من الكعك ، يلزم للكعكة من النوع الأول ٢٠٠ جرام من الدقيق ، ٢٥ جرامًا من الزبد ، ويلزم للكعكة من النوع الثانى ١٠٠ جرام من الدقيق ، ٥٠ جرامًا من الزبد ، فإذا كانت كمية الدقيق المتاحة هى ٤ كجم فقط وكمية الزبد المتاحة هى $\frac{1}{4}$١ كجم فقط فأوجد أكبر عدد ممكن من الكعك يمكن عمله.

الحل

* **نفرض أن :** عدد الكعك من النوع الأول = س كعكة ، عدد الكعك من النوع الثانى = ص كعكة

* **ننظم المعلومات المتاحة فى المشكلة فى جدول :**

	النوع الأول	النوع الثانى	الكمية المتاحة
دقيق	٢٠٠	١٠٠	٤٠٠٠
زبد	٢٥	٥٠	١٢٥٠

* **نترجم البيانات والقيود فى صورة نظام من المتباينات :**

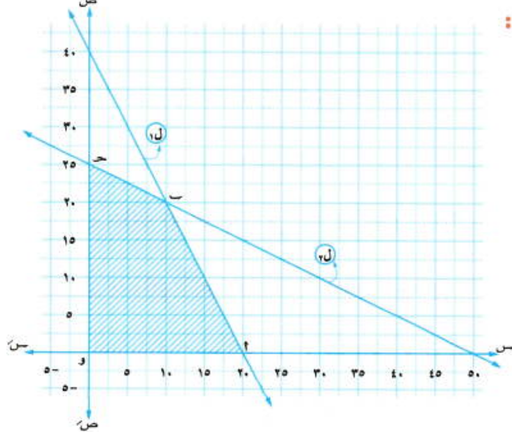
١ س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

٢ ٢٠٠ س + ١٠٠ ص ≤ ٤٠٠٠ **أى أن** ٢ س + ص ≤ ٤٠

٣ ٢٥ س + ٥٠ ص ≤ ١٢٥٠ **أى أن** س + ٢ ص ≤ ٥٠

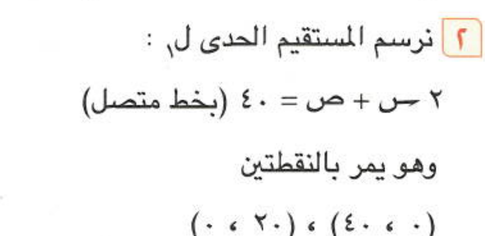
* **نكتب دالة الهدف :** م = س + ص حيث م أكبر ما يمكن.

* **تمثيل نظام المتباينات الخطية بيانيًا وتحديد منطقة الحل :**



١ المتباينتان س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

يمثلهما وس ∪ وص ∪ الربع الأول.



٢ نرسم المستقيم الحدى ل١ :

٢ س + ص = ٤٠ (بخط متصل)

وهو يمر بالنقطتين

(٠ ، ٤٠) ، (٢٠ ، ٠)

٣ نرسم المستقيم الحدى $ل_٣$: س + ٢ ص = ٥٠ (بخط متصل) وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٢٥) ، (٥٠ ، ٠)

∴ مجموعة حل المتباينات تمثلها المنطقة المظللة بالشكل البيانى وهى المنطقة المضلعة ٲ ب حـ و

* **نحدد رؤوس منطقة الحل :**

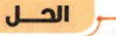
رؤوس منطقة الحل هى : ٲ (٢٠ ، ٠) ، ب (١٠ ، ٢٠) ، حـ (٠ ، ٢٥) ، و (٠ ، ٠)

* **نحدد قيمة دالة الهدف عند كل رأس :**

∵ دالة الهدف ر = س + ص ∴ $[ر]_و$ = ٠ + ٠ = صفر ، $[ر]_ٲ$ = ٢٠ + ٠ = ٢٠

، $[ر]_ب$ = ١٠ + ٢٠ = ٣٠ ، $[ر]_{حـ}$ = ٠ + ٢٥ = ٢٥

∴ أكبر عدد من الكعك يتم صنعه هو ٣٠ كعكة منها ١٠ من النوع الأول ، ٢٠ من النوع الثانى.



مثال ٣

مصنع طاقته الإنتاجية ١٢٠ وحدة على الأكثر من نوعين مختلفين من السلع ويحقق ربحًا فى كل وحدة من النوع الأول ١٥ جنيهًا وربحًا لكل وحدة من النوع الثانى ٨ جنيهات ، وكان ما يباع من النوع الثانى لا يقل عن نصف ما يباع من النوع الأول.

أوجد عدد الوحدات التى يجب إنتاجها من كل نوع لكى يحقق المصنع أكبر ربح ممكن.

الحل

* **نفرض أن :** عدد وحدات النوع الأول = س ، عدد وحدات النوع الثانى = ص

* **ننظم المعلومات المتاحة فى المشكلة فى جدول :**

	النوع الأول	النوع الثانى	الحد الأقصى
الوحدة المنتجة	س	ص	١٢٠
الربح	١٥	٨	–

* **نترجم البيانات والقيود فى صورة نظام من المتباينات :**

١ س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

٢ س + ص ≤ ١٢٠

٣ ∵ ص لا تقل عن نصف س ∴ ص ≥ $\frac{1}{2}$ س

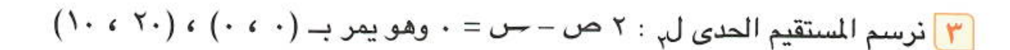
∴ ص − $\frac{1}{2}$ س ≥ ٠ ∴ ٢ ص − س ≥ ٠

* **نكتب دالة الهدف :** ر = ١٥ س + ٨ ص حيث ر أكبر ما يمكن.

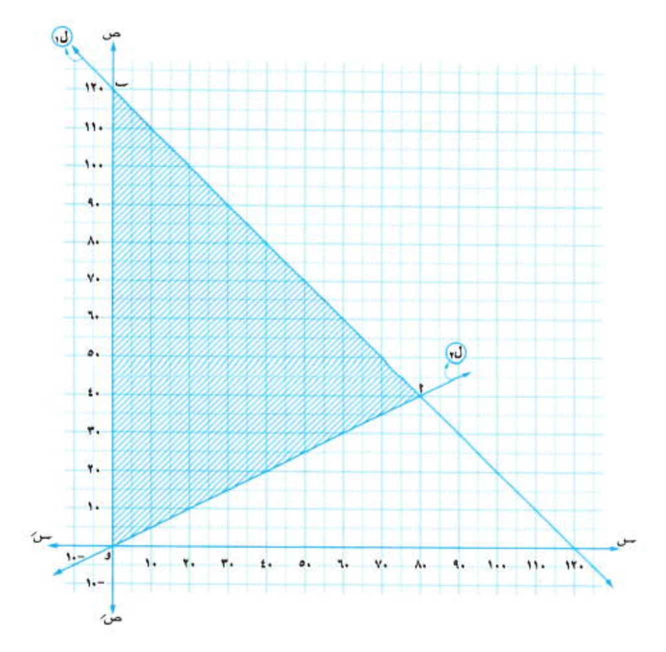
* **تمثيل نظام المتباينات الخطية بيانيًا وتحديد منطقة الحل :**

١ المتباينتان س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ يمثلهما و$\overleftarrow{س}$ ∪ و$\overleftarrow{ص}$ ∪ الربع الأول.

٢ نرسم المستقيم الحدى $ل_١$: س + ص = ١٢٠ وهو يمر بـ (٠ ، ١٢٠) ، (١٢٠ ، ٠)



٣ نرسم المستقيم الحدى $ل_٢$: ٢ ص − س = ٠ وهو يمر بـ (٠ ، ٠) ، (٢٠ ، ١٠)



∴ منطقة حل المتباينات تمثلها المنطقة المظللة بالشكل وهى المنطقة المثلثة و أ ب

*** نحدد رؤوس منطقة الحل :**

رؤوس منطقة الحل هى : و (٠ ، ٠) ، أ (٨٠ ، ٤٠) ، ب (٠ ، ١٢٠)

*** نحدد قيمة دالة الهدف عند كل رأس :**

∵ دالة الهدف ر = ١٥ س + ٨ ص ∴ $[ر]_و$ = ٠ + ٠ = ٠

، $[ر]_أ$ = ١٥ × ٨٠ + ٨ × ٤٠ = ١٥٢٠ ، $[ر]_ب$ = ١٥ × ٠ + ٨ × ١٢٠ = ٩٦٠

∴ أكبر ربح ممكن هو ١٥٢٠ جنيهًا ويتحقق ذلك عند إنتاج ٨٠ وحدة من النوع الأول

، ٤٠ وحدة من النوع الثانى.

مثال ٤

وجبة غذائية يراد تكوينها من نوعين من الأطعمة فإذا كانت القطعة من النوع الأول تحتوى ٣ سعرات حرارية ، ٦ وحدات ڤيتامين جـ ، والقطعة من النوع الثانى تحتوى ٦ سعرات حرارية ، ٤ وحدات فيتامين جـ ، وكان الحد الأدنى من السعرات الحرارية الواجب توافره بالوجبة هو ٣٦ سعر ، والحد الأدنى من وحدات ڤيتامين جـ هو ٤٨ وحدة ، وكان سعر القطعة من النوع الأول ٣ جنيهات ومن النوع الثانى ٤ جنيهات. فما عدد القطع التى يمكن أن تتضمنها الوجبة لتحقق الحد الأدنى بأقل تكلفة ؟

الحـل

* **نفرض أن :** عدد القطع من النوع الأول بالوجبة هو ـس ، عدد القطع من النوع الثانى بالوجبة هو ص

* **ننظم المعلومات فى جدول :**

	القطعة من النوع الأول	القطعة من النوع الثانى	الحد الأدنى
سعرات حرارية	٣	٦	٣٦
ڤيتامين جـ	٦	٤	٤٨

* **نترجم البيانات والقيود فى صورة نظام من المتباينات :**

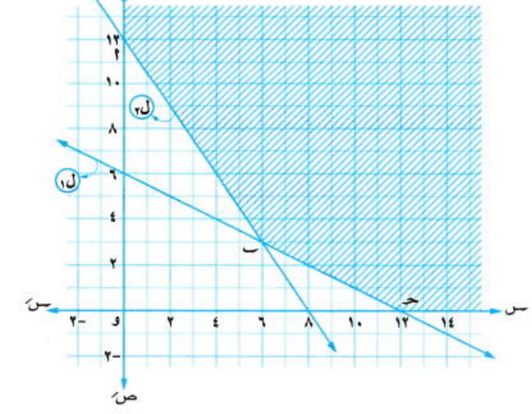
١ ـس ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

٢ ٣ ـس + ٦ ص ≥ ٣٦ **أى أن** ـس + ٢ ص ≥ ١٢

٣ ٦ ـس + ٤ ص ≥ ٤٨ **أى أن** ٣ ـس + ٢ ص ≥ ٢٤

* **نكتب دالة الهدف :** ر = ٣ ـس + ٤ ص حيث ر أقل ما يمكن

* **تمثيل نظام المتباينات الخطية وتحديد منطقة الحل :**



١ المتباينتان ـس ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

يمثلهما و ـس ∪ و ص ∪ الربع الأول.

٢ نرسم المستقيم الحدى $ل_1$:

ـس + ٢ ص = ١٢ (بخط متصل) وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٦) ، (١٢ ، ٠)

٣ نرسم المستقيم الحدى $ل_2$: ٣ ـس + ٢ ص = ٢٤ (بخط متصل) وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ١٢) ، (٨ ، ٠)

∴ منطقة حل المتباينات تمثلها المنطقة المظللة بالشكل والتى تحدها النقط أ ، ب ، جـ

* **نحدد رؤوس منطقة الحل :** رؤوس منطقة الحل هى : أ (٠ ، ١٢) ، ب (٦ ، ٣) ، جـ (١٢ ، ٠)

* **نحدد قيمة دالة الهدف عند كل رأس :**

∵ دالة الهدف ر = ٣ ـس + ٤ ص ∴ $[ر]_{أ}$ = ٣ × ٠ + ٤ × ١٢ = ٤٨

، $[ر]_{ب}$ = ٣ × ٦ + ٤ × ٣ = ٣٠ ، $[ر]_{جـ}$ = ٣ × ١٢ + ٤ × ٠ = ٣٦

∴ أقل تكلفة للوجبة هى ٣٠ جنيهًا وذلك عندما تتكون من ٦ قطع من النوع الأول و٣ قطع من النوع الثانى.

مثـال ٥

تهدف شركة سياحة لاستئجار أسطول من الطائرات يستطيع نقل ٢٨٠٠ راكب ، ١٢٨ طن أمتعة على الأقل وكان المتاح طرازان من الطائرات أ ، ب وكان عدد الطائرات المتاحة من الطراز أ هو ١٣ طائرة ومن الطراز ب هو ١٢ طائرة وكانت الحمولة كاملة لطائرة الطراز أ هى ٢٠٠ راكب ، ٨ طن أمتعه وللطراز ب هى ١٠٠ راكب ، ٦ طن أمتعه وكان إيجار الطائرة من الطراز أ هو ٢٤٠ ألف جنيه ، من الطراز ب هو ١٠٠ ألف جنيه. فكم طائرة من كل طراز يمكن استئجارها لتحقيق الهدف بأقل تكلفة ؟

الحــل

* **نفرض أن :** عدد طائرات الطراز ا هو س ، عدد طائرات الطراز ب هو ص

* **ننظم المعلومات المتاحة بالمشكلة فى جدول :**

	طراز (ا)	طراز (ب)	الحد الأدنى
عدد الركاب	٢٠٠	١٠٠	٢٨٠٠
الأمتعة بالطن	٨	٦	١٢٨

* **نترجم البيانات والقيود فى صورة نظام من المتباينات :**

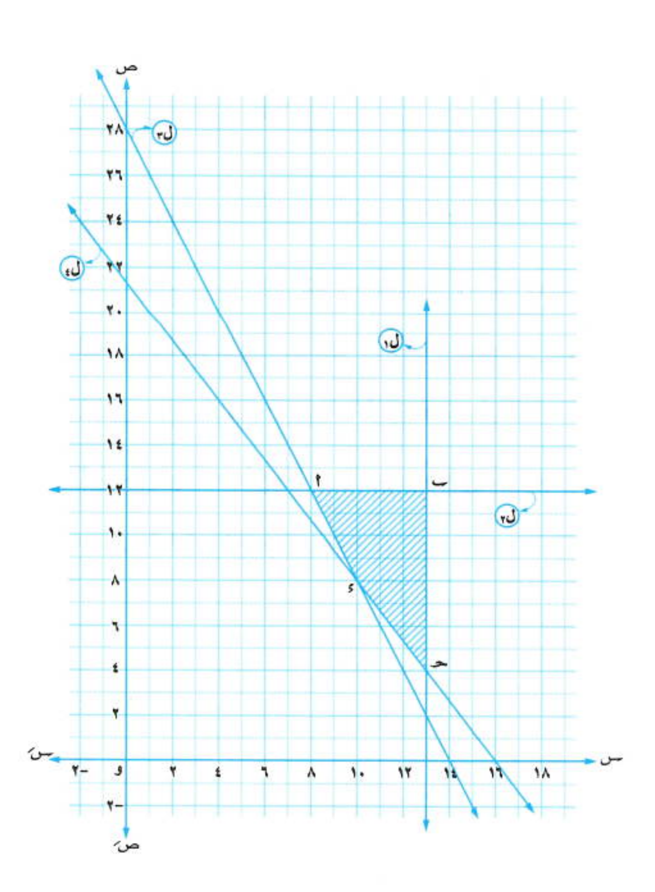
١ س ≤ ١٣ ، ص ≤ ١٢

٢ ٢٠٠ س + ١٠٠ ص ≥ ٢٨٠٠ **أى أن** ٢ س + ص ≥ ٢٨

٣ ٨ س + ٦ ص ≥ ١٢٨ **أى أن** ٤ س + ٣ ص ≥ ٦٤

* **نكتب دالة الهدف :** ر = ٢٤٠ س + ١٠٠ ص حيث ر أقل ما يمكن

* **تمثيل نظام المتباينات الخطية بيانيًا وتحديد منطقة الحل :**



١ نرسم المستقيم الحدى $ل_١$:

س = ١٣ يوازى محور الصادات

ويقطع محور السينات

فى النقطة (١٣ ، ٠)

٢ نرسم المستقيم الحدى $ل_٢$:

ص = ١٢ يوازى

محور السينات ويقطع

محور الصادات

فى النقطة (٠ ، ١٢)

٣ نرسم المستقيم الحدى $ل_٣$:

٢ س + ص = ٢٨

وهو يمر بالنقطتين

(٠ ، ٢٨) ، (١٤ ، ٠)

٤ نرسم المستقيم الحدى $ل_٤$: ٤ س + ٣ ص = ٦٤ وهو يمر بالنقطتين (١ ، ٢٠) ، (١٦ ، ٠)

∴ منطقة حل المتباينات تمثلها المنطقة المظللة بالشكل وهى المنطقة المضلعة أ ب حـ ء

*** نحدد رؤوس منطقة الحل :**

رؤوس منطقة الحل هى :

أ (٨ ، ١٢) ، ب (١٣ ، ١٢) ، حـ (١٣ ، ٤) ، ء (١٠ ، ٨)

*** نحدد قيمة دالة الهدف عند كل رأس :**

∵ دالة الهدف ر = ٢٤٠ س + ١٠٠ ص

∴ $[ر]_{أ}$ = ٢٤٠ × ٨ + ١٠٠ × ١٢ = ٣١٢٠

، $[ر]_{ب}$ = ٢٤٠ × ١٣ + ١٠٠ × ١٢ = ٤٣٢٠

، $[ر]_{حـ}$ = ٢٤٠ × ١٣ + ١٠٠ × ٤ = ٣٥٢٠

، $[ر]_{ء}$ = ٢٤٠ × ١٠ + ١٠٠ × ٨ = ٣٢٠٠

∴ أقل تكلفة تحقق الهدف هى عند استئجار ٨ طائرات من الطراز أ ، ١٢ طائرة من الطراز ب وتكون التكلفة ٣٢٠٠٠٠٠ جنيه.

حاول بنفسك

مصنع ينتج نوعين من قطع الغيار أ ، ب ولإنتاج قطعة من النوع أ يلزم تشغيل ماكينتين الأولى لمدة ساعة والثانية لمدة ساعتين ونصف ، ولإنتاج قطعة من النوع ب يلزم تشغيل الماكينة الأولى لمدة ٤ ساعات والثانية لمدة ساعتين. فإذا كانت الماكينة الأولى لا تعمل أكثر من ٨ ساعات يوميًا والثانية لا تعمل أكثر من ٢١ ساعة يوميًا وكان مكسب المصنع ٢٤ ، ٤٠ جنيهًا فى كل قطعة من النوعين أ ، ب على الترتيب فأوجد أكبر مكسب يمكن أن يحصل عليه فى اليوم الواحد.

تمارين 7



على البرمجة الخطية والحل الأمثل

من أسئلة الكتاب المدرسى • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) النقطة التى تكون عندها للدالة ر = ٤٠ س + ٢٠ ص قيمة عظمى من النقط الآتية هى ....

(أ) (٠ ، ٠) (ب) (٠ ، −٤) (جـ) (١٥ ، ١٠) (د) (٢٥ ، ٠)

(٢) النقطة التى تكون عندها للدالة م = ٣٥ س + ١٠ ص قيمة صغرى من النقط الآتية هى ....

(أ) (٠ ، ٠) (ب) (٠ ، ١٠) (جـ) (٠ ، ٤٠) (د) (٢٠ ، ١٠)

(٣) إذا كان ضعف العدد س لا يقل عن ثلاثة أمثال العدد ص فإن ....

(أ) ٢ س > ٣ ص (ب) ٢ س ≥ ٣ ص

(جـ) ٢ س < ٣ ص (د) ٢ س ≤ ٣ ص

(٤) أى التعبيرات الآتية يمثل المتباينة س + ص ≤ ١٥ ؟

(أ) عددان مجموعهما أقل من ١٥ (ب) عددان مجموعهما لا يقل عن ١٥

(جـ) عددان مجموعهما يزيد عن ١٥ (د) عددان مجموعهما لا يزيد عن ١٥

(٥) أى التعبيرات الرمزية يمثل الجملة الآتية :

عددان مجموع أحدهما وضعف الآخر لا يزيد عن ٢٠ ؟

(أ) س + ٢ ص < ٢٠ (ب) س + ٢ ص ≥ ٢٠

(جـ) س + ٢ ص > ٢٠ (د) س + ٢ ص ≤ ٢٠

(٦) أى التعبيرات اللفظية يمثل المتباينة : ص ≥ ٢ س ؟

(أ) عددان أحدهما أكبر من ضعف الآخر. (ب) عددان أحدهما لا يزيد عن ضعف الآخر.

(جـ) عددان أحدهما يقل عن ضعف الآخر. (د) عددان أحدهما لا يقل عن ضعف الآخر.

(٧) النقطة التى تنتمى لمنطقة حل المتباينات : س + ص ≥ ٥ ، س ≥ ١ ، ص ≥ ٢

وتجعل دالة الهدف ر = ٢ س + ص أقل ما يمكن من النقط التالية هى ....

(أ) (٠ ، ٠) (ب) (٤ ، ٣) (جـ) (٣ ، ٢) (د) (١ ، ٤)

(٨) القيمة العظمى للدالة ر = ٥ س + ٢ ص تحت الشروط س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

، س + ص ≤ ٧ ، س + ٢ ص ≤ ١٠ هى ....

(أ) ١٠ (ب) ٢٦ (جـ) ٣٥ (د) ٧٠

(٩) النقطة التى تنتمى لمنطقة حل المتباينتين : ٠ ≤ س ≤ ٥ ، ٠ ≤ ص ≤ ٢ وتجعل دالة الهدف

ر = ٢ س + ٣ ص أكبر ما يمكن هى ....

(أ) (٤ ، ٥) (ب) (٦ ، ١) (جـ) (٠ ، ٠) (د) (٥ ، ٢)

(١٠) أقل قيمة للمقدار ٣ س − ٢ ص تحت الشروط −٣ ≤ س ≤ ٧ ، −٦ ≤ ص ≤ ٥
تساوى ....

(أ) ٣ (ب) −١٩ (جـ) −٢٨ (د) ١١

(١١) إذا كان (أ ، ب) ينتمى لمجموعة حل المتباينة س + ٢ ص ≤ ٥ حيث أ ، ب عددان صحيحان
فإن أقل قيمة للمقدار ٢ أ + ٤ ب = ...

(أ) ٥ (ب) −٥ (جـ) ١٠ (د) ٦

(١٢) إذا كانت دالة الهدف (ر) تأخذ القيمتين ٦١ ، ٥٧ عند النقطتين (٤ ، ٧) ، (٥ ، ٦) على الترتيب
فإن دالة الهدف (ر) يمكن أن تساوى ....

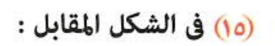
(أ) ٢ س + ٥ ص (ب) ٧ س + ٣ ص (جـ) ٣ س + ٧ ص (د) ٥ س + ٢ ص

(١٣) الشكل المقابل يمثل منطقة الحل
لنظام من المتباينات فإن دالة
الهدف ر = س + ص تكون
أصغر ما يمكن عند
النقطة ....

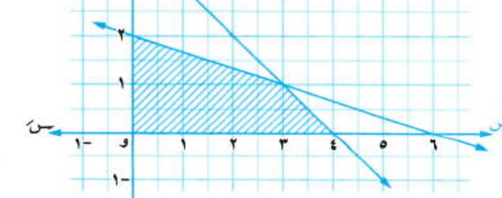
(أ) (٠ ، ٠)
(ب) (١ ، ٢)
(جـ) (٢ ، ١)
(د) (٤ ، ٥)

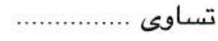
(١٤) الشكل المقابل يمثل منطقة الحل لنظام
من المتباينات فإن القيمة الصغرى لدالة
الهدف ر = ٣ س + ٢ ص هى ....

(أ) ٦ (ب) ٨
(جـ) ١٢ (د) ١٣



(١٥) فى الشكل المقابل :
المنطقة المظللة تمثل مجموعة حل المتباينات
س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س + ٣ ص ≤ ٦
، س + ص ≤ ٤ فإن القيمة العظمى
لدالة الهدف ر = ٢ س + ص

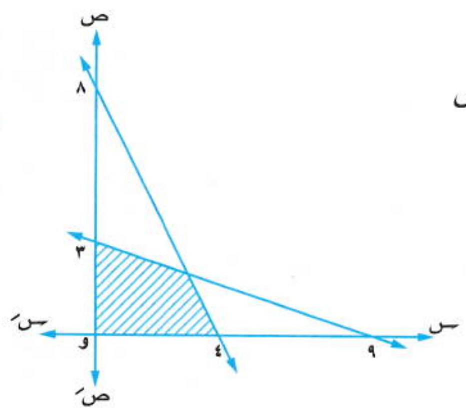




تساوى ....

(أ) ٧ (ب) ٨
(جـ) ٣ (د) ٤

(١٦) إذا كانت المنطقة المظللة هى حل لإحدى مسائل البرمجة الخطية وكانت دالة الهدف هى ر = ٥ س + ٨ ص فإن القيمة العظمى لدالة الهدف تساوى ....



(أ) ٢٤

(ب) ٣١

(جـ) ٤٥

(د) ٦٤

(١٧) مصنع طاقته الإنتاجية ١٢٠ وحدة على الأكثر من نوعين مختلفين من السلع ، س ، ص على الترتيب فإذا كان ما يباع من النوع الثانى لا يقل عن نصف ما يباع من النوع الأول أى من أنظمة المتباينات الآتية تمثل البيانات والقيود السابقة ؟

(أ) س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س + ص ≤ ١٢٠ ، ٢ ص ≤ س

(ب) س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س + ص ≥ ١٢٠ ، ص ≤ ٢ س

(جـ) س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س + ص ≤ ١٢٠ ، ٢ ص ≥ س

(د) س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س + ص ≤ ١٢٠ ، ص ≥ ٢ س

(١٨) فى إحدى مسائل البرمجة الخطية كانت دالة الهدف ر = أ س + ب ص لها قيمة عظمى عند رأسين من رؤوس المنطقة المظللة التى تمثل الحل فإن عدد النقط التى تجعل دالة الهدف قيمة عظمى يساوى ....

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) عدد لانهائى.

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ مثل كلًا من أنظمة المتباينات التالية ثم أوجد النقطة التى تحقق دالة الهدف فى كل حالة :

(١) س + ص ≤ ٥ ، ص ≥ ١ ، س ≥ ٢
، دالة الهدف ر = ٢ س + ٣ ص أصغر ما يمكن. «(٢ ، ١)»

(٢) س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، ص + ٢ س ≤ ١٠ ، س + ٤ ص ≤ ١٢
، دالة الهدف ر = ٢ ص + ٥ س أكبر ما يمكن. «(٥ ، ٠)»

(٣) س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، ٣ ص + س ≥ ١٥ ، ٤ س + ٣ ص ≥ ٢٤
، دالة الهدف ر = ٣ ص + ٢ س أقل ما يمكن. «(٣ ، ٤)»

(٤) س − ص ≤ ٣ ، ٣ س + ٢ ص ≥ −٦ ، س ≥ −٢ ، ص ≤ ٥
، دالة الهدف ر = ٢ س − ٣ ص أكبر ما يمكن. «(٠ ، −٣)»

٢ أوجد أكبر وأقل قيمة لدالة الهدف : ل = س + ٣ ص − ٥ حيث : (س ، ص) تنتمى لمنطقة حل نظام المتباينات : −٣ ≤ س ≤ ٣ ، −٤ ≤ ص ≤ ٤ ، ٤ س + ٣ ص ≤ ١٢ ، ٤ س + ٣ ص ≥ −١٢

«٧ ، −١٧»

٣ علم يوسف أنه للحفاظ على وزنه يجب عليه حرق السعرات الحرارية الزائدة عن طريق ممارسة المشى والجرى فوجد أن ممارسة المشى لمدة دقيقة واحدة تحرق ٦ سعرات حرارية وممارسة الجرى لمدة دقيقة واحدة تحرق ١٥ سعر حرارى ، وكان يوسف يمشى ما بين ١٠ ، ٢٠ دقيقة يوميًا ويجرى ما بين ٣٠ ، ٤٥ دقيقة يوميًا ، وكان الوقت المتاح لممارسة المشى والجرى يوميًا لايزيد عن ساعة واحدة فكم دقيقة يجب أن يمارس فيها يوسف المشى وكم دقيقة يمارس فيها الجرى يوميًا ليحرق أكبر قدر ممكن من السعرات الحرارية. «١٥ ، ٤٥ دقيقة»

---

٤ ينتج مصنع صغير للأثاث المعدنى ٢٠ دولابًا أسبوعيًا على الأكثر من نوعين مختلفين أ ، ب ، فإذا كان ربحه من النوع (أ) هو ٨٠ جنيهًا وربحه من النوع (ب) هو ١٠٠ جنيه ، وكان ما يباع من النوع الأول لا يقل عن ثلاثة أمثال ما يباع من النوع الثانى. أوجد عدد الدواليب من كل نوع ليحقق المصنع أكبر ربح ممكن. «١٥ ، ٥»

---

٥ يرغب مزارع فى تربية دجاج وبط فإذا كان المكان الذى سيربى فيه هذه الطيور لا يتسع إلا لثلاثمائة فقط من الطيور وهو يرى ألا يقل عدد الدجاج عن ضعف عدد البط فإذا كان ربحه فى كل دجاجة جنيهًا واحدًا وفى كل بطة جنيهين.

أوجد عدد ما يربيه المزارع من كل نوع حتى يحصل على أكبر ربح ممكن. «٢٠٠ ، ١٠٠»

---

٦ يبيع أحد محال المأكولات البحرية نوعين من الأسماك المطهية أ ، ب ، ولا تقل الطلبات من صاحب المحل عن ٥٠ سمكة ، كما أنه لا يستخدم أكثر من ٣٠ سمكة من النوع (أ) ، ولا يستخدم أكثر من ٣٥ سمكة من النوع (ب) ، فإذا علمت أن ثمن السمكة من النوع (أ) هو ٤ جنيهات ، ومن النوع (ب) هو ٣ جنيهات ، كم سمكة من كل من النوعين أ ، ب يجب استخدامها لتحقيق أقل ثمن ممكن للشراء ؟ «١٥ ، ٣٥»

---

٧ ينتج أحد مصانع الآلات الموسيقية نوعين من آلات النفخ ، يحتاج تصنيع النوع الأول ٢٥ وحدة من النحاس ، ٤ وحدات من النيكل ، ويحتاج تصنيع النوع الثانى ١٥ وحدة من النحاس ، ٨ وحدات من النيكل ، فإذا كانت الكمية المتاحة فى المصنع فى أحد الأيام ٩٥ وحدة من النحاس ، ٣٢ وحدة من النيكل ، وكان ربح المصنع فى الآلة من النوع الأول هو ٦٠ جنيهًا وربحه فى الآلة من النوع الثانى ٤٨ جنيهًا ، فما عدد الآلات التى يجب أن ينتجها المصنع من كل نوع حتى يحقق أكبر ربح ممكن ؟ «٢ ، ٣»

---

٨ افترض أنك تُصنع وتبيع مرطبًا للجلد ، وإذا كان تصنيع عبوة المرطب العادى يستلزم ٢ سم^3 من الزيت ، ١ سم^3 من زبدة الكاكاو ، وكان تصنيع عبوة المرطب من النوع الممتاز يستلزم ١ سم^3 من الزيت ، ٢ سم^3 من زبدة الكاكاو ، سوف يكون ربحك هو ١٠ جنيهات لكل عبوة من النوع العادى ، ٨ جنيهات لكل عبوة من النوع الممتاز. فإذا كان لديك ٢٤ سم^3 من الزيت ، ١٨ سم^3 من زبدة الكاكاو ، فما عدد العبوات التى يمكن تصنيعها من كل نوع ، حتى تحصل على أكبر ربح ممكن ، وما هذا الربح ؟ «١٠ ، ٤»

---

٩ سلعتان غذائيتان الأولى بها ٥ وحدات فيتامين وتعطى ٣ سعر حرارى والثانية بها وحدتان فيتامين وتعطى ٦ سعر حرارى ، فإذا كان المطلوب ٢٥ وحدة فيتامين على الأقل ، ٣٩ سعر حرارى على الأقل وكان ثمن الوحدة من السلعة الأولى ٦ جنيهات وثمن الوحدة من السلعة الثانية ٨ جنيهات. فما هى الكمية الواجب شراؤها من كل من السلعتين لتحقيق المطلوب بأقل تكلفة ؟ «٣ ، ٥»

١٠ ينتج مصنع نوعين من المكاتب الصاج وكل نوع يقوم بتجميعه أحد العمال ثم يقوم عامل آخر بالدهان ، يستغرق العامل الأول ساعتين لتجميع الوحدة من النوع الأول ، و ٣ ساعات لتجميع الوحدة من النوع الثانى ، بينما يستغرق العامل الثانى ساعة ونصف الساعة لدهان الوحدة من النوع الأول وساعتين لدهان الوحدة من النوع الثانى ، فإذا كان العامل الأول يعمل ٦ ساعات يوميًا على الأقل ، بينما يعمل العامل الثانى ٦ ساعات يوميًا على الأكثر ، وكان ربح المصنع هو ٥٠ جنيهًا فى كل وحدة من كل من النوعين ، فما عدد الوحدات التى يجب أن ينتجها المصنع يوميًا من كلا النوعين ليحقق أكبر ربح ممكن ؟ «٤ من النوع الأول»

---

١١ مصنع ينتج نوعين من الصابون أ ، ب فإذا كان إنتاج ما قيمته ١٠٠ جنيه من المنتج أ يحتاج إلى ٣٠ كجم من المواد الخام ، ١٨ ساعة من التشغيل على الماكينات ، وإنتاج ما قيمته ١٠٠ جنيه من المنتج ب يحتاج إلى ٢٠ كجم من نفس المواد الخام ، ٢٤ ساعة من التشغيل على الماكينات. أوجد أكبر قيمة للمنتجات التى تنتج من ٧٥ كجم من المواد الخام ، ٧٢ ساعة من التشغيل على الماكينات. «٣٢٥ جنيهًا»

---

١٢ ترزيان ينتجان نموذجين من البلوزات (أ) ، (ب) فيقوم الترزى الأول بتفصيل القماش بينما يقوم الثانى بخياطته ، فإذا كان الترزى الأول يستغرق ساعة فى تفصيل النموذج (أ) وساعتين فى تفصيل النموذج (ب) ، وكان الترزى الثانى يستغرق ٣ ساعات لخياطة النموذج (أ) وساعة واحدة لخياطة النموذج (ب) ، وكان الترزى الأول يعمل فى اليوم ٨ ساعات على الأكثر بينما يعمل الثانى ٩ ساعات فى اليوم على الأكثر وكان مكسبهما من بيع البلوزة من النموذج (أ) هو ١٠ جنيهات ومكسبهما من بيع البلوزة من النموذج (ب) هو ١٥ جنيهًا. فأوجد عدد البلوزات من كل نموذج التى يمكنهما إنتاجه فى اليوم ليحصلا على أكبر ربح ممكن. «٢ ، ٣»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

- يراد وضع نوعين من الكتب (أ) ، (ب) على رف مكتبة طوله ٩٦ سم وحمولته القصوى ٢٠ كجم فإذا كان وزن الكتاب من كلا النوعين هو ١ كجم وسمك الكتاب من النوع (أ) ٦ سم ومن النوع (ب) ٤ سم فأوجد عدد الكتب من كل نوع التى توضع على الرف بحيث يكون عددها أكبر ما يمكن «فسر وجود عدة حلول».



الوحدة 3

حساب المثلثات

دروس الوحدة



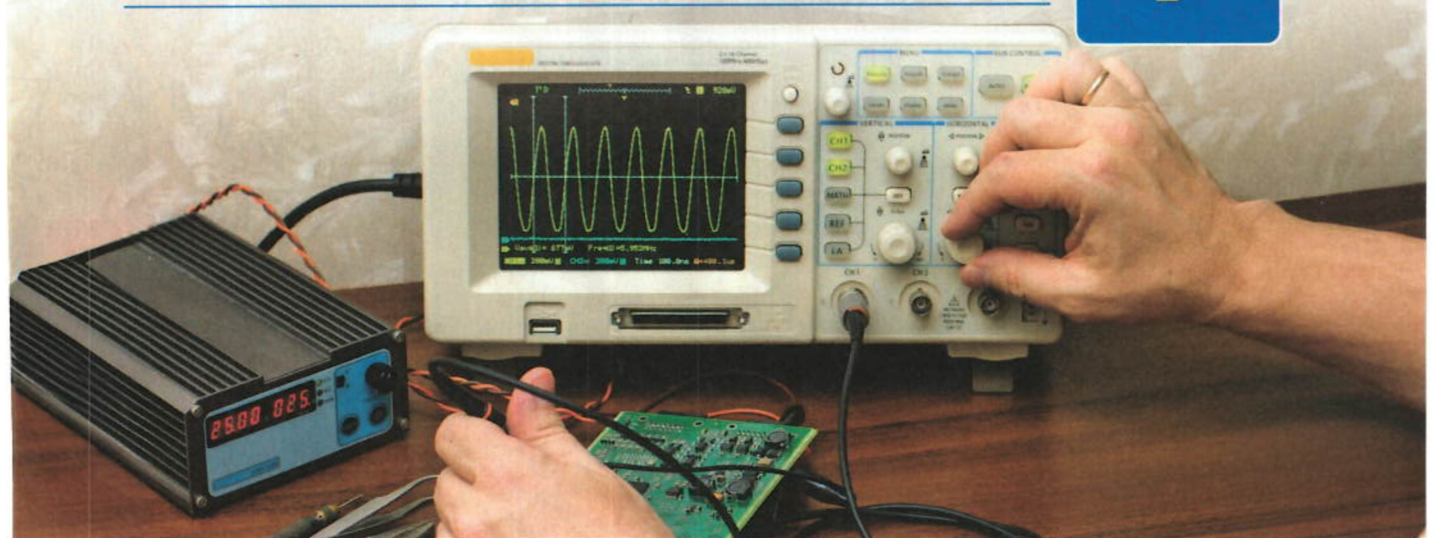
نـواتـج الـتـعـلّـم

فى نهاية هذه الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن :

- يستنتج العلاقات الأساسية بين الدوال المثلثية.
- يثبت صحة متطابقات على الدوال المثلثية.
- يحدد ما إذا كانت المتساوية متطابقة أم معادلة مثلثية.
- يحل المعادلات المثلثية البسيطة فى الصورة العامة فى الفترة [٠ ، ٢ π[
- يتعرف على الحل العام للمعادلة المثلثية.
- يحل المثلث القائم الزاوية.
- يحل تطبيقات تشمل زوايا الارتفاع والانخفاض.
- يتعرف على القطاع الدائرى ويوجد مساحته.
- يتعرف على القطعة الدائرية ويوجد مساحتها.
- يوجد مساحة المثلث ومساحة الشكل الرباعى ومساحة المضلع المنتظم.
- يستخدم أنشطة لبرامج الحاسب الآلى.

الدرس 1

المتطابقات المثلثية



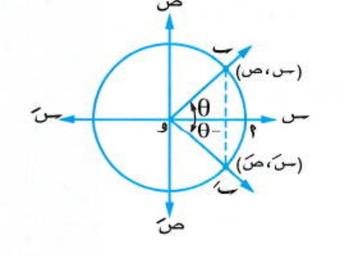
المتطابقات والمعادلات المثلثية

المتطـــابقة

هى متساوية صحيحة لجميع قيم المتغير الحقيقية والذى يُعرف به كل طرف من طرفى المتساوية.

فمثلًا المتساوية : جتا $(-\theta)$ = جتا θ تسمى متطابقة لأنها صحيحة لجميع قيم المتغير θ الحقيقية.

وذلك لأن : فى الشكل المقابل :



من دراستنا السابقة للعلاقة بين الزاويتين المنتسبتين θ ، $(-\theta)$

وجدنا أن : النقطة بَ (سَ ، صَ) صورة النقطة ب (س ، ص) بالانعكاس فى محور السينات

أى أن سَ = س

، ∵ جتا $(-\theta)$ = سَ ، جتا θ = س ∴ جتا $(-\theta)$ = جتا θ لكل قيم θ الحقيقية

مـلاحظـة

العلاقات المثلثية بين الدوال المثلثية للزوايا المنتسبة التى درسناها سابقًا هى متطابقات لأنها تتحقق لجميع قيم المتغير الحقيقية.

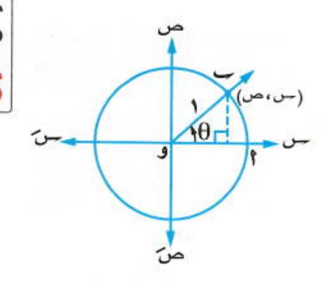
مثل جا $(\pi - \theta)$ = جا θ ، جتا $\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right)$ = − جا θ ، ....

المعـــادلة

هى متساوية صحيحة لبعض قيم المتغير الحقيقية التى تحققها وغير صحيحة للبعض الآخر الذى لا يحققها.

فمثلًا المتساوية : جتا θ = جا θ تسمى معادلة لأنها صحيحة لبعض وليس كل قيم المتغير θ الحقيقية.

وذلك لأن : فى الشكل المقابل :



من دراستنا السابقة وجدنا أن : حتا θ = س ، حا θ = ص

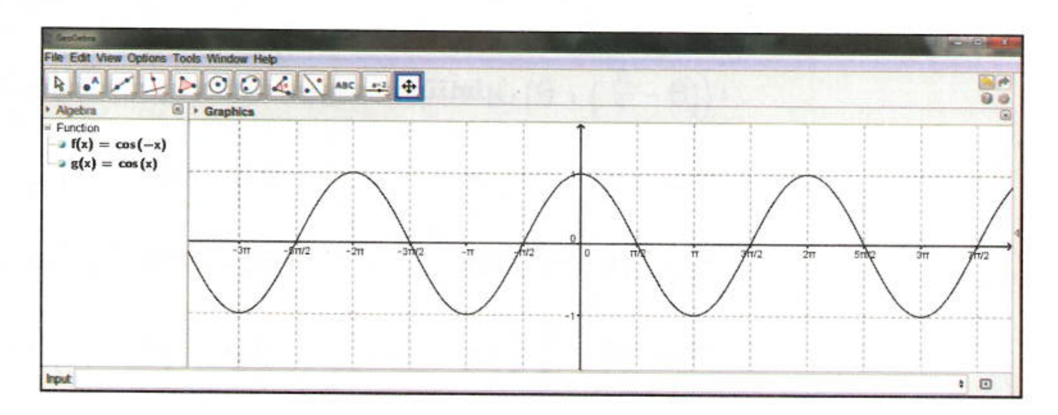
∴ حتا θ = حا θ عندما س = ص فقط

وهذا لا يحدث إلا عندما θ = ٤٥° أو ٢٢٥° أو أى من الزوايا المكافئة لهما.

ملاحظة

يمكن تحديد ما إذا كانت العلاقة تمثل متطابقة أو معادلة عن طريق التمثيل البيانى للدالتين المحددتين لطرفيها ، فإذا كانت الدالتان متقاطعتين فى كل النقط (منطبقتين) كانت العلاقة تمثل متطابقة، وإذا كانتا متقاطعتين فى بعض النقط فقط كانت تمثل معادلة.

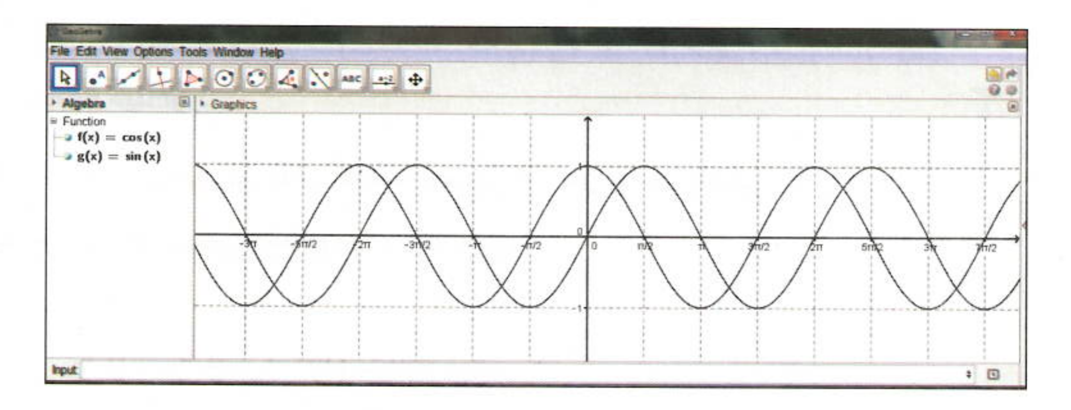
فمثلًا • **فى الشكل التالى :**



الدالتان $د_1$: $د_1$ (θ) = حتا (− θ) ، $د_2$: $د_2$ (θ) = حتا θ متقاطعتان فى جميع النقط أى منطبقتان.

ولذلك : المتساوية حتا (− θ) = حتا θ تسمى متطابقة.

• **فى الشكل التالى :**



الدالتان $د_1$: $د_1$ (θ) = حتا θ ، $د_2$: $د_2$ (θ) = حا θ متقاطعتان فى بعض النقط

ولذلك : المتساوية حتا θ = حا θ تسمى معادلة.

المتطابقات المثلثية الأساسية

* **درسنا فيما سبق المتطابقات المثلثية الآتية :**

١ متطابقة الدوال المثلثية ومقلوباتها :

- حتا $\theta = \frac{١}{\text{قا } \theta}$ ، قا $\theta = \frac{١}{\text{حتا } \theta}$
- حا $\theta = \frac{١}{\text{قتا } \theta}$ ، قتا $\theta = \frac{١}{\text{حا } \theta}$
- ظا $\theta = \frac{١}{\text{ظتا } \theta}$ ، ظتا $\theta = \frac{١}{\text{ظا } \theta}$

٢ التعبير عن ظا θ ، ظتا θ بدلالة حا θ ، حتا θ :

- ظا $\theta = \frac{\text{حا } \theta}{\text{حتا } \theta}$
- ظتا $\theta = \frac{\text{حتا } \theta}{\text{حا } \theta}$

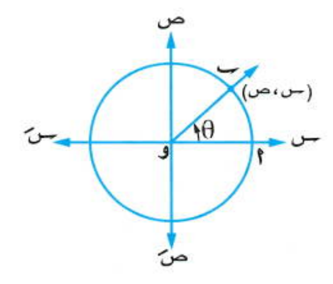
٣ متطابقة الدوال المثلثية للزاويتين المتتامتين $\left(\theta ، \left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)\right)$:

- حتا $\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right) =$ حا θ ، قا $\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right) =$ قتا θ
- حا $\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right) =$ حتا θ ، قتا $\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right) =$ قا θ
- ظا $\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right) =$ ظتا θ ، ظتا $\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right) =$ ظا θ

٤ متطابقة الدوال المثلثية للزاويتين $\left(\theta ، (-\theta)\right)$:

- حتا $(-\theta) =$ حتا θ ، قا $(-\theta) =$ قا θ
- حا $(-\theta) = -$ حا θ ، قتا $(-\theta) = -$ قتا θ
- ظا $(-\theta) = -$ ظا θ ، ظتا $(-\theta) = -$ ظتا θ

٥ متطابقة فيثاغورث :



لأى زاوية موجهة قياسها θ فى الوضع القياسى إذا كان ضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة (س ، ص) فإن :

- $\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ = ١$ ، $\because$ حتا $\theta =$ س ، حا $\theta =$ ص

$\therefore$ $\boxed{\text{حتا}^٢ \theta + \text{حا}^٢ \theta = ١}$ (١) متطابقة فيثاغورث

- بقسمة طرفى العلاقة (١) على $\text{حتا}^٢ \theta$ نجد أن :

$\frac{\text{حتا}^٢ \theta}{\text{حتا}^٢ \theta} + \frac{\text{حا}^٢ \theta}{\text{حتا}^٢ \theta} = \frac{١}{\text{حتا}^٢ \theta}$ $\therefore$ $\boxed{١ + \text{ظا}^٢ \theta = \text{قا}^٢ \theta}$

• بقسمة طرفى العلاقة (١) على $حا^٢ θ$ نجد أن :

$$\frac{حتا^٢ θ}{حا^٢ θ} + \frac{حا^٢ θ}{حا^٢ θ} = \frac{١}{حا^٢ θ}$$ ∴ $ظتا^٢ θ + ١ = قتا^٢ θ$

ملاحظات

١ من العلاقة : $حا^٢ θ + حتا^٢ θ = ١$ نستنتج أن : $حا^٢ θ = ١ - حتا^٢ θ$ ، $حتا^٢ θ = ١ - حا^٢ θ$

٢ من العلاقة : $١ + ظا^٢ θ = قا^٢ θ$ نستنتج أن : $ظا^٢ θ = قا^٢ θ - ١$ ، $قا^٢ θ - ظا^٢ θ = ١$

٣ من العلاقة : $ظتا^٢ θ + ١ = قتا^٢ θ$ نستنتج أن : $ظتا^٢ θ = قتا^٢ θ - ١$ ، $قتا^٢ θ - ظتا^٢ θ = ١$

تحقق من فهمك

اختر الإجابة الصحيحة : $حا^٢ θ + حتا^٢ θ ≠$ ....

(أ) $ظا θ ظتا θ$ (ب) $حا^٢ ٢θ + حتا^٢ ٢θ$ (جـ) $ظتا^٢ θ - قتا^٢ θ$ (د) $قا^٢ θ - ظا^٢ θ$

تبسيط المقادير المثلثية

المقصود بتبسيط المقدار المثلثى هو استخدام المتطابقات المثلثية لوضع المقدار فى أبسط صورة له.

مثال ١

اكتب كلًا من المقادير الآتية فى أبسط صورة :

١ $\frac{١}{حتا^٢ θ} - \frac{حا^٢ θ}{حتا^٢ θ}$

٢ $حا\left(\frac{π}{٢} - θ\right) قتا θ$

٣ $(حا θ + حتا θ)^٢ - ٢ حا θ حتا θ$

٤ $\frac{١ + ظا^٢ \left(\frac{٣π}{٢} - θ\right)}{١ + ظا^٢ \left(\frac{٣π}{٢} + θ\right)}$

الحل

١ $\frac{١}{حتا^٢ θ} - \frac{حا^٢ θ}{حتا^٢ θ} = قا^٢ θ - ظا^٢ θ = ١$

٢ $حا\left(\frac{π}{٢} - θ\right) قتا θ = حتا θ قتا θ = \frac{حتا θ}{حا θ} = ظتا θ$

٣ $(حا θ + حتا θ)^٢ - ٢ حا θ حتا θ$

$= حا^٢ θ + ٢ حا θ حتا θ + حتا^٢ θ - ٢ حا θ حتا θ$

$= حا^٢ θ + حتا^٢ θ = ١$

لاحظ أن

$\frac{١}{حتا^٢ θ} = \left(\frac{١}{حتا θ}\right)^٢ = قا^٢ θ$

$\frac{حا^٢ θ}{حتا^٢ θ} = \left(\frac{حا θ}{حتا θ}\right)^٢ = ظا^٢ θ$

تذكر أن

$(أ + ب)^٢ = أ^٢ + ٢ أ ب + ب^٢$

٤ $\frac{١ + ظتا^٢ (\frac{٣\pi}{٢} - \theta)}{١ + ظا^٢ (\frac{٣\pi}{٢} + \theta)} = \frac{١ + ظا^٢ \theta}{١ + ظتا^٢ \theta}$

$= \frac{قا^٢ \theta}{قتا^٢ \theta}$

$= \frac{جا^٢ \theta}{جتا^٢ \theta} = ظا^٢ \theta$

لاحظ أن

$\frac{قا^٢ \theta}{قتا^٢ \theta} = \frac{١}{جتا^٢ \theta} \div \frac{١}{جا^٢ \theta} = \frac{١}{جتا^٢ \theta} \times جا^٢ \theta$

$= \frac{جا^٢ \theta}{جتا^٢ \theta} = ظا^٢ \theta$

حاول بنفسك

ضع فى أبسط صورة كلًا من المقادير الآتية :

١ $\frac{١}{جا^٢ \theta} - \frac{١}{ظا^٢ \theta}$ ٢ جا $(\frac{\pi}{٢} - \theta)$ قا $(٢\pi - \theta)$ ٣ $\frac{١ - جا^٢ \theta}{جتا^٢ \theta - ١}$

المتطابقات المثلثية

* **لإثبات صحة المتطابقة المثلثية نتبع إحدى الطريقتين :**

١ نبدأ بأحد طرفى المتطابقة ونستخدم المتطابقات المثلثية الأساسية لوضعه على نفس صورة الطرف الآخر.

٢ نضع كلًا من طرفى المتطابقة المثلثية فى أبسط صورة لإثبات أن الطرفين لهما نفس الناتج عند وضعهما فى أبسط صورة.

مثال ٢

أثبت صحة المتطابقة : $جا^٢ \theta - جتا^٢ \theta = ٢ جا^٢ \theta - ١$

الحل

الطرف الأيمن = $جا^٢ \theta - جتا^٢ \theta = جا^٢ \theta - (١ - جا^٢ \theta)$

$= جا^٢ \theta - ١ + جا^٢ \theta = ٢ جا^٢ \theta - ١$ = الطرف الأيسر.

لاحظ أن

$جتا^٢ \theta = ١ - جا^٢ \theta$

مثال ٣

أثبت صحة المتطابقة : $جا^٤ \theta - جتا^٤ \theta = ١ - ٢ جتا^٢ \theta$

الحل

الطرف الأيمن = $جا^٤ \theta - جتا^٤ \theta$

$= (جا^٢ \theta + جتا^٢ \theta)(جا^٢ \theta - جتا^٢ \theta)$

$= ١ \times (جا^٢ \theta - جتا^٢ \theta)$

$= ١ - جتا^٢ \theta - جتا^٢ \theta = ١ - ٢ جتا^٢ \theta$ = الطرف الأيسر.

لاحظ أن

* $جا^٢ \theta + جتا^٢ \theta = ١$
* $جا^٢ \theta = ١ - جتا^٢ \theta$

مثال ٤

أثبت صحة المتطابقة : $\frac{\text{جا}^{٢}\,\theta}{١ - \text{جتا}\,\theta} = ١ + \text{جتا}\,\theta$

الحل

الطرف الأيمن $= \frac{\text{جا}^{٢}\,\theta}{١ - \text{جتا}\,\theta} = \frac{١ - \text{جتا}^{٢}\,\theta}{١ - \text{جتا}\,\theta} = \frac{(١ + \text{جتا}\,\theta)\,\cancel{(١ - \text{جتا}\,\theta)}}{\cancel{١ - \text{جتا}\,\theta}} = ١ + \text{جتا}\,\theta =$ الطرف الأيسر.

حاول بنفسك

أثبت صحة المتطابقتين الآتيتين :

١ $\frac{\text{جتا}^{٢}\,\theta}{١ + \text{جا}\,\theta} = ١ - \text{جا}\,\theta$

٢ $(\text{جا}\,\theta + \text{جتا}\,\theta)^{٢} + (\text{جا}\,\theta - \text{جتا}\,\theta)^{٢} = ٢$

مثال ٥

أثبت صحة المتطابقة : $\text{ظا}\,\theta + \text{ظتا}\,\theta = \text{قتا}\,\theta\ \text{قا}\,\theta$

الحل

الطرف الأيمن $= \text{ظا}\,\theta + \text{ظتا}\,\theta$

$= \frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta} + \frac{\text{جتا}\,\theta}{\text{جا}\,\theta}$

$= \frac{\text{جا}^{٢}\,\theta + \text{جتا}^{٢}\,\theta}{\text{جا}\,\theta\ \text{جتا}\,\theta}$

$= \frac{١}{\text{جا}\,\theta\ \text{جتا}\,\theta}$

$= \text{قتا}\,\theta\ \text{قا}\,\theta =$ الطرف الأيسر.

لاحظ أنه

- لسهولة الإثبات نكتب المقدار بدلالة جا θ ، جتا θ فقط وذلك باستخدام العلاقات الآتية :
- $\text{ظا}\,\theta = \frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta}$ ، $\text{ظتا}\,\theta = \frac{\text{جتا}\,\theta}{\text{جا}\,\theta}$
- $\text{قا}\,\theta = \frac{١}{\text{جتا}\,\theta}$ ، $\text{قتا}\,\theta = \frac{١}{\text{جا}\,\theta}$

مثال ٦

أثبت صحة المتطابقة : $٢\,\text{جتا}^{٢}\,\theta - ١ = \frac{١ - \text{ظا}^{٢}\,\theta}{١ + \text{ظا}^{٢}\,\theta}$

الحل

الطرف الأيسر $= \frac{١ - \text{ظا}^{٢}\,\theta}{١ + \text{ظا}^{٢}\,\theta} = \frac{١ - \frac{\text{جا}^{٢}\,\theta}{\text{جتا}^{٢}\,\theta}}{\text{قا}^{٢}\,\theta} = \frac{١ - \frac{\text{جا}^{٢}\,\theta}{\text{جتا}^{٢}\,\theta}}{\frac{١}{\text{جتا}^{٢}\,\theta}} = \left(١ - \frac{\text{جا}^{٢}\,\theta}{\text{جتا}^{٢}\,\theta}\right) \times \text{جتا}^{٢}\,\theta = \text{جتا}^{٢}\,\theta - \text{جا}^{٢}\,\theta$

$= \text{جتا}^{٢}\,\theta - (١ - \text{جتا}^{٢}\,\theta) = \text{جتا}^{٢}\,\theta - ١ + \text{جتا}^{٢}\,\theta = ٢\,\text{جتا}^{٢}\,\theta - ١ =$ الطرف الأيمن.

مثال ٧

أثبت صحة المتطابقة : $\text{قا}^2\,\theta - \text{ظا}^2\,\theta\ \text{حا}^2\,\theta = \text{حتا}^2\,\theta + ٢\ \text{حا}^2\,\theta$

الحل

الطرف الأيمن $= \text{قا}^2\,\theta - \text{ظا}^2\,\theta\ \text{حا}^2\,\theta = \frac{١}{\text{حتا}^2\,\theta} - \frac{\text{حا}^2\,\theta}{\text{حتا}^2\,\theta} \times \text{حا}^2\,\theta$

$$= \frac{١}{\text{حتا}^2\,\theta} - \frac{\text{حا}^4\,\theta}{\text{حتا}^2\,\theta} = \frac{١ - \text{حا}^4\,\theta}{\text{حتا}^2\,\theta} = \frac{(١ + \text{حا}^2\,\theta)\,\cancel{(١ - \text{حا}^2\,\theta)}}{\cancel{١ - \text{حا}^2\,\theta}}$$

$= ١ + \text{حا}^2\,\theta$ (١)

الطرف الأيسر $= \text{حتا}^2\,\theta + ٢\ \text{حا}^2\,\theta = ١ - \text{حا}^2\,\theta + ٢\ \text{حا}^2\,\theta$

$= ١ + \text{حا}^2\,\theta$ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن الطرفين متساويان.

حاول بنفسك

أثبت صحة المتطابقة : $\frac{١ - \text{ظا}^2\,\theta}{١ + \text{ظا}^2\,\theta} = ٢\ \text{حا}^2\,\theta - ١$

مثال ٨

إذا كان : $\text{حا}\,\theta + \text{حا}\,(٢٧٠^\circ - \theta) = \frac{١}{٢}$ **أوجد قيمة :** $\text{حا}\,\theta\ \text{حتا}\,\theta$ حيث $\theta \in]٠ ، \frac{\pi}{٢}[$

الحل

$\because \text{حا}\,\theta + \text{حا}\,(٢٧٠^\circ - \theta) = \frac{١}{٢}$

$\therefore \text{حا}\,\theta - \text{حتا}\,\theta = \frac{١}{٢}$ وبتربيع الطرفين.

$\therefore \text{حا}^2\,\theta - ٢\ \text{حا}\,\theta\ \text{حتا}\,\theta + \text{حتا}^2\,\theta = \frac{١}{٤}$

$\therefore ١ - ٢\ \text{حا}\,\theta\ \text{حتا}\,\theta = \frac{١}{٤}$

$\therefore -٢\ \text{حا}\,\theta\ \text{حتا}\,\theta = \frac{-٣}{٤}$

$\therefore \text{حا}\,\theta\ \text{حتا}\,\theta = \frac{٣}{٨}$



على المتطابقات المثلثية



من أسئلة الكتاب المدرسي • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) أى من العلاقات الآتية تمثل متطابقة ؟

(أ) $جتا\ \theta = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (ب) $جا\ \theta = جتا\ \theta$

(جـ) $جا\ (\pi - \theta) = جا\ \theta$ (د) $جا\ (٢\pi - \theta) = -\frac{١}{٢}$

(٢) أى من العلاقات الآتية تمثل معادلة ؟

(أ) $ظا\ \left(\frac{٣\pi}{٢} + \theta\right) = -ظتا\ \theta$ (ب) $جتا\ \left(\frac{٣\pi}{٢} - \theta\right) = -جا\ \theta$

(جـ) $جتا\ (-\theta) = جتا\ \theta$ (د) $ظتا\ \theta = -ظا\ ٣٠^\circ$

(٣) $ظا\ \theta\ قتا\ \theta = $ ....

(أ) ١ (ب) $جتا\ \theta$ (جـ) $قا\ \theta$ (د) $قتا\ \theta$

(٤) 📖 $\frac{ظا\ \theta\ ظتا\ \theta}{قا\ \theta}$ فى أبسط صورة يساوى ....

(أ) $جا\ \theta$ (ب) $جتا\ \theta$ (جـ) $قا\ \theta$ (د) $قتا\ \theta$

(٥) $١ - \frac{١}{قا^٢\ ٣٧^\circ} = $ ....

(أ) $ظا^٢\ ٣٧^\circ$ (ب) $ظتا^٢\ ٣٧^\circ$ (جـ) $جتا^٢\ ٣٧^\circ$ (د) $جا^٢\ ٣٧^\circ$

(٦) $٥\ جتا^٢\ ٣٠^\circ + ٥\ جا^٢\ ٣٠^\circ = $ ....

(أ) ٥ (ب) ١ (جـ) ٢٥ (د) ١٠

(٧) $\frac{٣}{جا\ \theta} \times \frac{-٢}{قتا\ \theta} = $ ....

(أ) ٦ (ب) −٦ (جـ) $\frac{١}{٦}$ (د) $\frac{-١}{٦}$

(٨) $جا^٢\ (١٨٠^\circ - \theta) + جا^٢\ (٢٧٠^\circ - \theta) = $ ....

(أ) $٢\ جا^٢\ \theta$ (ب) $جتا^٢\ \theta$ (جـ) ١ (د) −١

(٩) $(١ + ظتا\ \theta)^٢ - ٢\ ظتا\ \theta = $ ....

(أ) $قا^٢\ \theta$ (ب) $جتا^٢\ \theta$ (جـ) $قتا^٢\ \theta$ (د) $-قتا^٢\ \theta$

(١٠) $(١ + ظتا^٢\ \theta) \times جا^٢\ \theta = $ ....

(أ) $-جا^٢\ \theta$ (ب) $ظا^٢\ \theta$ (جـ) $-جتا^٢\ \theta$ (د) ١

(١١) 📖 جا θ جتا θ ظا θ فى أبسط صورة يساوى ....

(أ) جا^{٢} θ (ب) جتا^{٢} θ (جـ) ظا^{٢} θ (د) ١ − جا^{٢} θ

(١٢) 📖 $\frac{\text{١ − جا}^{٢}\ \theta}{\text{١ − جتا}^{٢}\ \theta}$ فى أبسط صورة يساوى ....

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) ظا^{٢} θ (د) ظتا^{٢} θ

(١٣) $\frac{\text{قا}^{٢}\ \theta\ \text{− ظا}^{٢}\ \theta}{\text{جا}^{٢}\ \theta\ \text{+ جتا}^{٢}\ \theta}$ فى أبسط صورة يساوى ....

(أ) ١ (ب) ظا^{٢} θ (جـ) −١ (د) قا^{٢} θ

(١٤) 📖 $\frac{\text{١ − جتا}^{٢}\ \beta}{\text{جا}^{٢}\ \beta\ \text{− ١}}$ فى أبسط صورة يساوى ....

(أ) − ظا^{٢} β (ب) − ظتا^{٢} β (جـ) ظا^{٢} β (د) ظتا^{٢} β

(١٥) $\frac{\text{١ + ظا}^{٢}\ \theta}{\text{١ + ظتا}^{٢}\ \theta}$ فى أبسط صورة يساوى ....

(أ) ظا^{٢} θ (ب) ظتا^{٢} θ (جـ) ١ (د) جتا^{٢} θ

(١٦) جا^{٢} θ + جتا^{٢} θ + ظا^{٢} θ = ...

(أ) ١ (ب) ظتا^{٢} θ (جـ) قتا^{٢} θ (د) قا^{٢} θ

(١٧) (ظا^{٢} ٥٠° − قا^{٢} ٥٠°)^{٥} = ...

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) ٥ (د) −٥

(١٨) ٢ جا^{٢} θ + جتا^{٢} θ + $\frac{\text{١}}{\text{قا}^{٢}\ \theta}$ = ...

(أ) ٢ (ب) ١ (جـ) ظا^{٢} θ (د) قا^{٢} θ

(١٩) جا θ قتا θ + ٢ جتا θ قا θ + ٣ ظا θ ظتا θ = ...

(أ) ١ (ب) ٣ (جـ) ٥ (د) ٦

(٢٠) (١ − جتا θ) (١ + جتا θ) (١ + ظتا^{٢} θ) = ...

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) جا θ (د) ظا θ

(٢١) $\frac{\text{جا س جتا س ظا س + جا س جتا س ظتا س}}{\text{جا س قا س}}$ = ...

(أ) ظتا س (ب) ظا س (جـ) جتا س (د) قتا س

(٢٢) $\frac{\text{جا}\ \theta}{\text{قتا}\ \theta}$ + $\frac{\text{جتا}\ \theta}{\text{قا}\ \theta}$ = ...

(أ) ظا θ (ب) جا θ + جتا θ (جـ) قا θ قتا θ (د) ١

(٢٣) $\frac{\text{جا}\ \theta\ \text{ظا}\ \theta}{\text{(١ + جتا}\ \theta\text{) (١ − جتا}\ \theta\text{)}}$ = ...

(أ) جا θ (ب) جا^{٢} θ (جـ) قا θ (د) قتا θ

(٢٤) $\frac{٦ \text{ حتا}^٢ \theta - \text{حا}^٢ \theta + ١}{٧ \text{ حتا } \theta}$ = ...

(أ) حا θ (ب) حتا θ (جـ) − حا θ (د) − حتا θ

(٢٥) $\frac{(\text{قا س} + \text{طا س})(١ - \text{حا س})}{\text{حتا س}}$ = ...

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) طا س (د) قا س

(٢٦) $\frac{\text{حتا}^٢ \text{ س}}{١ - \text{حا س}} + \frac{\text{حتا}^٢ \text{ س}}{١ + \text{حا س}}$ = ...

(أ) ٢ (ب) ٢ حا س

(جـ) ٢ حتا س (د) حا س + حتا س

(٢٧) $\frac{\text{حتا س} + ١}{\text{قا س}} - \text{حتا}^٢ \text{ س}$ = ...

(أ) حتا س (ب) حا س (جـ) حتا^٢ س (د) حا^٢ س

(٢٨) $\frac{١ - \text{طا س}}{١ - \text{طتا س}}$ = ...

(أ) − طا س (ب) طا س (جـ) − طتا س (د) طتا س

(٢٩) $(\text{قا } \theta - \text{حتا } \theta)^٢ + (\text{قتا } \theta - \text{حا } \theta)^٢ - (\text{طتا } \theta - \text{طا } \theta)^٢$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(٣٠) إذا كان : $\text{طا}^٢ \theta = ١٥$ فإن : $\text{قا}^٢ \theta$ = ...

(أ) ٢٢٥ (ب) ٢٢٦ (جـ) ١٥ (د) ١٦

(٣١) إذا كان : $\text{طتا } \theta = \frac{١}{٣}$ فإن : $\text{قتا}^٢ \theta$ = ...

(أ) $\frac{١}{٩}$ (ب) $\frac{٤}{٣}$ (جـ) $\frac{١٠}{٩}$ (د) $\frac{٣}{٤}$

(٣٢) إذا كانت : $\text{طا } \theta \text{ حتا } \theta = \frac{٢\sqrt{٢}}{٣}$ فإن : $\text{قا } \theta$ = ...

(أ) ± ٣ (ب) ± $\frac{٣}{٢}$ (جـ) ± $\frac{٢\sqrt{٣}}{٣}$ (د) ± ١

(٣٣) إذا كان : $\text{حا } \theta + \text{قتا } \theta = ٥$ فإن : $\text{حا}^٢ \theta + \text{قتا}^٢ \theta$ = ...

(أ) ١ (ب) ٥ (جـ) ٢٣ (د) ٢٥

(٣٤) إذا كان : $\text{حا } \theta - \text{حتا } \theta = \frac{٤}{٥}$ حيث $\theta \in]٠ ، \frac{\pi}{٢}[$ فإن : $\text{حا } \theta \text{ حتا } \theta$ = ...

(أ) $\frac{١}{٥}$ (ب) $\frac{٩}{٢٥}$ (جـ) $\frac{٤١}{٥٠}$ (د) $\frac{٩}{٥٠}$

(٣٥) إذا كان : $\text{قتا } \theta - \text{طتا } \theta = \frac{١}{٣}$ فإن : $\text{قتا } \theta + \text{طتا } \theta$ = ...

(أ) ٣ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) ١

(٣٦) $\frac{\text{حا}^4 \theta - \text{حتا}^4 \theta}{\text{حا}^2 \theta - \text{حتا}^2 \theta} =$ ....

(أ) طا θ قتا θ (ب) حا² θ − حتا² θ

(جـ) قتا² θ − طتا² θ (د) طا² θ − قا² θ

(٣٧) إذا كان : حا^٩ θ × قتا^٦ θ = حا θ فإن : ٩ = ...

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٧

(٣٨) $\frac{\text{حا}^3 \theta + \text{حتا}^3 \theta}{1 - \text{حا} \theta \text{ حتا} \theta} =$ ....

(أ) حتا θ − حا θ (ب) حتا θ + حا θ (جـ) ٢ قتا² θ (د) ٢ حا² θ

(٣٩) $\frac{1 - \text{حتا س}}{\text{حا س}} + \frac{\text{حا س}}{1 - \text{حتا س}} =$ ....

(أ) ٢ قا س (ب) ٢ قتا س (جـ) ٢ طتا س (د) ٢ حا س

(٤٠) (١ + حا² θ)² + ٢ (١ + حا² θ) (١ + حتا² θ) + (١ + حتا² θ)² = ...

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) ٩

(٤١) إذا كان : ٣ حتا² ٣٦° + ٣ حتا ٥٤° حا ٣٦° = ٧ − ٢ ٩ فإن : ٩² + ١ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٥ (د) ٣ حتا² ٣٦°

(٤٢) (حا θ − حتا θ)⁴ − (حا θ + حتا θ)⁴ = ...

(أ) $\frac{8}{\text{قا} \theta \text{ قتا} \theta}$ (ب) $\frac{-8}{\text{قا} \theta \text{ قتا} \theta}$

(جـ) −٤ حا θ حتا θ (د) −١٦ قا θ قتا θ

(٤٣) إذا كانت θ قياس زاوية حادة فإن : $\sqrt{\frac{1 - \text{حا} \theta}{1 + \text{حا} \theta}} - \sqrt{\frac{1 + \text{حا} \theta}{1 - \text{حا} \theta}} =$ ....

(أ) − طا θ (ب) −٢ طا θ (جـ) طا θ (د) طتا θ

(٤٤) إذا كان : قا² θ + طا² θ = ك فإن : قا⁴ θ − طا⁴ θ = ...

(أ) ك (ب) ٢ + ك (جـ) ٢ − ك (د) ك²

(٤٥) إذا كان : $\frac{\text{قا} \theta - \text{حتا} \theta}{\text{قتا} \theta - \text{حا} \theta} = \text{طا}^{ن} \theta$ فإن : ن = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٤٦) إذا كان ٩ ب حـ ء رباعيًا دائريًا فإن : حتا ٩ + حتا ب + حتا حـ + حتا ء = ...

(أ) حتا ٣٦٠° (ب) حتا ١٨٠° (جـ) حتا ٩٠° (د) ٤ حتا ٩

(٤٧) إذا كانت : $\text{ٲ} = ٢\,\text{حا}^٢\,\theta + ٥\,\text{حتا}^٢\,\theta$ فإن : ٲ ∋ ....

(أ) [٠ ، ٣] (ب) [١ ، ٥] (جـ) [٠ ، ٥] (د) [٢ ، ٥]

(٤٨) إذا كان : ٲ = ٢ حاس + حتاس ، ب = ٢ حتاس − حاس فإن : $\text{ٲ}^٢ + \text{ب}^٢ =$ ....

(أ) ٤ (ب) ٥

(جـ) ٨ حاس حتاس (د) ٤ $\text{حا}^٢$ س + ٥ $\text{حتا}^٢$ س

(٤٩) إذا كان θ ، α قياسى زاويتين حادتين وكان $\theta + \alpha = ٩٠°$ فإن : $\text{حا}^٢\,\theta + \text{حا}^٢\,\alpha =$ ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ $\text{حا}^٢\,\theta$ (د) ٢ $\text{حتا}^٢\,\theta$

(٥٠) فى Δ ٲ ب حـ إذا كان : $\text{حا}^٢$ ٲ + $\text{حتا}^٢$ ب = ١ فإن : Δ ٲ ب حـ يكون ....

(أ) متساوى الأضلاع. (ب) متساوى الساقين. (جـ) مختلف الأضلاع. (د) قائم الزاوية.

(٥١) إذا كان : طا θ = ٤ فإن : $\dfrac{\text{حا}^٢\,\theta + \text{حتا}^٢\,\theta}{\text{حا}^٢\,\theta - \text{حتا}^٢\,\theta} =$ ....

(أ) $\frac{١٧}{١٥}$ (ب) ١ (جـ) $\frac{-٧}{١٥}$ (د) −١

(٥٢) $\dfrac{\text{حتا}^٢\,\theta - \text{حا}\,\theta - ١}{١ + \text{حا}\,\theta} =$ ....

(أ) −١ (ب) حتا θ (جـ) − حا θ (د) حا θ

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ اكتب فى أبسط صورة كلًا من المقادير الآتية «حيث θ قياس زاوية معرف عندها جميع الدوال المثلثية ومقلوباتها» :

(١) $\dfrac{١}{\text{حتا}^٢\,\theta} - \dfrac{١}{\text{ظتا}^٢\,\theta}$

(٢) حتا $(\frac{\pi}{٢} - \theta)$ قا $(\frac{\pi}{٢} - \theta)$

(٣) حا $(\pi - \theta)$ قتا $(\pi - \theta)$

(٤) $\dfrac{\text{حا}\,(\frac{\pi}{٢} - \theta)}{\text{حتا}\,(٢\pi - \theta)}$

(٥) $(\text{حا}\,\theta + \text{حتا}\,\theta)^٢ - \dfrac{٢}{\text{قا}\,\theta\,\text{قتا}\,\theta}$

(٦) حا $(\frac{\pi}{٢} + \theta)$ قا $(-\theta)$

(٧) $\text{حتا}^٢\,\theta$ قا θ قتا θ

(٨) حا θ قتا θ − $\text{حتا}^٢\,\theta$

(٩) حا $(\frac{\pi}{٢} - \theta)$ حتا θ − حتا $(\frac{\pi}{٢} + \theta)$ حا $(\pi - \theta)$

(١٠) حا $(\frac{\pi}{٢} - \theta)$ ظا $(\frac{\pi}{٢} - \theta)$ قتا $(\pi - \theta)$

(١١) حا θ حتا θ (طا θ + ظتا θ)

(١٢) $\dfrac{١ + \text{ظتا}^٢\,(\frac{٣\pi}{٢} - \theta)}{١ + \text{ظا}^٢\,(\frac{\pi}{٢} - \theta)}$

(١٣) $\dfrac{\text{حا}\,\theta\,\text{حتا}\,\theta}{\text{ظا}\,\theta} + \dfrac{\text{ظا}\,\theta}{\text{قا}\,\theta\,\text{قتا}\,\theta}$

٢ أثبت صحة كل من المتطابقات الآتية :

(١) $\text{ظا}\,\theta + \text{ظتا}\,\theta = \text{قا}\,\theta\ \text{قتا}\,\theta$

(٢) $\text{قتا}\,\theta - \text{جا}\,\theta = \text{جتا}\,\theta\ \text{ظتا}\,\theta$

(٣) $\text{٢ جا}^{٢}\,\theta + \text{جتا}^{٢}\,\theta = \text{١} + \text{جا}^{٢}\,\theta$

(٤) $\text{جا}^{٢}\,\alpha + \text{ظا}^{٢}\,\alpha\ \text{جا}^{٢}\,\alpha = \text{ظا}^{٢}\,\alpha$

(٥) $\text{جا}\,(\text{٩٠}^{\circ} - \mu)\ \text{جتا}\,\mu = \text{١} - \text{جا}^{٢}\,\mu$

(٦) $\text{ظتا}^{٢}\,\mu - \text{جتا}^{٢}\,\mu = \text{ظتا}^{٢}\,\mu\ \text{جتا}^{٢}\,\mu$

(٧) $\text{قا}^{٢}\,\beta + \text{قتا}^{٢}\,\beta = \text{قا}^{٢}\,\beta\ \text{قتا}^{٢}\,\beta$

(٨) $\text{قا}\,\theta - \text{جا}\,\theta\ \text{ظا}\,\theta = \text{جتا}\,\theta$

(٩) $\text{ظا}^{٢}\,\theta + \text{ظتا}^{٢}\,\theta - (\text{قا}^{٢}\,\theta + \text{قتا}^{٢}\,\theta) = -\text{٢}$

(١٠) $\text{ظا}^{٢}\,\theta\ \text{جتا}^{٢}\,\theta + \text{ظتا}^{٢}\,\theta\ \text{جا}^{٢}\,\theta = \text{١}$

(١١) $(\text{جا}\,\theta + \text{جتا}\,\theta)^{٢} + (\text{جا}\,\theta - \text{جتا}\,\theta)^{٢} = \text{٢}$

(١٢) $\text{جا}^{٣}\,\theta\ \text{قتا}\,\theta + \text{جتا}^{٣}\,\theta\ \text{قا}\,\theta = \text{١}$

(١٣) $(\text{١} - \text{جا}\,\theta)\,(\text{قا}\,\theta + \text{ظا}\,\theta) = \text{جتا}\,\theta$

(١٤) $\text{جا}\,\theta\ \text{جا}\,(\text{٩٠}^{\circ} - \theta)\ \text{ظا}\,\theta = \text{١} - \text{جتا}^{٢}\,\theta$

(١٥) $\text{جتا}^{٢}\,\theta\ \text{ظا}^{٢}\,\theta + \text{جتا}^{٢}\,\theta + \text{ظتا}^{٢}\,\theta = \text{قتا}^{٢}\,\theta$

(١٦) $\text{جا}^{٤}\,\theta - \text{جتا}^{٤}\,\theta + \text{جتا}^{٢}\,\theta = \text{جا}^{٢}\,\theta$

(١٧) $\text{جا}^{٢}\,\alpha\ \text{جا}^{٢}\,\beta + \text{جا}^{٢}\,\alpha\ \text{جتا}^{٢}\,\beta + \text{جتا}^{٢}\,\alpha = \text{١}$

---

٣ أثبت صحة كل من المتطابقات الآتية :

(١) $\dfrac{\text{جتا}\,\theta \times \text{ظا}\,\theta}{\text{قتا}\,\theta} = \text{١} - \text{جتا}^{٢}\,\theta$

(٢) $\dfrac{\text{ظتا}\,\theta}{\text{١} + \text{ظتا}^{٢}\,\theta} = \text{جا}\,\theta \times \text{جتا}\,\theta$

(٣) $\dfrac{\text{جتا}\,\theta}{\text{١} + \text{جا}\,\theta} + \text{ظا}\,\theta = \text{قا}\,\theta$

(٤) $\dfrac{\text{جتا}^{٢}\,\theta}{\text{١} - \text{جا}\,\theta} = \text{١} + \text{جا}\,\theta$

(٥) $\dfrac{\text{١} - \text{جا}^{٢}\,\theta}{\text{١} - \text{جتا}^{٢}\,\theta} = \text{قتا}^{٢}\,\theta - \text{١}$

(٦) $\dfrac{\text{١} - \text{ظا}^{٢}\,\theta}{\text{١} + \text{ظا}^{٢}\,\theta} = \text{٢ جتا}^{٢}\,\theta - \text{١}$

(٧) $\dfrac{\text{قتا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta}\,(\text{١} - \text{جا}^{٢}\,\theta) = \text{ظتا}\,\theta$

(٨) $\dfrac{\text{١}}{\text{جا}^{٢}\,(\text{٩٠}^{\circ} - \theta)} - \text{ظا}^{٢}\,\theta = \text{١}$

(٩) $\dfrac{\text{١} + \text{ظا}^{٢}\,\theta}{\text{قا}^{٤}\,\theta} = \text{١} - \text{جا}^{٢}\,\theta$

(١٠) $\dfrac{\text{١}}{\text{١} + \text{ظا}^{٢}\,\alpha} - \dfrac{\text{١}}{\text{١} + \text{ظا}^{٢}\,\beta} = \text{جتا}^{٢}\,\alpha - \text{جتا}^{٢}\,\beta$

(١١) $\dfrac{\text{جتا}^{٤}\,\theta - \text{جتا}^{٢}\,\theta}{\text{جا}^{٤}\,\theta - \text{جا}^{٢}\,\theta} = \text{قا}^{٢}\,\theta - \text{ظا}^{٢}\,\theta$

(١٢) $(\text{قا}\,\theta - \text{ظا}\,\theta)^{٢} = \dfrac{\text{١} - \text{جا}\,\theta}{\text{١} + \text{جا}\,\theta}$

(١٣) $\dfrac{\text{١}}{\text{١} + \text{ظتا}\,\theta} = \dfrac{\text{ظا}\,\theta}{\text{١} + \text{ظا}\,\theta}$

(١٤) $\dfrac{\text{جا}^{٣}\,\alpha + \text{جتا}^{٣}\,\alpha}{\text{جا}\,\alpha + \text{جتا}\,\alpha} + \dfrac{\text{جا}^{٣}\,\alpha - \text{جتا}^{٣}\,\alpha}{\text{جا}\,\alpha - \text{جتا}\,\alpha} = \text{٢}$

(١٥) $\dfrac{\text{جتا}^{٢}\,\theta - \text{جا}^{٢}\,\theta}{\text{جا}\,\theta\ \text{جتا}^{٢}\,\theta + \text{جتا}\,\theta\ \text{جا}^{٢}\,\theta} = \text{قتا}\,\theta - \text{قا}\,\theta$

(١٦) $\dfrac{\text{جا}\,\theta\ \text{جا}\,(\text{٩٠}^{\circ} - \theta)}{\text{ظا}\,\theta} + \dfrac{\text{ظا}\,(\text{١٨٠}^{\circ} + \theta)}{\text{قا}\,\theta\ \text{قتا}\,\theta} = \text{١}$

(١٧) $(\text{جا}\,\theta + \text{قتا}\,\theta)^{٢} + (\text{جتا}\,\theta + \text{قا}\,\theta)^{٢} = \text{ظا}^{٢}\,\theta + \text{ظتا}^{٢}\,\theta + \text{٧}$

(١٨) $\dfrac{\text{١} - (\text{جا}\,\theta + \text{جتا}\,\theta)^{٢}}{\text{جا}\,\theta\ \text{جتا}\,\theta - \text{ظا}\,\theta} = \text{٢ ظا}^{٢}\,\theta$

٤ إذا كان : $\frac{\text{٣ جتا } \theta - \text{٢ جا } \theta}{\text{٣ جتا } \theta + \text{٢ جا } \theta} = \frac{٣}{٢}$ فأوجد قيمة : ظا θ «$-\frac{٣}{١٠}$»

---

٥ إذا كانت : جا θ + جتا θ = $\frac{٣}{٢}$ فأوجد قيمة : جا θ جتا θ حيث : θ ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[«$\frac{٥}{٨}$»

---

٦ إذا كان : قا θ − ظا θ = $\frac{١}{٤}$ فاحسب قيمة كل من : قا θ ، ظا θ «$\frac{١٧}{٨}$ ، $\frac{١٥}{٨}$»

---

٧ إذا كان : $\frac{\text{جا}^٢ \theta - \text{جتا}^٢ \theta}{\text{جا } \theta - \text{جتا } \theta} = \frac{٥}{٤}$ فأثبت أن : جا θ جتا θ = $\frac{٩}{٣٢}$

---

٨ إذا كان : ظا θ + ظتا θ = ٥ أوجد القيمة العددية لكل مما يأتي :

(١) ظا² θ + ظتا² θ «٢٣»

(٢) ظا³ θ + ظتا³ θ «١١٠»

(٣) ظا θ − ظتا θ «± $\sqrt{٢١}$»

(٤) ظا² θ − ظتا² θ «± ٥ $\sqrt{٢١}$»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : س + ص = ٣٠° فإن : ظا (س + ٢ ص) ظا (٢ س + ص) = ...

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) −١ (د) ٢ $\sqrt{٣}$

(٢) إذا كانت : جا θ = $\frac{أ}{ب}$ ، θ ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[فإن : $\sqrt{١ + \text{ظا}^٢ \theta}$ = ...

(أ) $\frac{أ}{\sqrt{ب^٢ - أ^٢}}$ (ب) $\frac{أ}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}}$ (جـ) $\frac{ب}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}}$ (د) $\frac{ب}{\sqrt{ب^٢ - أ^٢}}$

(٣) إذا كان : $\frac{\pi}{٢} < \theta < \pi$ فإن : $\sqrt{٤ + ٤ \text{ ظا}^٢ \theta}$ = ...

(أ) ٢ قا θ (ب) ٢ جتا θ (جـ) −٢ قا θ (د) −٢ جتا θ

(٤) إذا كان : جا θ ، جتا θ هما جذرا المعادلة : ٢ س² + ب س − ١ = ٠ فإن : ب = ...

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) −٤

(٥) إذا كان : ٣ جا θ + ٤ جتا θ = ٥ فإن : ٣ جتا θ − ٤ جا θ = ...

(أ) ٥ (ب) ٤ (جـ) ٢ (د) صفر

(٦) إذا كانت : θ ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[وكانت ظا θ + ظتا θ = ٨ فإن : جا θ + جتا θ = ...

(أ) $\frac{\sqrt{٥}}{٤}$ (ب) $\frac{\sqrt{٥}}{٢}$ (جـ) $\frac{٢}{\sqrt{٥}}$ (د) $\frac{٥}{٤}$

(٧) إذا كانت : $\theta \in]\cdot ، \frac{\pi}{2}[$ فإن : $\sqrt{قا^2 \theta + قتا^2 \theta}$ = ...

(أ) $\frac{قا \theta}{قتا \theta}$ (ب) ظا θ + ظتا θ (جـ) قا θ − ظا θ (د) قا θ + ظا θ

(٨) إذا كان : حا ٢ + حا² ٢ = ١ فإن : حتا² ٢ + حتا⁴ ٢ = ...

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) حا² ٢ (د) ٢

(٩) إذا كان : حا² θ + حا² ٢ θ + حا² ٣ θ + ... + حا² ١٠٠ θ = ن

فإن : حتا² θ + حتا² ٢ θ + حتا² ٣ θ + ... + حتا² ١٠٠ θ = ...

(أ) ١ − ن (ب) ١٠٠ ن (جـ) ١٠٠ − ن (د) ن − ١٠٠

(١٠) حا² ١° + حا² ٢° + حا² ٣° + ... + حا² ٩٠° = ...

(أ) ٤٤ $\frac{1}{2}$ (ب) ٤٥ (جـ) ٤٥ $\frac{1}{2}$ (د) ٤٦

(١١) $\frac{حتا^2 ١° + حتا^2 ٢° + حتا^2 ٣° + ... + حتا^2 ١٨٠°}{حتا ١° + حتا ٢° + حتا ٣° + ... + حتا ١٨٠°}$ = ...

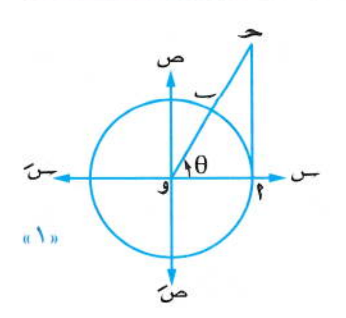
(أ) −٩٠ (ب) −٨٨ (جـ) ٨٨ (د) ٩٠

---

٢ أثبت أن : حا⁶ θ + حتا⁶ θ = ١ − ٣ حا² θ حتا² θ

---

٣ فى الشكل المقابل :



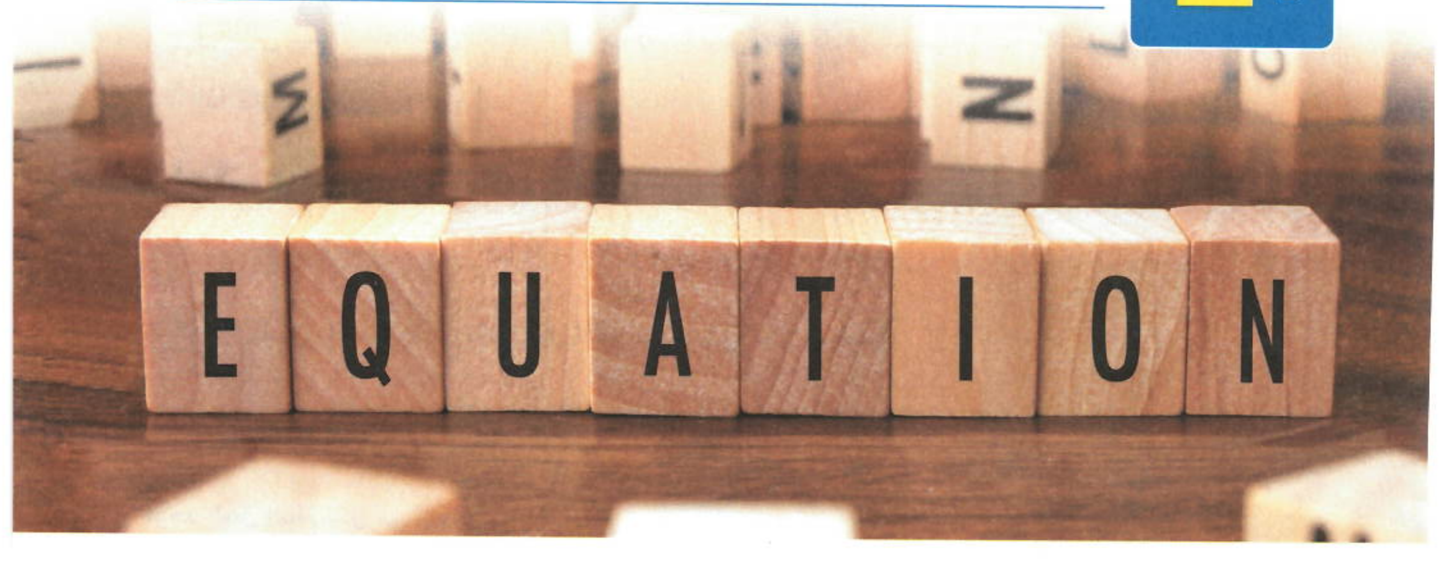
دائرة وحدة مركزها و

إذا كان : ب حـ = حا θ ، ٢حـ مماسًا للدائرة عند ٢

أوجد قيمة : حتا³ θ + حا θ

الدرس 2

حل المعادلات المثلثية



المقصود بحل المعادلة المثلثية هو إيجاد قيم المتغير التى تحقق هذه المعادلة وذلك بالاستعانة بالمتطابقات المثلثية.

الحل العام للمعادلة المثلثية

لإيجاد الحل العام للمعادلة المثلثية على الصورة :

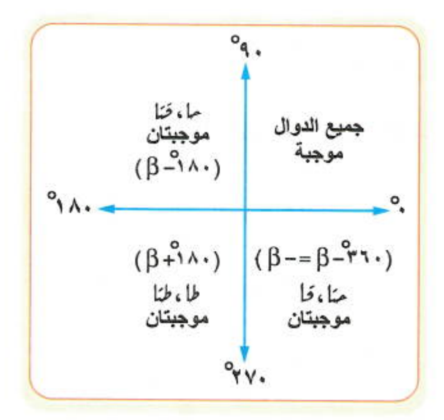
حتا θ = أ أو حا θ = أ أو طا θ = أ نتبع الخطوات الآتية :

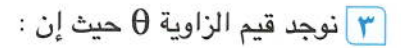
١ نوجد قياس الزاوية الحادة ولتكن β التى تحقق

المعادلة : حتا θ = |أ| أو حا θ = |أ| أو طا θ = |أ|

٢ نحدد الربع الذى تقع فيه الزاوية حسب إشارة أ

(انظر الشكل المقابل)





٣ نوجد قيم الزاوية θ حيث إن :

- إذا كانت θ تقع فى الربع الأول فإن : $\theta = \beta$
- إذا كانت θ تقع فى الربع الثانى فإن : θ = ١٨٠° − β
- إذا كانت θ تقع فى الربع الثالث فإن : θ = ١٨٠° + β
- إذا كانت θ تقع فى الربع الرابع فإن : θ = ٣٦٠° − β

٤ نضيف عددًا من الدورات (٢ ن π) حيث ن $\in$ ص إلى قيم θ لنحصل على الحل العام للمعادلة المثلثية.

ملاحظة

* $-1 \leq$ جا $\theta \leq 1$ ، $-1 \leq$ جتا $\theta \leq 1$ لجميع قيم θ الحقيقية

وبالتالي نجد أن المعادلتين : جا $\theta = أ$ ، جتا $\theta = أ$ ليس لهما حل فى مجموعة الأعداد الحقيقية

إذا كانت : $أ \notin [-1 ، 1]$

فمثلاً كل من المعادلات : جا $\theta = 1,3$ ، جتا $\theta = 2,5$ ، جا $\theta = -1,4$

، قا $\theta = 0,5$ ، قتا $\theta = -0,7$ ليس لها حلول حقيقية.

أى أنه ليس بالضرورة أن تكون لكل المعادلات المثلثية حلول حقيقية.

مثال 1

أوجد الحل العام لكل من المعادلات الآتية :

1 جتا $\theta = \frac{1}{2}$ 2 2 جا $\theta - \sqrt{2} = 0$ 3 $\sqrt{3}$ ظا $\theta - 1 = 0$

الحل

1 جتا $\theta = \frac{1}{2}$ (موجبة) $\therefore \theta$ تقع فى الربع الأول. $\therefore \theta = 60°$

أو θ تقع فى الربع الرابع. $\therefore \theta = 360° - 60° = 300°$ وهى تكافئ $-60°$

وبإضافة ($2 \, ن \, \pi$) حيث $ن \in ص$ إلى قيم θ

$\therefore \theta = \frac{\pi}{3} + 2 \, ن \, \pi$ أو $\theta = -\frac{\pi}{3} + 2 \, ن \, \pi$

$\therefore$ الحل العام للمعادلة هو : $\theta = \pm \frac{\pi}{3} + 2 \, ن \, \pi$ حيث $ن \in ص$

2 جا $\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (موجبة) $\therefore \theta$ تقع فى الربع الأول. $\therefore \theta = 45°$

أو θ تقع فى الربع الثانى. $\therefore \theta = 180° - 45° = 135°$

وبإضافة ($2 \, ن \, \pi$) حيث $ن \in ص$ إلى قيم θ

$\therefore \theta = \frac{\pi}{4} + 2 \, ن \, \pi$ أو $\theta = \frac{3}{4}\pi + 2 \, ن \, \pi$

$\therefore$ الحل العام للمعادلة هو : $\theta = \frac{\pi}{4} + 2 \, ن \, \pi$ أو $\theta = \frac{3}{4}\pi + 2 \, ن \, \pi$ حيث $ن \in ص$

3 ظا $\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (موجبة) $\therefore \theta$ تقع فى الربع الأول. $\therefore \theta = 30°$

أو θ تقع فى الربع الثالث. $\therefore \theta = 180° + 30° = 210°$

وبإضافة ($٢ ن \pi$) حيث ن ∈ ص إلى قيم θ

∴ $\theta = \frac{\pi}{٦} + ٢ ن \pi$ أو $\theta = \frac{٧}{٦} \pi + ٢ ن \pi$

∴ الحل العام للمعادلة هو : $\theta = \frac{\pi}{٦} + ٢ ن \pi$ أو $\theta = \frac{٧}{٦} \pi + ٢ ن \pi$ حيث ن ∈ ص

ويمكن كتابة الحل العام للمعادلة بصورة أكثر تبسيطًا كالآتى :

الحل العام للمعادلة هو : $\theta = \frac{\pi}{٦} + ن \pi$ حيث ن ∈ ص

وذلك بإضافة ن π إلى أصغر قياس موجب.

ملاحظة

مما سبق يمكن استنتاج أن :

إذا كانت β أصغر قياس موجب يحقق المعادلة ، ن ∈ ص فإن :

١ الحل العام للمعادلة جا θ = أ هو : $\theta = \beta + ٢ \pi ن$ ، $\theta = (\pi - \beta) + ٢ \pi ن$

ويمكن أن يكتب : $\theta = (-١)^{ن} \times \beta + \pi ن$

٢ الحل العام للمعادلة جتا θ = أ هو : $\theta = \pm \beta + ٢ \pi ن$

٣ الحل العام للمعادلة ظا θ = أ هو : $\theta = \beta + \pi ن$

مثال ٢

أوجد الحل العام لكل من المعادلات الآتية :

١ جا θ = ٠ ٢ جتا θ = ٠ ٣ جا θ = ١ ٤ جتا θ = -١

الحل

١ جا θ = ٠ ∴ θ = ٠° أو θ = ١٨٠°

(١ ، ٠) ٩٠° (-١ ، ٠) ١٨٠° و ٠° (١ ، ٠) (٠ ، -١) ٢٧٠°

وبإضافة ($٢ \pi ن$) حيث ن ∈ ص إلى قيم θ

∴ الحل العام للمعادلة هو :

$\theta = ٢ \pi ن$ أو $\theta = \pi + ٢ \pi ن$ حيث ن ∈ ص

ويمكن كتابة الحل العام للمعادلة فى صورة أكثر تبسيطًا كالآتى :

الحل العام للمعادلة هو : $\theta = \pi ن$ حيث ن ∈ ص

٢ جتا θ = ٠ ∴ θ = ٩٠° أو θ = ٢٧٠°

وبإضافة ($٢ \pi ن$) حيث ن ∈ ص إلى قيم θ

∴ الحل العام هو : $\theta = \frac{\pi}{٢} + ٢ \pi ن$ أو $\theta = \frac{٣}{٢} \pi + ٢ \pi ن$ حيث ن ∈ ص

ويمكن كتابة الحل العام للمعادلة فى صورة أكثر تبسيطًا كالآتى :

الحل العام للمعادلة هو : $\theta = \frac{\pi}{٢} + \pi$ ن حيث ن ∈ ص

٣ جا θ = ١ $\therefore \theta = ٩٠°$

$\therefore$ الحل العام هو : $\theta = \frac{\pi}{٢} + ٢\pi$ ن حيث ن ∈ ص

٤ جتا θ = −١ $\therefore \theta = ١٨٠°$

$\therefore$ الحل العام هو : $\theta = \pi + ٢\pi$ ن حيث ن ∈ ص

ملاحظة

مما سبق يمكن استنتاج الحل العام للمعادلات المثلثية للزوايا الربعية :

المعادلة	الحل العام
• جا θ = ٠	$\theta = \pi$ ن
• جا θ = ١	$\theta = \frac{\pi}{٢} + ٢\pi$ ن
• جا θ = −١	$\theta = \frac{٣\pi}{٢} + ٢\pi$ ن
• جتا θ = ٠	$\theta = \frac{\pi}{٢} + \pi$ ن
• جتا θ = ١	$\theta = ٢\pi$ ن
• جتا θ = −١	$\theta = \pi + ٢\pi$ ن

حاول بنفسك

أوجد الحل العام لكل من المعادلات الآتية :

١ ٢ جا θ − ١ = ٠ ٢ ٢ جتا θ + $\sqrt{٣}$ = ٠ ٣ ظا θ − $\sqrt{٣}$ = ٠

مثال ٣

أوجد الحل العام لكل من المعادلتين الآتيتين :

١ ظا θ + ١ = ٠ ٢ جتا^{٢} θ − جتا θ = ٠

الحل

١ ظا θ = −١ $\therefore$ ظا θ = −١ (سالبة)

$\therefore \theta$ تقع فى الربع الثانى. $\therefore \theta = ١٨٠° - ٤٥° = ١٣٥°$

أو θ تقع فى الربع الرابع. $\therefore \theta = ٣٦٠° - ٤٥° = ٣١٥°$

لاحظ أن

قياس الزاوية الحادة التى تحقق أن ظا θ = | −١ | هو ٤٥°

∴ أصغر قياس موجب يحقق المعادلة وهو $135°$

∴ الحل العام هو : $\theta = \frac{3}{4}\pi + ن\pi$ حيث ن ∈ ص

٢ حتا θ (حتا θ − ١) = ٠

∴ إما حتا θ = ٠ ∴ θ = ٩٠° أو θ = ٢٧٠° وهى تكافئ − ٩٠°

∴ $\theta = \frac{\pi}{2} + ن\pi$ حيث ن ∈ ص

أ، حتا θ = ١ ∴ θ = ٠ ∴ θ = ٢ ن π حيث ن ∈ ص

∴ الحل العام للمعادلة هو : $\theta = \frac{\pi}{2} + ن\pi$ أو θ = ٢ ن π حيث ن ∈ ص

مثال ٤

أوجد الحل العام للمعادلة : حا θ حتا θ = $\frac{1}{2}$ حا θ

الحل

∵ حا θ حتا θ − $\frac{1}{2}$ حا θ = ٠ ∴ حا θ (حتا θ − $\frac{1}{2}$) = ٠

∴ إما حا θ = ٠ ∴ θ = ٠° أو θ = ١٨٠°

∴ θ = ن π حيث ن ∈ ص

أو حتا θ − $\frac{1}{2}$ = ٠ ∴ حتا θ = $\frac{1}{2}$ (موجبة)

∴ θ تقع فى الربع الأول. ∴ θ = ٦٠°

أو θ تقع فى الربع الرابع. ∴ θ = ٣٦٠° − ٦٠° = ٣٠٠° وهى تكافئ − ٦٠°

∴ $\theta = \pm\frac{\pi}{3} + ٢ ن\pi$ حيث ن ∈ ص

∴ الحل العام هو : θ = ن π أو $\theta = \pm\frac{\pi}{3} + ٢ ن\pi$ حيث ن ∈ ص

حاول بنفسك

أوجد الحل العام للمعادلة : ٢ حا θ حتا θ − $\sqrt{3}$ حا θ = ٠

حل المعادلة المثلثية فى الفترة [٠ ، ٢ π [

مثال ٥

إذا كانت : θ ∈ [٠ ، ٣٦٠° [**أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلتين الآتيتين :**

١ ٢ حتا θ + ١ = ٠ **٢** $\sqrt{2}$ قا θ − ٢ = ٠

الحـل

١ ∵ ٢ حتا θ + ١ = ٠ ∴ حتا θ = $\frac{-١}{٢}$ (سالبة)

∴ θ تقع فى الربع الثانى أو الثالث.

، ∵ الزاوية الحادة التى جيب تمامها = $\frac{١}{٢}$ قياسها ٦٠°

∴ θ = ١٨٠° − ٦٠° = ١٢٠° أ، θ = ١٨٠° + ٦٠° = ٢٤٠° ∴ م.ح = {١٢٠° ، ٢٤٠°}

٢ ∵ $\sqrt{٢}$ قتا θ − ٢ = ٠ ∴ قتا θ = $\frac{٢}{\sqrt{٢}}$

∴ حتا θ = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ (موجبة) ∴ θ تقع فى الربع الأول أو الرابع.

، ∵ الزاوية الحادة التى جيب تمامها $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ قياسها ٤٥°

∴ θ = ٤٥° أ، θ = ٣٦٠° − ٤٥° = ٣١٥° ∴ م.ح = {٤٥° ، ٣١٥°}

مثال ٦

أوجد مجموعة الحل للمعادلة : ٤ حتا^{٢} θ − ٣ = ٠ حيث θ ∈ [٠ ، ٣٦٠°[

الحـل

∵ ٤ حتا^{٢} θ − ٣ = ٠ ∴ ٤ حتا^{٢} θ = ٣

∴ حتا^{٢} θ = $\frac{٣}{٤}$ ∴ حتا θ = ± $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ إما حتا θ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (موجبة) ∴ θ تقع فى الربع الأول أو الرابع.

، ∵ الزاوية الحادة التى جيب تمامها = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ قياسها ٣٠°

∴ θ = ٣٠° أ، θ = ٣٦٠° − ٣٠° = ٣٣٠°

أ، حتا θ = $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$ (سالبة) ∴ θ تقع فى الربع الثانى أو الثالث.

∴ θ = ١٨٠° − ٣٠° = ١٥٠° أ، θ = ١٨٠° + ٣٠° = ٢١٠°

∴ مجموعة الحل = {٣٠°، ١٥٠° ، ٢١٠° ، ٣٣٠°}

حاول بنفسك

أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلتين الآتيتين حيث θ ∈ [٠ ، ٢π[:

١ $\sqrt{٢}$ قتا θ − ٢ = ٠ ٢ طا^{٢} θ = ١

مثال ٧

أوجد مجموعة حل المعادلة : ٢ جا θ جتا θ + ٣ جتا θ = ٠ حيث θ ∈ [٠ ، π]

الحل

∵ ٢ جا θ جتا θ + ٣ جتا θ = ٠

∴ جتا θ (٢ جا θ + ٣) = ٠

∴ إما جتا θ = ٠

∴ θ = $\frac{\pi}{2}$ ، أ θ = $\frac{3\pi}{2}$ (مرفوض لأن θ ∈ [٠ ، π])

أ، ٢ جا θ + ٣ = ٠

∴ جا θ = $\frac{-3}{2}$ (وهذه المعادلة ليس لها حل لأن -١ ≤ جا θ ≤ ١)

∴ م.ح = {$\frac{\pi}{2}$}

مثال ٨

أوجد مجموعة حل المعادلة : ٤ جا^2 θ - ٣ جا θ جتا θ = ٠ حيث θ ∈ [٠ ، ٣٦٠°]

الحل

∵ ٤ جا^2 θ - ٣ جا θ جتا θ = ٠

∴ جا θ (٤ جا θ - ٣ جتا θ) = ٠

∴ إما : جا θ = ٠ ومنها θ = ٠ أ، θ = ١٨٠°

أ، ٤ جا θ - ٣ جتا θ = ٠

أى ٤ جا θ = ٣ جتا θ

أى $\frac{\text{جا } \theta}{\text{جتا } \theta} = \frac{3}{4}$

أى ظا θ = $\frac{3}{4}$ (موجبة)

∴ θ تقع فى الربع الأول أو الثالث.

، ∵ الزاوية الحادة التى ظلها $\frac{3}{4}$ قياسها ٣٦° ٥٢َ

∴ θ = ٣٦° ٥٢َ أ، θ = ١٨٠° + ٣٦° ٥٢َ = ٢١٦° ٥٢َ

∴ م.ح = {٠° ، ١٨٠° ، ٣٦° ٥٢َ ، ٢١٦° ٥٢َ}

حاول بنفسك

إذا كانت : ٠° < θ < ٣٦٠° أوجد مجموعة حل المعادلة : ٢ جا θ جتا θ = ٣ جتا^2 θ

مثال ٩

أوجد مجموعة حل المعادلة : ٢ جا^2 θ - جتا θ - ١ = ٠ حيث θ ∈ [٠ ، ٣٦٠°]

الحــل

بالتعويض عن حا^٢ θ = ١ − حتا^٢ θ «لتوحيد النسب المثلثية فى المعادلة»

∴ ٢ (١ − حتا^٢ θ) − حتا θ − ١ = ٠

∴ ٢ − ٢ حتا^٢ θ − حتا θ − ١ = ٠

∴ ١ − حتا θ − ٢ حتا^٢ θ = ٠

∴ (١ + حتا θ) (١ − ٢ حتا θ) = ٠

∴ إما : ١ + حتا θ = ٠ أى : حتا θ = −١

∴ θ = ١٨٠°

أ، ١ − ٢ حتا θ = ٠

أى حتا θ = $\frac{١}{٢}$ (موجبة)

∴ θ تقع فى الربع الأول أو الرابع.

، ∵ الزاوية الحادة التى جيب تمامها $\frac{١}{٢}$ قياسها ٦٠°

∴ θ = ٦٠° ، أ θ = ٣٦٠° − ٦٠° = ٣٠٠°

∴ م.ح = {٦٠° ، ١٨٠° ، ٣٠٠°}

استخدام التكنولوجيا

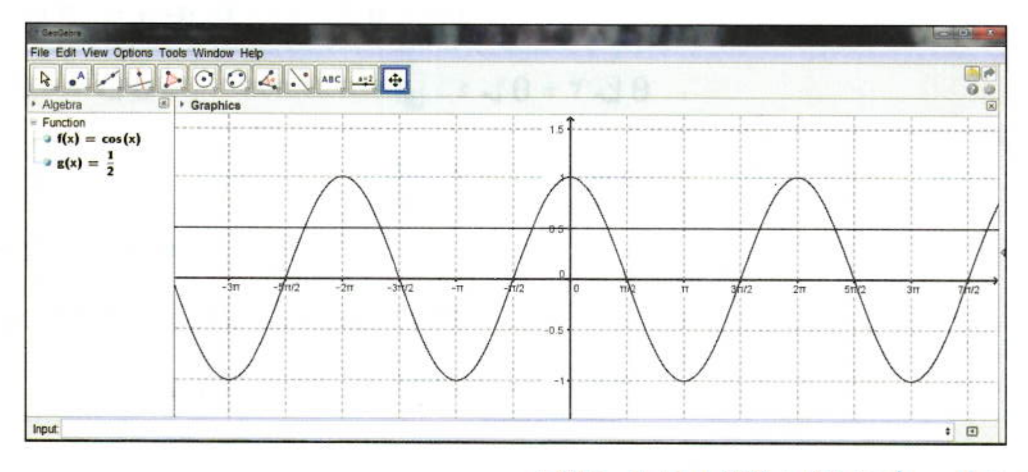
فى مثال (١) وجدنا أن :

الحل العام للمعادلة : حتا θ = $\frac{١}{٢}$ هو θ = ± $\frac{\pi}{٣}$ + ٢ ن π حيث ن ∈ ص

ويمكن التأكد من صحة الحل برسم الدالتين د$_١$ ، د$_٢$: د$_١$ (θ) = حتا θ ، د$_٢$: د$_٢$ (θ) = $\frac{١}{٢}$

باستخدام أحد البرامج الرسومية وتحديد قيم θ المناظرة لنقط تقاطع الدالتين ومقارنتها

بقيم θ فى الحل العام عند وضع ن = ... ، −٢ ، −١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ...



ونلاحظ من الرسم أن الدالتين تتقاطعان فى النقط :

... ، ($\frac{-٥}{٣}$π ، $\frac{١}{٢}$) ، ($\frac{-١}{٣}$π ، $\frac{١}{٢}$) ، ($\frac{١}{٣}$π ، $\frac{١}{٢}$) ، ($\frac{٥}{٣}$π ، $\frac{١}{٢}$) ، ...

أى أن θ = ... ، $\frac{-٥}{٣}$π ، $\frac{-١}{٣}$π ، $\frac{١}{٣}$π ، $\frac{٥}{٣}$π ، ...

وهى نفس القيم التى نحصل عليها من الحل العام

عند التعويض عن ن = ... ، −١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ...





على حل المعادلات المثلثية

من أسئلة الكتاب المدرسى • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت : ٠° ≤ θ < ٣٦٠° وكانت : جا θ + ١ = ٠ فإن : θ = ...

(أ) ٠° (ب) ٩٠° (جـ) ١٨٠° (د) ٢٧٠°

(٢) إذا كانت : ٠° ≤ θ < ٣٦٠° وكانت : جتا θ + ١ = ٠ فإن : θ = ...

(أ) ٩٠° (ب) ١٨٠° (جـ) ٢٧٠° (د) ٣٦٠°

(٣) إذا كانت : ٠° ≤ θ < ٣٦٠° وكانت : قتا θ − ١ = ٠ فإن : θ = ...

(أ) ٠° (ب) ٩٠° (جـ) ١٨٠° (د) ٢٧٠°

(٤) إذا كان : ٢ جا θ − √٣ = ٠ وكانت ٠° < θ < ٣٦٠° فإن : θ = ...

(أ) ٣٠° أ، ١٥٠° (ب) ٦٠° أ، ١٢٠° (جـ) ١٥٠° أ، ٢١٠° (د) ١٢٠° أ، ٢٤٠°

(٥) إذا كانت : ١٨٠° ≤ θ < ٣٦٠° وكانت : ٢ جتا θ + ١ = ٠ فإن : θ = ...

(أ) ٢١٠° (ب) ٢٤٠° (جـ) ٣٠٠° (د) ٣٣٠°

(٦) إذا كان : √٢ جتا θ + ١ = ٠ حيث θ قياس أكبر زاوية موجبة ، θ ∈ [٠ ، ٢π]

فإن : θ = ...

(أ) π/٤ (ب) ٣/٤ π (جـ) ٥/٤ π (د) ٧/٤ π

(٧) مجموعة حل المعادلة : جا θ − √٣ جتا θ = ٠ حيث θ ∈]π ، ٣/٢ π[هى ....

(أ) {٤/٣ π} (ب) {٧/٦ π} (جـ) {٥/٤ π} (د) {١/٣ π}

(٨) مجموعة حل المعادلة : √٣ ظا θ = ١ حيث ٩٠° < θ < ٢٧٠° هى ....

(أ) {٣٠°} (ب) {١٥٠°} (جـ) {٢١٠°} (د) {٢٤٠°}

(٩) مجموعة حل المعادلة : جا θ + جتا θ = ٠ حيث ١٨٠° < θ < ٣٦٠° تساوى ....

(أ) {٢١٠°} (ب) {٢٢٥°} (جـ) {٢٤٠°} (د) {٣١٥°}

(١٠) إذا كانت : ٠° ≤ θ < ١٨٠° ، ظتا θ = ١ فإن : θ = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ١٣٥°

(١١) إذا كانت : θ ∈]٠ ، π/٢[، جا θ ظتا θ = ١/٢ فإن مجموعة الحل هى ....

(أ) ∅ (ب) {π/٣} (جـ) {٤/٣ π} (د) {٥/٣ π}

(١٢) مجموعة حل المعادلة : $جا^2 \theta + 1 = 0$ ، $\theta \in [0 ، \pi]$ هي ....

(أ) $\{\frac{\pi}{2}\}$ (ب) $\{\frac{\pi}{4}\}$ (جـ) $\{\pi\}$ (د) $\emptyset$

(١٣) إذا كان : $قا(-\theta) = 2$ حيث $0° \leq \theta < 180°$ فإن : $\theta =$ ....

(أ) $60°$ (ب) $30°$ (جـ) $120°$ (د) $150°$

(١٤) الحل العام للمعادلة : $\sqrt{3}\ ظا\ \theta - 1 = 0$ هو .... ($ن \in ص$)

(أ) $\frac{\pi}{6} + \pi ن$ (ب) $2 ن\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (جـ) $\frac{\pi}{3} + \pi ن$ (د) $2 ن\pi \pm \frac{\pi}{3}$

(١٥) الحل العام للمعادلة : $جتا\ \theta = \frac{1}{2}$ هو .... ($ن \in ص$)

(أ) $2 ن\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (ب) $2 ن\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (جـ) $\frac{\pi}{6} + \pi ن$ (د) $\frac{\pi}{3} + \pi ن$

(١٦) الحل العام للمعادلة : $ظتا\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sqrt{3}$ هو .... ($ن \in ص$)

(أ) $\frac{\pi}{3} + ن\pi$ (ب) $\frac{\pi}{3} + 2 ن\pi$

(جـ) $\frac{4\pi}{3} + 2 ن\pi$ (د) $\frac{\pi}{3} + 2 ن\pi$ أو $\frac{4\pi}{3} + 2 ن\pi$

(١٧) إذا كان : $5\ جا\ س = 12\ جتا\ س$ حيث $0° \leq \theta \leq 180°$ فإن : $س \simeq$ ....

(أ) $157° 22' 48''$ (ب) $112° 37' 12''$ (جـ) $22° 37' 12''$ (د) $67° 22' 48''$

(١٨) إذا كانت : $3^{جا\ \theta} = 1$ حيث $\theta \in]0 ، 2\pi[$ فإن : $\theta =$ ....

(أ) $\frac{\pi}{4}$ (ب) $\frac{\pi}{2}$ (جـ) π (د) $\frac{3\pi}{2}$

(١٩) إذا كان : $0° \leq \theta < 360°$ فإن مجموعة حل المعادلة : $7^{جا\ \theta} = \frac{1}{49}$ هي ....

(أ) $\{30°\}$ (ب) $\{30° ، 150°\}$ (جـ) $\{210° ، 330°\}$ (د) $\emptyset$

(٢٠) إذا كان : $جا\ س = \frac{-1}{2}$ ، $جتا\ س = \frac{\sqrt{3}}{2}$ حيث $س \in [0 ، 2\pi[$ فإن : $س =$ ....

(أ) $\frac{\pi}{6}$ (ب) $\frac{5\pi}{6}$ (جـ) $\frac{7\pi}{6}$ (د) $\frac{11\pi}{6}$

(٢١) إذا كانت $س \in [0 ، 2\pi[$ فإن مجموعة حل المعادلة : $جتا\ س = \frac{1}{2}$ هي نفسها مجموعة حل المعادلة ....

(أ) $ظا\ س = 2\ جا\ س$ (ب) $2\ جتا^2 س = جتا\ س$

(جـ) $2\ جتا^2 س + 3\ جتا\ س = 2$ (د) $جتا\left(س - \frac{1}{2}\right) = 0$

(٢٢) إذا كانت : $\theta \in [0 ، 2\pi[$ فإن عدد حلول المعادلة : $2\ جا\ \theta = 3$ هو ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(٢٣) إذا كانت : $0° \leq \theta < 360°$ فإن مجموعة حل المعادلة : $ظا(\theta - 90°) = \sqrt{3}$ هي ....

(أ) $\{30° ، 210°\}$ (ب) $\{150° ، 210°\}$

(جـ) $\{150° ، 330°\}$ (د) $\{210° ، 330°\}$

(٢٤) إذا كانت : $٠ \le$ س $< ٢\pi$ فإن مجموعة حل المعادلة : جتا (س $- \frac{\pi}{٣}$) $= \frac{١}{\sqrt{٢}}$ هى ....

(أ) $\{\frac{\pi}{٤} ، \frac{-\pi}{٤}\}$ (ب) $\{\frac{\pi}{١٢} ، \frac{\pi}{٤}\}$ (جـ) $\{\frac{\pi}{١٢} ، \frac{٧\pi}{١٢}\}$ (د) $\{\frac{\pi}{١٢} ، \frac{٥\pi}{١٢}\}$

(٢٥) إذا كانت : $°٠ \le \theta < °٣٦٠$ فإن مجموعة حل المعادلة : ٢ جتا^٢ θ $-$ ١ $=$ ٠ هى ....

(أ) $\{°٤٥ ، °١٣٥ ، °٢٢٥ ، °٣١٥\}$ (ب) $\{°٤٥ ، °٣١٥\}$

(جـ) $\{°١٣٥ ، °٢٢٥\}$ (د) $\{°٤٥ ، °٢٢٥\}$

(٢٦) إذا كانت : $°٠ \le \theta < °٣٦٠$ فإن مجموعة حل المعادلة : جتا^٢ θ $-$ جتا θ $=$ ٠ هى ....

(أ) $\{°٠ ، °٩٠\}$ (ب) $\{°٠ ، °٩٠ ، °١٨٠\}$

(جـ) $\{°٠ ، °٩٠ ، °٢٧٠\}$ (د) $\{°٩٠ ، °٢٧٠\}$

(٢٧) إذا كانت $٠ \le$ س $< ٢\pi$ فإن مجموعة حل المعادلة : $\frac{\text{جتا}^٢ \text{س} - \text{جا}^٢ \text{س}}{١ - \text{جا}^٢ \text{س}} + ٢ = ٠$ هى ....

(أ) $\{\frac{\pi}{٣} ، \frac{٤\pi}{٣}\}$ (ب) $\{\frac{٢\pi}{٣} ، \frac{٥\pi}{٣}\}$

(جـ) $\{\frac{\pi}{٣} ، \frac{٢\pi}{٣} ، \frac{٤\pi}{٣} ، \frac{٥\pi}{٣}\}$ (د) $\{\frac{\pi}{٣} ، \frac{٢\pi}{٣} ، \frac{٣\pi}{٤} ، \frac{٥\pi}{٣}\}$

(٢٨) إذا كانت $°٠ < \theta \le °٣٦٠$ فإن مجموعة حل المعادلة : جا (٢ θ + °٣٠) $= \sqrt{٣}$ جتا (٢ θ + °٣٠)

هى ....

(أ) $\{°٣٠ ، °١٢٠\}$ (ب) $\{°٦٠ ، °٢٤٠\}$

(جـ) $\{°١٥ ، °٦٠ ، °١٢٠ ، °٢٤٠\}$ (د) $\{°١٥ ، °١٠٥ ، °١٩٥ ، °٢٨٥\}$

(٢٩) إذا كان : $\theta \in [٠ ، ٢\pi[$ فإن مجموعة الحل للمعادلة : جا θ + قتا θ $=$ ٢ تساوى ....

(أ) $\{\frac{\pi}{٢}\}$ (ب) $\{\frac{\pi}{٣}\}$ (جـ) $\{\pi\}$ (د) $\{\frac{٣\pi}{٢}\}$

(٣٠) عدد حلول المعادلة : جتا^٢ θ $-$ ٤ جتا θ + ٤ $=$ ٠ يساوى ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(٣١) إذا كانت : $°٠ \le \theta < °٣٦٠$ فإن مجموعة حل المعادلة : ٢ جتا^٢ θ $-$ ٥ جتا θ $-$ ٣ $=$ ٠ هى ....

(أ) $\{°٣٠ ، °١٥٠\}$ (ب) $\{°٦٠ ، °١٢٠\}$

(جـ) $\{°٦٠ ، °٢٤٠\}$ (د) $\{°١٢٠ ، °٢٤٠\}$

(٣٢) إذا كانت : $°٠ \le \theta < °٢٧٠$ فإن مجموعة حل المعادلة : ٢ جا^٢ θ + ٣ جا θ + ١ $=$ ٠ هى ....

(أ) $\{°٢٤٠\}$ (ب) $\{°٢١٠\}$ (جـ) $\{°٢٢٥\}$ (د) $\{°٣٣٠\}$

(٣٣) أى من قيم س التالية تحقق المعادلة : جا س + $\frac{١}{\text{جا س}} = \frac{٧}{٢\sqrt{٣}}$ ؟

(أ) °١٠ (ب) °٣٠ (جـ) °٤٥ (د) °٦٠

(٣٤) إذا كانت : θ ∈]٠ ، π[فإن عدد حلول المعادلة : جا θ جتا θ = ½ جا θ يساوى ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(٣٥) إذا كانت : ٠ < θ < ٢ π فإن عدد حلول المعادلة : جتا⁴ θ − جا⁴ θ = جا θ يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٣٦) إذا كانت : θ ∈ [٠ ، ٢ π[وكانت س هى مجموعة حل المعادلة : جا θ = ٠ ، ص هى مجموعة حل المعادلة : جتا θ = ½ فإن مجموعة حل المعادلة : جا θ (٢ جتا θ − ١) = ٠ هى ....

(أ) س ∩ ص (ب) س ∪ ص (جـ) س − ص (د) ص − س

(٣٧) إذا كانت : θ ∈ [٠ ، ٢ π[وكانت س تمثل مجموعة حل المعادلتين : جا θ = ١/√٢ ، جتا θ = ١/√٢
وكانت ص تمثل مجموعة حل المعادلة : جا θ = جتا θ فإن : ....

(أ) س = ص (ب) س ⊂ ص (جـ) ص ⊂ س (د) ن(س) > ن(ص)

(٣٨) مجموعة حل المعادلة : (١ + جا θ)² = جتا θ + ٢ جا θ حيث ٠° ≤ θ < ٣٦٠° هى ....

(أ) {٠°} (ب) {٠° ، ١٨٠°} (جـ) {١٨٠° ، ٢٧٠°} (د) {٠° ، ٩٠° ، ١٨٠°}

(٣٩) إذا كانت : س ، ص ∈ [٠ ، ٢ π] ، θ = س + ص فإن مجموعة قيم θ التى تحقق أن
جا س جا ص = ١ تساوى ....

(أ) {π ، ٢ π} (ب) {π ، ٣ π} (جـ) {π/٢ ، ٣π/٢} (د) {π/٢ ، π/٣}

(٤٠) إذا كان الحل العام للمعادلة : جا θ = ٣ أ − ٤ هو π/٢ + ٢ π ن حيث ن عدد صحيح فإن : أ = ...

(أ) صفر (ب) −١ (جـ) ١ (د) ٥/٣

(٤١) الحل العام للمعادلة : جا ٣/٢ θ = صفر هو ....

(أ) ن π (ب) ٣/٢ ن π (جـ) ٢/٣ ن π (د) ٣ ن π

(٤٢) الحل العام للمعادلة : جا θ جتا θ = ٠ هو .... (حيث ن ∈ ص)

(أ) ٢ π ن (ب) π ن (جـ) π/٢ ن (د) π/٤ ن

(٤٣) إذا كانت : θ ∈ [٠ ، ٢ π[فإن عدد حلول المعادلة : √(جتا² θ) = ½ يساوى ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٤

(٤٤) مجموعة حل المعادلة : ظا θ + قا θ = √٣ حيث ٠ < θ < ٢ π هى ....

(أ) {π/٦} (ب) {π/٦ ، ٧π/٦} (جـ) {π/٦ ، ١١π/٦} (د) {٧π/٦ ، ١١π/٦}

(٤٥) إذا كانت : θ ∈]٠ ، π/٢[وكانت : ظا θ + ظا² θ = ٢ فإن : قا² θ + قا⁴ θ = ...

(أ) ١ (ب) ٣ (جـ) ٦ (د) ٨

(٤٦) إذا كان : جتا θ أحد جذرى المعادلة : س² − س ظا θ + جا² θ = ½ فإن إحدى قيم θ هى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ١٢٠°

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد الحل العام لكل من المعادلات الآتية :

(١) حا θ = $\frac{١}{٢}$ (٢) حتا θ = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ (٣) طا θ − $\sqrt{٣}$ = ٠

(٤) حا θ = $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$ (٥) حتا θ = $\frac{-١}{٢}$ (٦) طا θ = −١

(٧) قتا θ = −٢ (٨) قا θ = $\sqrt{٢}$ (٩) ظتا θ = −$\sqrt{٣}$

(١٠) ٢ حتا θ − $\sqrt{٣}$ = ٠ (١١) ٢ حا θ + $\sqrt{٢}$ = ٠ (١٢) حتا $(\frac{\pi}{٢} - θ)$ = $\frac{١}{٢}$

(١٣) ٢ حا θ حتا θ + ٣ حتا θ = ٠ (١٤) حا θ حتا θ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ حا θ (١٥) ٢ حا٢ θ − $\sqrt{٢}$ حا θ = ٠

(١٦) حتا٢ θ − حتا θ = ٠ (١٧) ٢ حا٢ θ = حا θ

(١٨) $\sqrt{٢}$ حا θ حتا θ − حا θ = ٠ (١٩) ٢ حتا٢ θ + حتا θ = ٠ (٢٠) ٢ حتا٢ θ + ٣ حتا θ + ١ = ٠

---

٢ إذا كانت θ ∈ [٠ ، ٢ π[أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية :

(١) ٢ حتا θ − ١ = ٠ (٢) ٢ حا θ + ١ = ٠ (٣) ٢ حتا θ + $\sqrt{٣}$ = ٠

(٤) طا θ − ١ = ٠ (٥) ٣ قتا θ + ٢ = ٠ (٦) ٤ حا θ + ٣ = ٠

(٧) قا θ + $\sqrt{٢}$ = ٠ (٨) ٤ طا θ − ٥ = ٠ (٩) حا θ − ٢ حتا θ = ٠

(١٠) حتا θ + ١ = ٠ (١١) حا θ حتا θ = ٠ (١٢) $\frac{\text{حا } ٢٥°}{\text{حتا } ٦٥°}$ + طا (٩٠° − θ) = ٠

(١٣) حتا (θ − ٥٠°) = $\frac{١}{٢}$ (١٤) ٤ حا٢ θ = ٣ (١٥) ٣ قا٢ θ = ٤

(١٦) حا٢ θ − حتا٢ θ = ٠ (١٧) ٣ حتا٢ θ + ٢ حا θ حتا θ = ٠

(١٨) ٤ حا٢ θ − ٣ حا θ حتا θ = ٠ (١٩) ٤ طا٢ θ + ٣ طا θ = ٠

(٢٠) ٢ حا٢ θ + حا θ − ١ = ٠ (٢١) طا٢ θ − $\frac{١}{\text{ظتا } θ}$ = ٠

---

٣ أوجد حل كل من المعادلات الآتية فى الفترة [٠ ، $\frac{٣\pi}{٢}$] :

(١) طا٢ θ − طا θ = ٠ (٢) ٢ حا θ حتا θ − حتا θ = ٠

---

٤ حل المعادلة : حا θ حتا θ − $\frac{١}{٢}$ حتا θ = ٠ إذا كانت : ٠° < θ < ١٨٠°

---

٥ أوجد الحل العام لكل من المعادلات الآتية :

(١) حتا θ = حا ٢ θ (٢) حتا ٢ θ = حا θ

(٣) حتا ٥ θ = حا ٤ θ (٤) قا ٤ θ = قتا ٢ θ

٦ أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية فى الفترة [٠ ، π [:

(١) ٢ حا^٢ θ − ٥ حا θ + ٢ = ٠ | (٢) ٤ حا^٢ θ + ٨ حا θ + ٣ = ٠

(٣) ٢ طا^٢ θ − طا θ − ١ = ٠ | (٤) ٣ قا^٢ θ − ٧ قا θ + ٢ = ٠

---

٧ أوجد قياس أصغر زاوية موجبة تحقق المعادلتين : ٢ حا θ + ١ = ٠ ، طا θ − $\sqrt{٣}$ = ٠ «٢٤٠°»

---

٨ أوجد مجموعة حل المعادلة : حا $\left(\frac{٩ θ}{٤}\right) = \frac{١}{\sqrt{٢}}$ حيث θ ∈] ٠ ، $\frac{π}{٢}$ [«{٢٠° ، ٦٠°}»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) عدد حلول المعادلة : حا س = ٠ حيث س ∈ [٠ ، ٦ π[هو ....

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

(٢) إذا كان : حا أ + حا ب = ٢ فإن : ....

(أ) حتا أ + حتا ب = صفر (ب) حتا أ − حتا ب = ١

(جـ) حا أ − حا ب = ١ (د) حا (أ + ب) = −١

(٣) مجموعة حل المعادلة : حتا س + حا س = ٢ حيث س ∈ [٠ ، π[هى ....

(أ) $\{\frac{π}{٢}\}$ (ب) {صفر} (جـ) {صفر ، $\frac{π}{٢}$} (د) ∅

(٤) إذا كانت ٠° ≤ س ≤ ٣٦٠° فإن عدد حلول المعادلة : ٣ حا س = طا س هو ....

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(٥) إذا كان : طا θ + طتا θ = ٢ فإن : طا^{٢٠١٩} θ + طتا^{٢٠١٩} θ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(٦) قيم θ التى تجعل جذرى المعادلة التربيعية : س^٢ + ٢ س + ٢ حتا θ = ٠ متساويين حيث θ ∈ [٠ ، ٢ π] هى ....

(أ) $\frac{π}{٦}$ أ، $\frac{٥ π}{٦}$ (ب) $\frac{π}{٣}$ أ، $\frac{٢ π}{٣}$ (جـ) $\frac{π}{٣}$ أ، $\frac{٥ π}{٣}$ (د) $\frac{π}{٦}$ أ، $\frac{٧ π}{٦}$

(٧) مجموع حلول المعادلة : حا^٢ س − حا س حتا س = حتا س − حا س حيث س ∈]٠ ، ٢ π[هو ....

(أ) $\frac{٣}{٢}$ π (ب) ٢ π (جـ) ٣ π (د) ٤ π

(٨) مجموع حلول المعادلة : حتا ٢ س = − حا ٢ س حيث س ∈ [٠ ، ٢ π] هو ....

(أ) $\frac{٣ \pi}{٢}$ (ب) $\frac{٣ \pi}{٨}$ (جـ) $\frac{٩ \pi}{٢}$ (د) $\frac{١١ \pi}{٢}$

(٩) إذا كانت θ ∈ [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$] وكانت للمعادلة : س^٢ − (طا θ + $\frac{١}{\text{طا } \theta}$) س + ١ = صفر جذر وحيد موجب

فإن : حا θ حتا θ = ...

(أ) ٤ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) ٢ (د) $\frac{١}{٢}$

(١٠) إذا كان : ٤ حتا س + ٣ حا س = ٣ فإن : طا س = ... حيث س ∈]$\frac{٣ \pi}{٢}$ ، ٢ π[

(أ) $\frac{-٣}{٤}$ (ب) $\frac{-٥}{١٢}$ (جـ) $\frac{-٧}{٢٤}$ (د) $\frac{-٨}{١٥}$

(١١) الحل العام للمعادلة : طتا θ − طا θ = قتا θ هو ....

(أ) (−١)^{ن} × $\frac{\pi}{٦}$ + ن π (ب) $\frac{\pi}{٢}$ + ن π

(جـ) $\frac{٣ \pi}{٢}$ + ٢ ن π (د) − $\frac{\pi}{٦}$ + ٢ ن π

---

٢ إذا كانت θ ∈ [٠ ، ٢ π[فأوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية :

(١) ٢ حتا^٢ θ + ١١ حا ($\frac{\pi}{٢}$ − θ) − ٦ = ٠

(٢) ٤ حا θ + قتا θ − ٤ = ٠

(٣) حتا θ + قا θ حتا^٢ θ = $\sqrt{٣}$

(٤) طا^٤ θ − ٣ طا^٢ θ + ٢ = ٠

(٥) ٢ حا θ حتا θ + ٢ حا θ − حتا θ − ١ = ٠

(٦) $\sqrt{٣}$ طا^٢ θ − (١ + $\sqrt{٣}$) طا θ + ١ = ٠

(٧) طا^٢ θ + قا^٢ θ = ٧

(٨) ٦ طا^٢ θ + ٥ قا θ + ٥ = ٠

الدرس 3

حل المثلث القائم الزاوية



- أى مثلث يحتوى على ستة عناصر ، ثلاثة أضلاع وثلاث زوايا ، والمقصود بحل المثلث هو إيجاد قياسات زواياه وأطوال أضلاعه الغير معلومة.
- لحل المثلث القائم الزاوية يلزم معرفة : طولى ضلعين فيه أ ، طول أحد أضلاعه وقياس إحدى زاويتيه الحادتين.
- تستخدم النسب المثلثية للزاوية الحادة ونظرية فيثاغورث فى حل المثلث القائم الزاوية حيث :

فى المثلث أ ب حـ القائم الزاوية فى ب

١) جا θ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ حـ}}$ ، جتا θ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{\text{ب حـ}}{\text{أ حـ}}$

، ظا θ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب حـ}}$

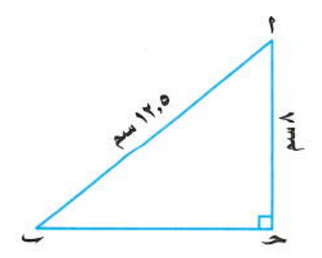
٢) $(\text{أ حـ})^2 = (\text{أ ب})^2 + (\text{ب حـ})^2$

أولًا حل المثلث القائم الزاوية إذا علم منه طولا ضلعين

مثال ١

حل المثلث أ ب حـ القائم الزاوية فى حـ والذى فيه : أ حـ = ٨ سم ، أ ب = ١٢,٥ سم

الحل



- ∵ $\frac{\text{أ حـ}}{\text{أ ب}}$ = جا ب ∴ جا ب = $\frac{٨}{١٢,٥}$

وباستخدام حاسبة الجيب نجد أن : ق(∠ب) ≈ ٣٩° ٤٧َ ٣١ً

- ∵ ق(∠ب) = ٣٩° ٤٧َ ٣١ً

∴ ق(∠أ) = ٩٠° − ٣٩° ٤٧َ ٣١ً = ٥٠° ١٢َ ٢٩ً

• ∵ $\frac{ب ح}{أ ب}$ = جاأ ∴ $\frac{ب ح}{١٢,٥}$ = جا (٣١° ٤٧َ ٣٩ً) ∴ ب ح = ١٢,٥ × جا (٣١° ٤٧َ ٣٩ً)

وباستخدام حاسبة الجيب نجد أن : ب ح ≈ ٩,٦ سم

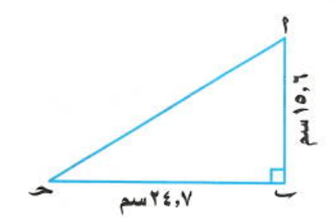
لاحظ أنه يمكن إيجاد ب ح باستخدام نظرية فيثاغورث حيث : $(ب ح)^{٢} = (أ ب)^{٢} - (أ ح)^{٢}$

فيكون ب ح = $\sqrt{(١٢,٥)^{٢} - (٨)^{٢}}$ ≈ ٩,٦ سم

مثال ٢

حل المثلث أ ب ح القائم الزاوية فى ب والذى فيه : أ ب = ١٥,٦ سم ، ب ح = ٢٤,٧ سم

الحل



• ∵ $\frac{أ ب}{ب ح}$ = طاح ∴ طاح = $\frac{١٥,٦}{٢٤,٧}$

وباستخدام حاسبة الجيب نجد أن : ق(∠ح) ≈ ٣٢° ١٦َ ٣٢ً

• ∴ ق(∠أ) = ٩٠° − ٣٢° ١٦َ ٣٢ً = ٥٧° ٤٣َ ٢٨ً

• ∵ $\frac{أ ب}{أ ح}$ = جاح ∴ $\frac{١٥,٦}{أ ح}$ = جا (٣٢° ١٦َ ٣٢ً) ∴ أ ح = $\frac{١٥,٦}{جا (٣٢° ١٦َ ٣٢ً)}$

وباستخدام حاسبة الجيب نجد أن : أ ح ≈ ٢٩,٢١ سم

لاحظ أنه يمكن إيجاد أ ح باستخدام نظرية فيثاغورث حيث : $(أ ح)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (ب ح)^{٢}$

فيكون : أ ح = $\sqrt{(١٥,٦)^{٢} + (٢٤,٧)^{٢}}$ ≈ ٢٩,٢١ سم

حاول بنفسك

حل المثلث أ ب ح القائم الزاوية فى ب فى الحالتين الآتيتين :

١ أ ب = ٦ سم ، أ ح = ٨,٦ سم

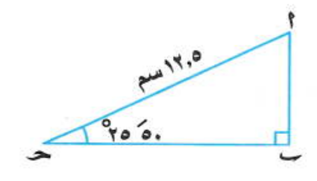
٢ أ ب = ٥,٤ سم ، ب ح = ٧,٣ سم

ثانيًا حل المثلث القائم الزاوية إذا علم منه طول ضلع وقياس إحدى زاويتيه الحادتين

مثال ٣

حل المثلث أ ب ح القائم الزاوية فى ب والذى فيه : أ ح = ١٢,٥ سم ، ق(∠ح) = ٢٥° ٥٠َ

الحل



• ق(∠أ) = ٩٠° − ٢٥° ٥٠َ = ٦٤° ١٠َ

• ∵ $\frac{أ ب}{أ ح}$ = جاح ∴ $\frac{أ ب}{١٢,٥}$ = جا ٢٥° ٥٠َ

∴ أ ب = ١٢,٥ جا ٢٥° ٥٠َ

وباستخدام حاسبة الجيب نجد أن : ءب ≈ ٥,٤٥ سم

• ∵ $\frac{\text{ب حـ}}{\text{ء حـ}}$ = حتا حـ ∴ $\frac{\text{ب حـ}}{١٢,٥}$ = حتا ٥٠َ ٢٥° ∴ ب حـ = ١٢,٥ حتا ٥٠َ ٢٥°

وباستخدام حاسبة الجيب نجد أن : ب حـ ≈ ١١,٢٥ سم

مثال ٤

حل المثلث ءب حـ القائم الزاوية فى ب والذى فيه : ءب = ٨,٦ سم ، ق (∠ حـ) = ١٨َ ٤١°

الحل

• ق (∠ ء) = ٩٠° − ١٨َ ٤١° = ٤٢َ ٤٨°

• ∵ $\frac{\text{ءب}}{\text{ب حـ}}$ = طا حـ ∴ $\frac{٨,٦}{\text{ب حـ}}$ = طا ١٨َ ٤١° ∴ ب حـ = $\frac{٨,٦}{\text{طا ١٨َ ٤١°}}$

وباستخدام حاسبة الجيب نجد أن : ب حـ ≈ ٩,٧٩ سم

لاحظ أنه يمكن إيجاد طول $\overline{\text{ب حـ}}$ باستخدام ق (∠ ء) حيث يكون : $\frac{\text{ب حـ}}{\text{ءب}}$ = طا ء

∴ $\frac{\text{ب حـ}}{٨,٦}$ = طا ٤٢َ ٤٨° ∴ ب حـ = ٨,٦ طا ٤٢َ ٤٨° ≈ ٩,٧٩ سم

• ∵ $\frac{\text{ءب}}{\text{ء حـ}}$ = جا حـ ∴ $\frac{٨,٦}{\text{ء حـ}}$ = جا ١٨َ ٤١° ∴ ء حـ = $\frac{٨,٦}{\text{جا ١٨َ ٤١°}}$

وباستخدام حاسبة الجيب نجد أن : ء حـ ≈ ١٣,٠٣ سم

لاحظ أنه يمكن إيجاد طول $\overline{\text{ء حـ}}$ باستخدام ق (∠ ء) حيث يكون : $\frac{\text{ءب}}{\text{ء حـ}}$ = جتا ء

∴ $\frac{٨,٦}{\text{ء حـ}}$ = جتا ٤٢َ ٤٨° ∴ ء حـ = $\frac{٨,٦}{\text{جتا ٤٢َ ٤٨°}}$ ≈ ١٣,٠٣ سم

حاول بنفسك

حل المثلث ءب حـ الذى فيه ق (∠ ب) = ٩٠° إذا كان :

١ ءب = ١٠ سم ، ق (∠ حـ) = ٥٤°

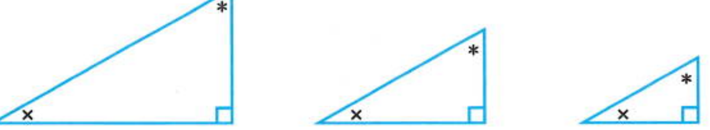
٢ ء حـ = ٣٢ سم ، ق (∠ ء) = ٢٤َ ٣٢°

تفكير ناقد

هل يمكن حل المثلث القائم الزاوية بمعلومية قياسى زاويتيه الحادتين ؟ **الإجابة :** لا يمكن.

تفسير الإجابة :

لأنه يوجد عدد لا نهائى من المثلثات القائمة التى لها نفس قياسى الزاويتين الحادتين (أى المثلثات المتشابهة)



ولذلك لا يمكن تحديد أى من هذه المثلثات هو المطلوب تحديد أطوال أضلاعه (أى حله) إلا إذا علم على الأقل أحد أطوال أضلاعه.

مثال ٥

حل المثلث أ ب حـ القائم الزاوية فى ب مقربًا قياسات الزوايا لأقرب ثلاثة أرقام عشرية من الراديان والطول لأقرب ثلاثة أرقام عشرية من السنتيمترات إذا كان :

١ ق(∠أ) = ١,٢٥٤ ء ، ب حـ = ١٠,٦ سم ٢ ق(∠حـ) = ٠,٧١٥ ء ، أ حـ = ٢٣ سم

الحـل

لاحظ أنه

يجب تحويل نظام الآلة الحاسبة من النظام (Deg) إلى النظام (Rad) قبل إجراء العمليات الحسابية التى تحتوى على دوال مثلثية لزوايا مقدرة بالراديان

وذلك بالضغط على SHIFT ثم MODE ثم 4

لاحظ أن
٩٠° تكافئ $\frac{\pi}{٢}$ راديان

١ • ق(∠حـ) = $\frac{\pi}{٢}$ − ١,٢٥٤ ء ≈ ٠,٣١٧ ء

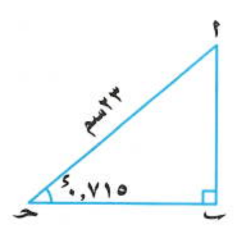
• ∵ حا أ = $\frac{\text{ب حـ}}{\text{أ حـ}}$ ∴ حا ١,٢٥٤ ء = $\frac{١٠,٦}{\text{أ حـ}}$

∴ أ حـ = $\frac{١٠,٦}{\text{حا } ١,٢٥٤ ء}$ ≈ ١١,١٥٥ سم

• ∵ طا أ = $\frac{\text{ب حـ}}{\text{أ ب}}$ ∴ طا ١,٢٥٤ ء = $\frac{١٠,٦}{\text{أ ب}}$

∴ أ ب = $\frac{١٠,٦}{\text{طا } ١,٢٥٤ ء}$ ≈ ٣,٤٧٥ سم

٢ • ق(∠أ) = $\frac{\pi}{٢}$ − ٠,٧١٥ ء ≈ ٠,٨٥٦ ء



• ∵ حا حـ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ حـ}}$ ∴ حا ٠,٧١٥ ء = $\frac{\text{أ ب}}{٢٣}$

∴ أ ب = ٢٣ × حا ٠,٧١٥ ء ≈ ١٥,٠٧٩ سم

• ∵ حتا حـ = $\frac{\text{ب حـ}}{\text{أ حـ}}$ ∴ حتا ٠,٧١٥ ء = $\frac{\text{ب حـ}}{٢٣}$

∴ ب حـ = ٢٣ × حتا ٠,٧١٥ ء ≈ ١٧,٣٦٧ سم

حاول بنفسك

حل المثلث أ ب حـ القائم الزاوية فى ب مقربًا قياسات الزوايا لأقرب ثلاثة أرقام عشرية من الراديان والطول لأقرب ثلاثة أرقام عشرية من السنتيمترات إذا كان :

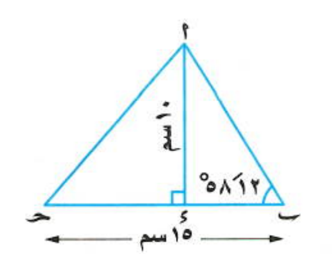
١ ق(∠أ) = ٠,٦٢٣ ء ، ب حـ = ١٠ سم ٢ ق(∠حـ) = ١,٠٧٣ ء ، أ حـ = ٣٧,٥ سم

مثال ٦

ﺃﺏﺣ مثلث فيه : ق(∠ب) = ٥٨° ١٢َ ، بح = ١٥ سم ، رسم $\overline{أء} \perp \overline{بح}$

حيث ء ∈ $\overline{بح}$ ، أء = ١٠ سم **أوجد :** ق(∠ح)

الحل



• فى △ أءب : ∵ ظا ٥٨° ١٢َ = $\frac{١٠}{بء}$

∴ بء = $\frac{١٠}{ظا ١٢َ ٥٨°}$ ≈ ٦,٢ سم

∴ ءح = ١٥ − ٦,٢ = ٨,٨ سم

• فى △ أءح : ∵ ظا ح = $\frac{١٠}{٨,٨}$

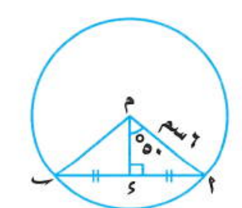
وباستخدام حاسبة الجيب نجد أن : ق(∠ح) = ٤٨° ٣٩َ ٨ً

مثال ٧

دائرة طول نصف قطرها ٦ سم رسم فيها وتر يقابل زاوية مركزية قياسها ١٠٠°

احسب طول هذا الوتر لأقرب ثلاثة أرقام عشرية.

الحل



نرسم $\overline{مء} \perp \overline{أب}$ يقطعه فى ء

∵ $\overline{مء} \perp \overline{أب}$ ∴ ء منتصف $\overline{أب}$

، ∵ م أ = م ب = نق ∴ $\overleftarrow{مء}$ ينصف ∠ أ م ب

∴ ق(∠ أ م ء) = ١٠٠° ÷ ٢ = ٥٠°

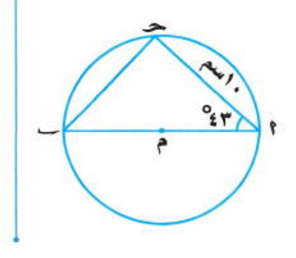
△ أ ء م فيه : ق(∠ أ ء م) = ٩٠°

∴ حا (∠ أ م ء) = $\frac{أء}{أم}$ ∴ حا ٥٠° = $\frac{أء}{٦}$

∴ أء = ٦ × حا ٥٠° ≈ ٤,٥٩٦ سم ∴ أب = ٢ أء ≈ ٩,١٩٣ سم

حاول بنفسك

فى الشكل المقابل :



$\overline{أب}$ قطر فى الدائرة م

، ق(∠أ) = ٤٣° ، أح = ١٠ سم

أوجد طول نصف قطر الدائرة م لأقرب رقمين عشريين.



تمارين 10

على حل المثلث القائم الزاوية

من أسئلة الكتاب المدرسى • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

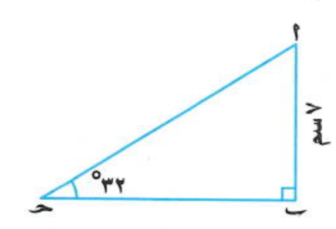
أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) يمكن حل المثلث القائم الزاوية فى كل الحالات الآتية ما عدا أن يكون المعطى ....

(أ) طولا ضلعين فى المثلث.
(ب) طولا ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما.
(جـ) قياسا زاويتين فى المثلث.
(د) طول أحد ضلعى القائمة وطول الوتر.

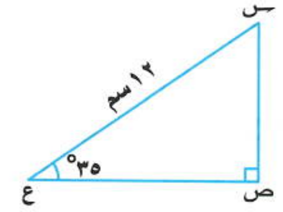
(٢) فى الشكل المقابل :



أ حـ ≃ .... سم

(أ) ١٣,٢
(ب) ٨,٣
(جـ) ٣,٧
(د) ٥,٩

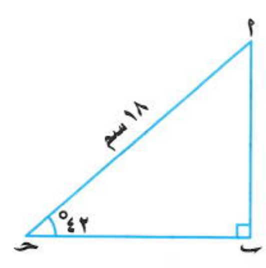
(٣) فى الشكل المقابل :



س ص ≃ .... سم.

(أ) ٩,٨
(ب) ٦,٩
(جـ) ٨,٤
(د) ١٤,٦

(٤) فى الشكل المقابل :



طول $\overline{\text{ب حـ}}$ ≃ .... سم.

(أ) ١٢
(ب) ١٣
(جـ) ١٦
(د) ٢٤

(٥) فى الشكل المقابل :

طول $\overline{\text{ب حـ}}$ ≃ .... سم.

(أ) ٦
(ب) ٤
(جـ) ٩
(د) ٥

(٦) فى الشكل المقابل :

ق (∠ حـ) = ...

(أ) ٥٦° ٢٧َ (ب) ٣٩° ٤٨َ

(جـ) ٣٣° ٣٣َ (د) ٥٠° ١٢َ

(٧) إذا كان المثلث أ ب حـ قائم الزاوية فى ب ، أ ب = ٥ سم ، ب حـ = ٥ $\sqrt{٣}$ سم

فإن : ق (∠ حـ) = ...

(أ) ٦٠° (ب) ٣٠° (جـ) ٤٥° (د) ٥٦°

(٨) فى الشكل المقابل :

أ ب = ... سم.

(أ) ٩٨ ظتا ٢٠° (ب) ٩٨ جا ٢٠°

(جـ) ٩٨ جتا ٢٠° (د) ٩٨ ظا ٢٠°

(٩) إذا كان Δ أ ب حـ قائم الزاوية فى ب ، ق (∠ أ) = ٠,٩٢٥ ء ، ب حـ = ٨ سم

فإن : أ حـ ≃ .... سم.

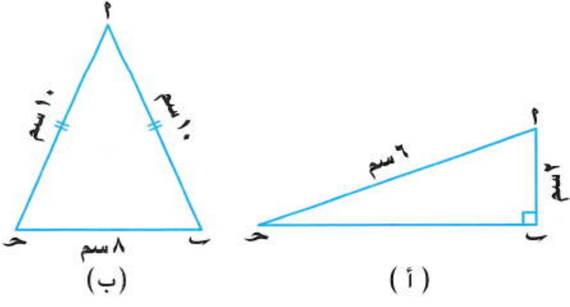
(أ) ١٠ (ب) ١٣ (جـ) ٦ (د) ١١

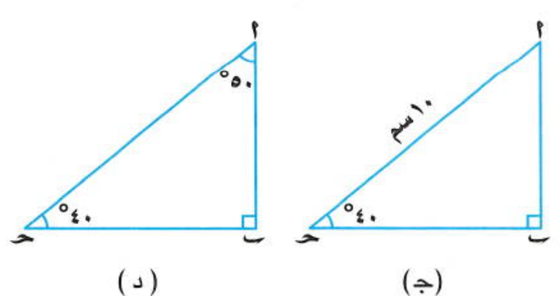
(١٠) إذا كان Δ أ ب حـ قائم الزاوية فى ب ، ق (∠ حـ) = ٥٤° ١٣َ ، ب حـ = ٢٠ سم

فإن : طول $\overline{\text{أ ب}}$ ≃ .... سم.

(أ) ١٦,٢ (ب) ١١,٧ (جـ) ١٤,٤ (د) ٢٧,٧

(١١) فى أى الأشكال الآتية لا يمكن حل المثلث أ ب حـ ؟





(١٢) إذا كان أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى أ فإن :

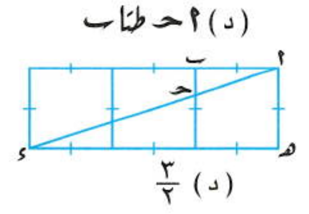
أولًا : ب حـ = ...

(أ) أ ب جا حـ (ب) أ ب جتا حـ (جـ) أ ب ظا ب (د) أ ب قا حـ

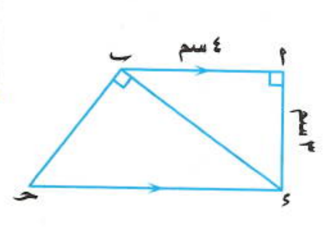
ثانيًا : أ ب = ...

(أ) أ حـ ظا ب (ب) أ حـ قا ب (جـ) أ حـ جتا ب (د) أ حـ ظتا ب

(١٣) الشكل المقابل يتكون من ٣ مربعات متلاصقة ، إذا كان طول ضلع كل منها يساوى ٢ سم فإن : ب حـ = ... سم



(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{٣}{٢}$

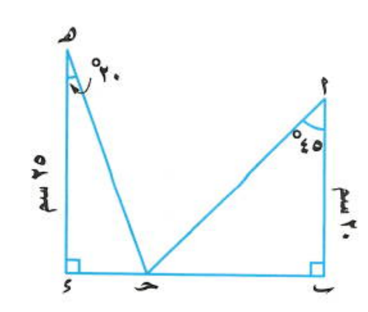


(١٤) فى الشكل المقابل :

طول $\overline{\text{ب حـ}}$ = ... سم.

(أ) ٥ (ب) $٦ \frac{٢}{٣}$

(جـ) $٣ \frac{٣}{٤}$ (د) ٣



(١٥) فى الشكل المقابل :

طول $\overline{\text{ب ء}}$ ≃ .... سم.

(أ) ٩

(ب) ٢٩

(جـ) ٢٣

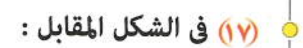
(د) ٢٨,٥

(١٦) أ ب حـ مثلث متساوى الساقين فيه : أ ب = أ حـ = ١٤,٨ سم ، ق (∠ أ) = °٦٤ ′٣٢ ٢٢

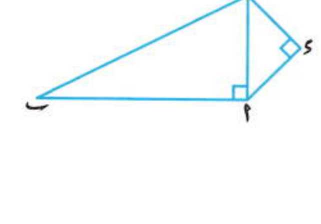
فإن : طول $\overline{\text{ب حـ}}$ ≃ .... سم.



(أ) ٢٥,٢ (ب) ١٥,٨ (جـ) ١٨,٧ (د) ٢٥,٨



(١٧) فى الشكل المقابل :





أ ء = ب حـ × ....

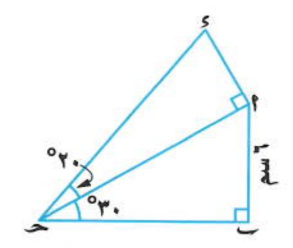
(أ) جا (∠ أ حـ ب) جا (∠ ء أ حـ)

(ب) جتا (∠ أ حـ ب) جتا (∠ ء أ حـ)

(جـ) جا (∠ أ حـ ب) ظا (∠ ء أ حـ)

(د) جتا (∠ أ حـ ب) ظتا (∠ ء أ حـ)

(١٨) فى الشكل المقابل :

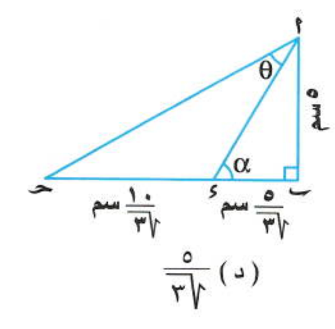


حـ ء = ... سم.

(أ) ٦ قتا °٣٠ قا °٢٠ (ب) ٦ جا °٣٠ جتا °٢٠

(جـ) ٦ قا °٣٠ جتا °٢٠ (د) ٦ جتا °٣٠ جا °٢٠

(١٩) فى الشكل المقابل :



أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب

وكان : أ ب = ٥ سم ، ب ء = $\frac{٥}{\sqrt{٣}}$ سم ، حـ ء = $\frac{١٠}{\sqrt{٣}}$ سم

فإن : قا α − جا θ = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) $\frac{٥}{٤}$ (د) $\frac{٥}{\sqrt{٣}}$

(٢٠) فى الشكل المقابل :

Δ أ ب حـ قائم الزاوية فى ب

، ء ∈ ب حـ بحيث حـ ء = ٢٠ سم

فإن : أ ب = ... سم.

(أ) ١٠ $\sqrt{3}$ (ب) ٢٠ (جـ) ١٥ (د) ١٠

(٢١) فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ، هـ حـ ء مثلثان قائما الزاوية فى ب ، ء على الترتيب

فإذا كان : حـ منتصف ب ء فإن : $\frac{\text{هـ ء}}{\text{أ ب}}$ = ...

(أ) ٣ : ٢ (ب) ٥ : ٣

(جـ) ٢ : ١ (د) ٣ : ١

(٢٢) يبين الشكل المقابل :

دائرة مركزها م ، أ ب قطر فيها

، فإذا كان : أ حـ = ١٢ سم ، ق (∠ أ) = ٣٧°

فإن طول نصف قطر الدائرة ≃ .... سم

(أ) ٧,٥١ (ب) ٩,٩٧ (جـ) ٧,٩٦ (د) ٤,٧٩

(٢٣) فى الشكل المقابل :

الدائرة م طول نصف قطرها ٥ سم

، أ حـ مماس للدائرة عند أ ، أ ء = ٦ سم

فإن : ق (∠ حـ أ ء) ≃ ....

(أ) ٥٣° (ب) ٣١° (جـ) ٣٩° (د) ٣٧°

(٢٤) فى الشكل المقابل :

طول أ حـ ≃ .... سم.

(أ) ٦ (ب) ١٠

(جـ) ٤ (د) ٥

(٢٥) أ ب حـ مثلث ، رسم أ ء ⊥ ب حـ فإذا كان : أ ء = ٦ سم ، ق (∠ ب) = ٥٢° ، ق (∠ حـ) = ٢٨°

فإن طول ب حـ ≃ .... سم.

(أ) ٢٠ (ب) ١٦ (جـ) ١٧ (د) ١٨

(٢٦) في الشكل المقابل :

أ ب ح مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه = ١٠ سم

، $\overline{أ ء} \perp \overline{ب ح}$ ، $\overline{ء هـ} \perp \overline{أ ب}$ ، $\overline{هـ و} \perp \overline{ب ح}$

فإن : ء هـ + هـ و = ... سم.

(أ) $\frac{٥\sqrt{٣}}{٢}$ (ب) $\frac{١٥\sqrt{٣}}{٤}$ (ج) $\frac{١٥\sqrt{٣}}{٨}$ (د) $\frac{٢٠\sqrt{٣}}{٧}$

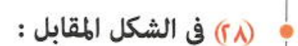
(٢٧) في الشكل المقابل :

إذا كانت : $\theta \in \left[\frac{\pi}{٦} ، \frac{\pi}{٣}\right]$

فإن : أ ح $\in$ ....

(أ) $\left[٨\sqrt{٣} ، ١٦\right]$ (ب) $\left[\frac{١٦}{٣}\sqrt{٣} ، ١٦\right]$

(ج) $\left[١٦ ، ١٦\sqrt{٣}\right]$ (د) $\left[١٦\sqrt{٣} ، ٢٤\right]$



(٢٨) في الشكل المقابل :

أى مما يأتى صحيح ؟

(أ) $\theta_١ = \theta_٢ = \theta_٣$ (ب) $\theta_١ < \theta_٢ < \theta_٣$

(ج) $\theta_١ > \theta_٢ > \theta_٣$ (د) $\theta_١ < \theta_٢$ ، $\theta_٣ < \theta_٢$

(٢٩) في الشكل المقابل :

إذا كان : $\overline{أ ح}$ قطر فى الدائرة م

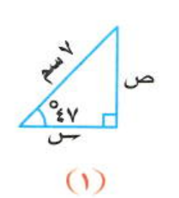
فإن مساحة الدائرة المارة برؤوس Δ أ ب ح

تساوى $\frac{\pi}{٤} \times (أ ب)^٢ \times$ ....

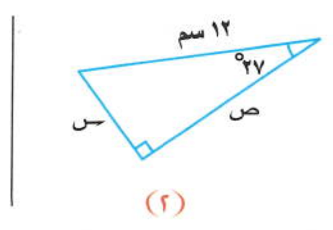
(أ) $حا^٢$ ح (ب) $حتا^٢$ ح (ج) ١ + $طا^٢$ أ (د) ١ − $طتا^٢$ أ

ثانيًا الأسئلة المقالية

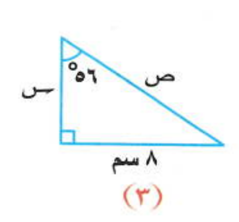
١ أوجد قيمة كل من س ، ص فى كل شكل من الأشكال الآتية :



(١)

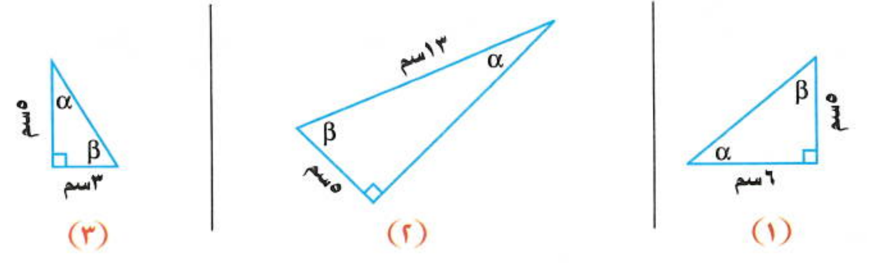


(٢)



(٣)

٢ أوجد قيمة كل من الزاويتين α ، β بالقياس الستينى فى كل شكل من الأشكال الآتية :



٣ أ ب ح مثلث قائم الزاوية فى ب أوجد طول $\overline{أب}$ مقربًا لرقم عشرى واحد إذا كان :

(١) ق (∠ح) = ١٨ َ ٣٢ ْ ، أ ح = ٢٥ سم «١٣,٤ سم»

(٢) ق (∠أ) = ٤٤ َ ٦٢ ْ ، ب ح = ١٦ سم «٨,٢ سم»

(٣) ق (∠أ) = ٨ َ ٤٢ ْ ، أ ح = ٢٤ سم «١٧,٨ سم»

٤ أ ب ح مثلث قائم الزاوية فى ب أوجد ق (∠ح) لأقرب دقيقة إذا كان :

(١) أ ب = ١٢,٦ سم ، أ ح = ١٨,٦ سم «٣٩ َ ٤٢ ْ»

(٢) ب ح = ٥٤ سم ، أ ح = ٨٨ سم «٩ َ ٥٢ ْ»

(٣) أ ب = ٢٧,٢ سم ، ب ح = ٢٠,٤ سم «٨ َ ٥٣ ْ»

٥ حل المثلث أ ب ح القائم الزاوية فى ب مقربًا قياسات الزوايا لأقرب درجة والطول لأقرب سم حيث :

(١) أ ب = ٤ سم ، ب ح = ٦ سم

(٢) أ ب = ١٢,٥ سم ، ب ح = ١٧,٦ سم

(٣) ب ح = ٣١ سم ، أ ح = ٤٢ سم

٦ حل Δ أ ب ح القائم الزاوية فى ب والذى فيه :

(١) أ ح = ٢٤,٦ سم ، أ ب = ١٦,٢ سم | (٢) أ ب = ٣٩ سم ، ب ح = ٦٢ سم

(٣) ق (∠ح) = ٦٢ ْ ، أ ح = ٧٦ سم | (٤) أ ب = ١٢ سم ، ق (∠أ) = ٢٤ َ ٤٢ ْ

٧ حل المثلث أ ب ح القائم الزاوية فى ب مقربًا الزوايا لأقرب ثلاثة أرقام عشرية من الراديان والطول لأقرب ثلاثة أرقام عشرية من السنتيمترات حيث :

(١) ق (∠أ) = ١,١٦٩ ء ، أ ب = ١٨ سم (٢) ق (∠ح) = ١,٠٨٢ ء ، أ ح = ٣٥,٨ سم

٨ مثلث متساوى الساقين طول كل من ساقيه ٧ سم وقاعدته ١٠ سم.

احسب قياسات زواياه. «٥٥ ً ٢٤ َ ٤٤ ْ ، ٥٥ ً ٢٤ َ ٤٤ ْ ، ١٠ ً ١٠ َ ٩١ ْ»

٩ أ ب ح مثلث متساوى الساقين فيه : أ ب = أ ح ، ب ح = ٢٠ سم ، ق (∠ب) = ٥٤ َ ٤٨ ْ

أوجد طول : $\overline{أب}$ لأقرب سنتيمتر. «١٥ سم»

١٠ سـ ص ع مثلث فيه : سـ ص = ١١,٥ سم ، ص ع = ٢٧,٦ سم ، سـ ع = ٢٩,٩ سم

أثبت أن : المثلث قائم الزاوية فى ص **ثم أوجد :** قياس زاوية سـ «٢٣َ ٦٧°»

---

١١ دائرة طول نصف قطرها ٨ سم ، رسم أ حـ قطر فيها ثم رسم الوتر أ ب طوله ١٠ سم

أوجد قياسات زوايا المثلث أ ب حـ «٤ً ١٩َ ٥١° ، ٩٠° ، ٥٦ً ٤٠َ ٣٨°»

---

١٢ دائرة م طول نصف قطرها ٧ سم ، رسم فيها وتر أ ب يقابل زاوية مركزية قياسها ١١٠° ،

احسب طول أ ب لأقرب ثلاثة أرقام عشرية. «١١,٤٦٨ سم»

---

١٣ أ ب حـ ء معين طولا قطريه أ حـ ، ب ء هما ١٨,٨ سم ، ٢٤,٦ سم

أوجد : ق (∠ أ ء حـ) لأقرب دقيقة. «٤٧َ ٧٤°»

---

١٤ قطعة أرض على شكل معين أ ب حـ ء طول ضلعه ١٠ أمتار ، ق (∠ أ ب حـ) = ١٦َ ١٠٤°

أوجد : طولى قطريه أ حـ ، ب ء «١٥,٧٩ مترًا تقريبًا ، ١٢,٢٨ مترًا تقريبًا»

---

١٥ أ ب حـ ء مستطيل طول قطره أ حـ = ٢٤,٨ سم ، ق (∠ أ حـ ب) = ٣٦َ ٢٣°

أوجد طول كل من : أ ب ، ب حـ «٩,٩ سم تقريبًا ، ٢٢,٧ سم تقريبًا»

---

١٦ أ ب حـ ء شبه منحرف متساوى الساقين فيه :

أ ء // ب حـ ، أ ب = حـ ء = ٥ سم ، أ ء = ٤ سم ، ب حـ = ١٠ سم.

أوجد قياس كل من زواياه الأربعة. «٨َ ٥٣° ، ٥٢َ ١٢٦° ، ٨َ ٥٣° ، ٥٢َ ١٢٦°»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) فى الشكل المقابل :

أ، ب، حـ، ء، ٨٠°

إذا كانت : ء ∈ ب حـ بحيث ء أ = ء ب = ء حـ = ٥ سم

، ق (∠ أ ء ب) = ٨٠° فإن : أ حـ = ... سم

(أ) ١٠ جا ٤٠° (ب) ١٠ جا ٥٠° (جـ) ٥ جا ٨٠° (د) ٥ جا ٤٠°

(٢) إذا كان : أ ب حـ مثلثًا قائم الزاوية أطوال أضلاعه هى أ ، أ + ١ ، أ − ١ حيث أ > ١

فإن قياس أكبر زواياه الحادة يساوى .... تقريبًا.

(أ) ٥٢َ ٣٦° (ب) ١٨َ ٤٨° (جـ) ٨َ ٥٣° (د) ٤٢َ ٦٢°

(٣) إذا كان : أ ب جـ مثلثًا قائم الزاوية فى ب ، أ ب = ٦ سم ومحيط Δ أ ب جـ = ٢٤ سم

فإن : ق (∠ جـ) ≃ ....

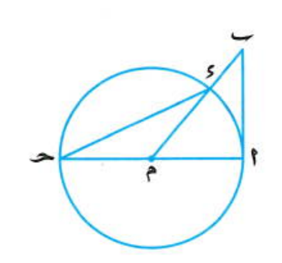
(أ) ١٤° (ب) ١٨° (جـ) ٣٧° (د) ٥٣°

(٤) إذا كان : أ ب جـ مثلثًا قائم الزاوية فى ب وكان أ ب > ب جـ ، مساحة Δ أ ب جـ = ٣٠ سم^2

، أ ب + ب جـ = ٢٠ سم فإن : ق (∠ أ) = ...

(أ) ١٩َ ٧٧° (ب) ٣٧َ ٥٤° (جـ) ١٨َ ٢٦° (د) ٤١َ ١٢°

(٥) فى الشكل المقابل :



إذا كان : $\overline{\text{أ جـ}}$ قطرًا فى دائرة م ، $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مماسًا لها

، أ ب = ٦ سم ، نق = ٥ سم

فإن : ق (∠ ء جـ م) = ...

(أ) ١٢َ ٥٠° (ب) ٦َ ٢٥° (جـ) ٣١َ ١٨° (د) ٣٩َ ٣٧°

(٦) فى الشكل المقابل :

$\overline{\text{ب جـ}}$ قطر فى دائرة م ، أ جـ = ٦ سم ، ق (∠ أ ب جـ) = θ

فإن مساحة Δ أ ب جـ = ... سم^2

(أ) ٦ طتا θ (ب) ٦ طا θ (جـ) ١٨ طا θ (د) ١٨ طتا θ

(٧) فى الشكل المقابل :



إذا كان : أ ب جـ مثلثًا قائم الزاوية فى أ

، $\overline{\text{أ ء}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$ ، أ ء = جا^2 θ

فإن : ب جـ = ...

(أ) جا θ (ب) طا θ (جـ) جتا θ (د) طا^2 θ

(٨) شكل خماسى منتظم طول ضلعه ٥,٨٨ سم فإن طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه ≃ .... سم.

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٧



زوايا الارتفاع وزوايا الانخفاض

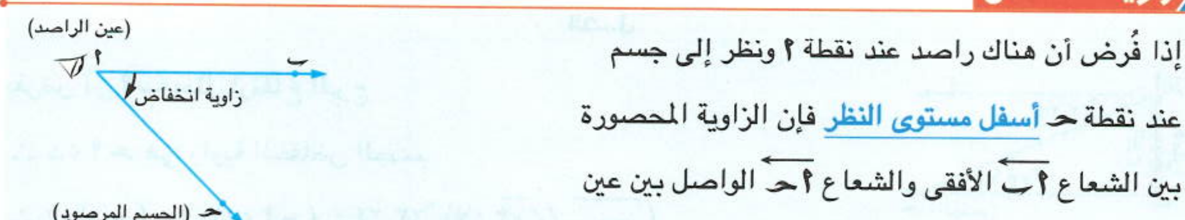


زاوية الارتفاع

إذا فُرض أن هناك راصد عند نقطة أ ونظر إلى جسم عند نقطة جـ **أعلى مستوى النظر** فإن الزاوية المحصورة بين الشعاع $\overleftarrow{أب}$ الأفقى والشعاع $\overleftarrow{أجـ}$ الواصل بين عين الراصد والجسم المرصود تسمى **زاوية ارتفاع** الجسم المرصود جـ بالنسبة لنقطة أ

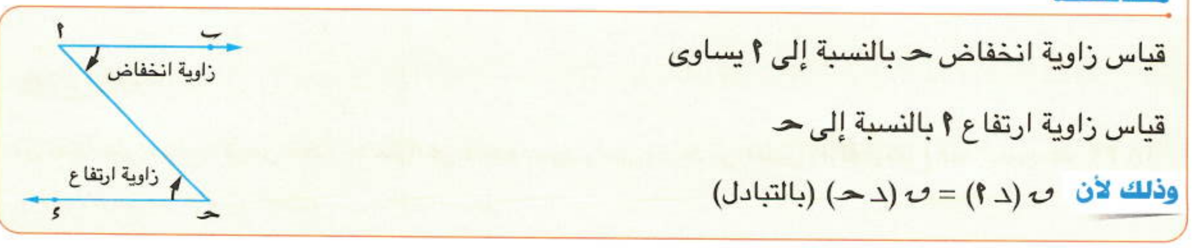
جـ (الجسم المرصود)
زاوية ارتفاع
أ
ب
(عين الراصد)

زاوية الانخفاض



إذا فُرض أن هناك راصد عند نقطة أ ونظر إلى جسم عند نقطة جـ **أسفل مستوى النظر** فإن الزاوية المحصورة بين الشعاع $\overleftarrow{أب}$ الأفقى والشعاع $\overleftarrow{أجـ}$ الواصل بين عين الراصد والجسم المرصود تسمى **زاوية انخفاض** الجسم المرصود جـ بالنسبة لنقطة أ

ملاحظة



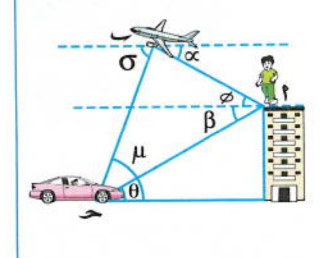
قياس زاوية انخفاض جـ بالنسبة إلى أ يساوى

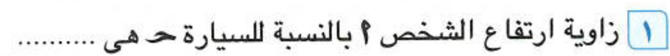
قياس زاوية ارتفاع أ بالنسبة إلى جـ

وذلك لأن ق (∠ أ) = ق (∠ جـ) (بالتبادل)

تحقق من فهمك

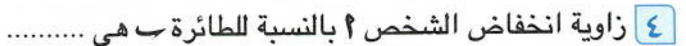
باستخدام الشكل المقابل أكمل ما يأتى :




١ زاوية ارتفاع الشخص أ بالنسبة للسيارة حـ هى ....


٢ زاوية انخفاض السيارة حـ بالنسبة للطائرة ب هى ....

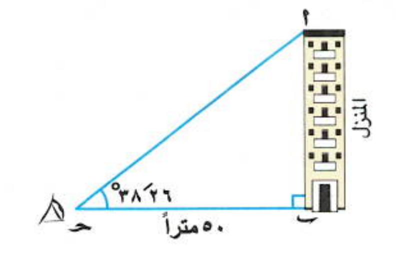
٣ زاوية ارتفاع الطائرة ب بالنسبة للشخص أ هى ....


٤ زاوية انخفاض الشخص أ بالنسبة للطائرة ب هى ....

مثال ١

من نقطة على سطح الأرض على بُعد ٥٠ مترًا من قاعدة منزل وجد أن قياس زاوية ارتفاع أعلى نقطة فى المنزل يساوى ٢٦َ ٣٨° أوجد ارتفاع المنزل لأقرب متر.

الحل



بفرض أن أب يمثل ارتفاع المنزل

∴ ظا ٢٦َ ٣٨° = $\frac{\text{أب}}{٥٠}$

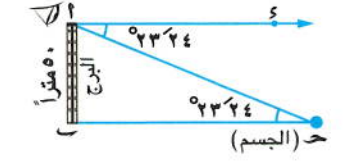
∴ أب = ٥٠ × ظا ٢٦َ ٣٨° ≈ ٤٠ مترًا.

∴ ارتفاع المنزل = ٤٠ مترًا تقريبًا.

مثال ٢

من قمة برج ارتفاعه ٥٠ مترًا وجد أن قياس زاوية انخفاض جسم واقع فى المستوى الأفقى المار بقاعدة البرج يساوى ٢٤َ ٢٣° أوجد بعد الجسم عن قاعدة البرج لأقرب متر.

الحل



بفرض أن أب يمثل ارتفاع البرج

∴ ∠ ء أ حـ هى زاوية انخفاض الجسم

∴ ق(∠ حـ) = ق(∠ ء أ حـ) = ٢٤َ ٢٣° (لأن أء // ب حـ)

∴ ظا ٢٤َ ٢٣° = $\frac{٥٠}{\text{حـ ب}}$ ∴ حـ ب = $\frac{٥٠}{\text{ظا ٢٤َ ٢٣°}}$ ≈ ١١٦ مترًا.

∴ بعد الجسم عن قاعدة البرج = ١١٦ مترًا تقريبًا.

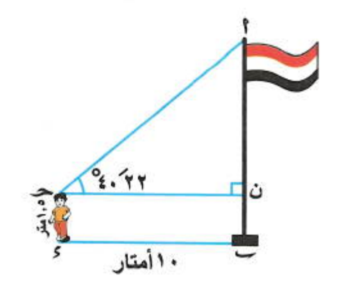
حاول بنفسك

من نقطة على سطح الأرض تبعد ٥٠ مترًا عن قاعدة عمود رأسى، وجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة العمود هو ٣٢َ ١٨°
أوجد لأقرب متر ارتفاع العمود عن سطح الأرض.

مثال ٣

وقف شخص طوله ١,٥ متر على بعد ١٠ أمتار من قاعدة سارية علم مثبتة رأسيًا على سطح الأرض فوجد أن قياس زاوية ارتفاع أعلى نقطة فى السارية يساوى ٢٢َ ٤٠° احسب طول السارية لأقرب متر.

الحل



بفرض أن : أب يمثل ارتفاع السارية ، حـء يمثل طول الشخص

نرسم $\overline{\text{حـ ن}}$ // $\overline{\text{ءب}}$ حيث ن ∈ $\overline{\text{أب}}$

∴ طا ٢٢َ ٤٠° = $\frac{\text{أ ن}}{١٠}$ ∴ أ ن = ١٠ × طا ٢٢َ ٤٠° ≈ ٨,٥ متر

، ∵ طول $\overline{\text{أب}}$ = أ ن + ن ب حيث : ن ب = حـء = ١,٥ مترًا

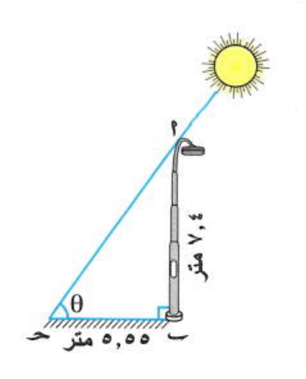
∴ أ ب = ٨,٥ + ١,٥ = ١٠ ∴ طول السارية = ١٠ أمتار تقريبًا.

مثال ٤

عمود إنارة ارتفاعه ٧,٤ متر يلقى ظلًا على الأرض طوله ٥,٥٥ متر.

أوجد بالراديان قياس زاوية ارتفاع الشمس عندئذ.

الحل



بفرض أن : $\overline{\text{أب}}$ يمثل عمود الإنارة

، $\overline{\text{ب حـ}}$ يمثل ظل عمود الإنارة على الأرض

، θ قياس زاوية ارتفاع الشمس عندئذ.

∴ طا θ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب حـ}}$ = $\frac{٧,٤}{٥,٥٥}$ ∴ θ ≈ ٥٣° ٧َ ٤٨ً

∴ قياس زاوية ارتفاع الشمس بالراديان = ٥٣° ٧َ ٤٨ً × $\frac{\pi}{١٨٠°}$ ≈ ٠,٩٢٧ ^ء^

حاول بنفسك

من قمة صخرة ارتفاعها ٢٠٠ متر عن سطح البحر قيست زاوية انخفاض قارب يبعد ٣٠٠ متر عن قاعدة الصخرة.

فما مقدار قياس زاوية الانخفاض بالراديان ؟

مثال ٥

من قمة صخرة ارتفاعها ٥٠ متراً رصد شخص سفينتين فى البحر على شعاع واحد من قاعدة الصخرة فوجد أن قياسى زاويتى انخفاضيهما ١٠َ ٣٢ْ ، ٣٠َ ٤٩ْ أوجد البعد بين السفينتين.

الحـــل

بفرض أن أب يمثل ارتفاع الصخرة ، حـ ء البعد بين السفينتين.

∴ فى Δ أ ب ء : طا ١٠َ ٣٢ْ = $\frac{٥٠}{\text{ب ء}}$

∴ ب ء = $\frac{٥٠}{\text{طا ١٠َ ٣٢ْ}}$ = ٧٩,٥ متر تقريبًا

، فى Δ أ ب حـ : طا ٣٠َ ٤٩ْ = $\frac{٥٠}{\text{ب حـ}}$

∴ ب حـ = $\frac{٥٠}{\text{طا ٣٠َ ٤٩ْ}}$ = ٤٢,٧ متر تقريبًا.

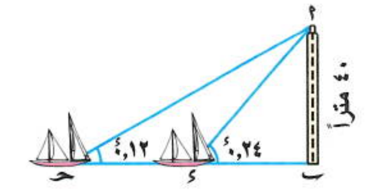
∴ حـ ء = ٧٩,٥ − ٤٢,٧ = ٣٦,٨ متر تقريبًا.



مثال ٦

تقترب سفينة من منارة ارتفاعها ٤٠ متراً عن سطح البحر ، رصدت قمة المنارة فى لحظة ما فوجدت أن قياس زاوية ارتفاعها ١٢,٠ءْ وبعد ٥ دقائق رصدت قمة المنارة ثانية فوجدت أن قياس زاوية ارتفاعها ٢٤,٠ءْ . احسب سرعة السفينة علمًا بأن السفينة تسير بسرعة منتظمة.

الحـــل



بفرض أن : $\overline{\text{أ ب}}$ يمثل المنارة

وأن حـ ء هى المسافة التى قطعتها السفينة فى ٥ دقائق.

∴ فى Δ أ ب حـ : طا حـ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب حـ}}$

∴ طا ١٢,٠ءْ = $\frac{٤٠}{\text{ب حـ}}$ ∴ ب حـ = $\frac{٤٠}{\text{طا ١٢,٠ءْ}}$ ≈ ٣٣١,٧٣ مترًا.

، فى Δ أ ب ء : طا (∠ أ ء ب) = $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب ء}}$

∴ طا ٢٤,٠ءْ = $\frac{٤٠}{\text{ب ء}}$

∴ ب ء = $\frac{٤٠}{\text{طا ٢٤,٠ءْ}}$ ≈ ١٦٣,٤٥ مترًا.

∴ ء حـ = ٣٣١,٧٣ − ١٦٣,٤٥ = ١٦٨,٢٨ مترًا.

∵ السفينة قطعت ١٦٨,٢٨ مترًا فى ٥ دقائق.

∴ سرعة السفينة = $\frac{\text{المسافة}}{\text{الزمن}}$ = $\frac{١٦٨,٢٨}{٥}$ = ٣٣,٦٥٦ م/دقيقة.

ملاحظة

عند حساب طول $\overline{\text{ب حـ}}$ أ، $\overline{\text{ب ء}}$ يجب تحويل الآلة من النظام (Deg) إلى النظام (Rad) بالضغط على



تمارين 11

على زوايا الارتفاع وزوايا الانخفاض

من أسئلة الكتاب المدرسى • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

• اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) من نقطة على سطح الأرض تبعد ٤٠ مترًا عن قاعدة برج قيست زاوية ارتفاع قمة البرج فكان قياسها ٧٢° فإن ارتفاع البرج لأقرب متر يساوى .... متر.

(أ) ١٢٠ (ب) ١٢١ (جـ) ١٢٢ (د) ١٢٣

(٢) رصد شخص طائرة على ارتفاع ١٠٠٠ متر فوجد أن قياس زاوية ارتفاعها ٤٠° فإن بعد الراصد عن الطائرة يساوى .... لأقرب متر.

(أ) ٦٤٣ (ب) ١١٩٢ (جـ) ١٣٠٥ (د) ١٥٥٦

(٣) من قمة برج ارتفاعه ٨٠ مترًا إذا وجد أن قياس زاوية انخفاض جسم واقع فى المستوى الأفقى المار بقاعدة البرج ١٢َ ٢٤° فإن بُعد الجسم عن قاعدة البرج يساوى تقريبًا ....

(أ) ١٩٥ متر (ب) ١٧٨ متر (جـ) ٨٨ متر (د) ٣٦ متر

(٤) من قمة منارة ارتفاعها ٨٠ متر عن سطح البحر قيست زاوية انخفاض هدف ثابت على سطح البحر فكان قياسها ٨٠° ، فإن بُعد الهدف عن قمة المنارة يساوى .... متر تقريبًا.

(أ) ٧٨ (ب) ٧٩ (جـ) ٨٠ (د) ٨١

(٥) عمود إنارة طوله ٨ متر يلقى ظلًا على الأرض طوله ٥ متر ، فإن قياس زاوية ارتفاع الشمس عندئذ لأقرب درجة يساوى ....

(أ) ٣٢° (ب) ٥١° (جـ) ٣٩° (د) ٥٨°

(٦) من قمة صخرة ارتفاعها ١٠٠ مترًا عن سطح البحر يكون قياس زاوية انخفاض قارب يُبعد عن قاعدة الصخرة ٢٠٠ متر بالراديان ≃ .... ء

(أ) ٠,٠٨ (ب) ٠,٤٦ (جـ) ٠,٢٥ (د) ٠,٢٤

(٧) إذا سار شخص مسافة ١ كم على طريق منحدر يميل على سطح الأفقى بزاوية قياسها ١٥َ ٢٢° فإن مقدار ارتفاعه عن المستوى الأفقى عندئذ يساوى .... متر تقريبًا.

(أ) ٩٢٥,٥ (ب) ٤٠٩,١ (جـ) ٣٧٨,٦ (د) ٣٧٦,٨

(٨) طائرة ورقية طول خيطها ٤٢ مترًا ، فإذا كان قياس الزاوية التى يصنعها الخيط مع الأرض الأفقية يساوى ٦٣°. فإن ارتفاع الطائرة عن سطح الأرض ≃ .... متر.

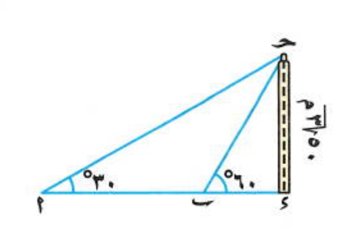
(أ) ٣٧ (ب) ١٩ (جـ) ٨٢ (د) ٨٠

(٩) شخص طوله ١٦٠ سم ويقف على سطح الأرض وعلى بُعد ٢٠ مترًا من شجرة رأسية وجد أن قياس زاوية ارتفاع أعلى نقطة فى الشجرة يساوى ٤٨ َ ٣١° فإن ارتفاع الشجرة ≃ .... متر.

(أ) ١٣ (ب) ١٤ (جـ) ١٢ (د) ١١

(١٠) فى الشكل المقابل :

إذا قيست زاويتا ارتفاع قمة برج طوله ٥٠ $\sqrt{٣}$ متر من النقطتين أ ، ب على نفس الخط الأفقى المار بقاعدة البرج فكان قياساهما ٣٠° ، ٦٠° على الترتيب فإن البعد بين النقطتين أ ، ب يساوى .... متر.



(أ) ١٠٠ $\sqrt{٣}$ (ب) ٥٠ $\sqrt{٣}$ (جـ) ١٠٠ (د) ٥٠

(١١) من سطح منزل ارتفاعه ٨ أمتار رصد شخص زاوية ارتفاع قمة عمارة أمامه فوجد أن قياسها ٦٣° ورصد زاوية انخفاض قاعدتها فوجد أن قياسها ٢٨° فإن ارتفاع العمارة لأقرب متر يساوى .... متر.

(أ) ٣٠ (ب) ٣٨ (جـ) ٢٩ (د) ٣١

(١٢) وقف شخص على صخرة ارتفاعها ٤٠ مترًا ولاحظ سفينتين فى البحر على شعاع أفقى واحد من قاعدة الصخرة ، وقاس زاويتى انخفاضيهما ، فوجد قياسيهما ١٢ َ ٣٥° ، ٦ َ ٥٣° فإن البعد بين السفينتين ≃ .... متر.

(أ) ١٩,٤ (ب) ١٧,٧ (جـ) ٢٦,٧ (د) ٨٦,٧

(١٣) إذا كان قياس زاوية ارتفاع الشمس ٣٠° فإن طول ظل برج ارتفاعه ١٥٠ متر على سطح الأرض = ... متر.

(أ) ٧٥ $\sqrt{٣}$ (ب) ٢٠٠ $\sqrt{٣}$ (جـ) ١٥٠ $\sqrt{٣}$ (د) ٧٥ $\sqrt{٢}$

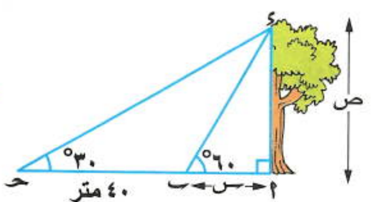
(١٤) من قمة تل ارتفاعه ٣٠٠ متر كانت زاويتى انخفاض قمة وقاعدة برج مقابل قياساهما ٣٠° ، ٤٥° على الترتيب فإذا كان كلًا من قاعدة التل والبرج على نفس المستوى الأفقى فإن ارتفاع البرج = ... متر.

(أ) ٥٠ $(٣ - \sqrt{٣})$ (ب) ٢٠٠ $(٣ - \sqrt{٣})$ (جـ) ١٠٠ $(٣ - \sqrt{٣})$ (د) ١٥٠ $(٣ - \sqrt{٣})$

(١٥) إذا كان طول ظل برج رأسى على الأرض الأفقية عندما كانت زاوية ارتفاع الشمس قياسها ٣٠° أكبر من طوله عندما كانت زاوية ارتفاع الشمس قياسها ٤٥° بمسافة ٦٠ متر فإن ارتفاع البرج = ... متر.

(أ) ٦٠ (ب) ٣٠ (جـ) ٦٠ $\sqrt{٣}$ (د) ٣٠ $(\sqrt{٣} + ١)$

(١٦) فى الشكل المقابل :



شخص يقف على ضفة نهر وجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة شجرة على الضفة الأخرى للنهر يساوى ٦٠° وعندما تحرك ٤٠ متر مبتعدًا عن الشجرة فى اتجاه أب فإن قياس زاوية ارتفاع قمة الشجرة أصبح ٣٠° فإن عرض النهر = ... متر.

(أ) ٦٠ (ب) ٤٠ (جـ) ٣٠ (د) ٢٠

(١٧) قام شخص من قمة برج مراقبة ارتفاعه ٢٠٠ متر برصد سفينتين فى البحر فى نفس المستوى الأفقى المار بقاعدة البرج وفى جهتين مختلفتين من برج المراقبة فكان زاويتى انخفاضيهما ٣٠° ، ٤٥° فإن المسافة بين السفينتين ≃ .... متر.

(أ) ٥٥٠ (ب) ٥٤٦ (جـ) ٤٣٦ (د) ٦١٥

(١٨) من قاعدة وقمة منزل ارتفاعه ١٠ أمتار تم رصد زاويتى ارتفاع قمة برج مقابل فكانتا ٦٠° ، ٣٠° على الترتيب فإذا كان قاعدتى المنزل والبرج على نفس المستوى الأفقى فإن ارتفاع البرج = ... متر.

(أ) ١٠ (ب) ١٥ (جـ) ٢٠ (د) ١٧,٥

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ من نقطة على بعد ٨ أمتار من قاعدة شجرة وجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة الشجرة ٢٢° ، أوجد ارتفاع الشجرة لأقرب رقمين عشريين. «٣,٢٣ مترًا»

---

٢ وجد شخص أن قياس زاوية ارتفاع قمة برج يساوى ٢١َ ٣٩° فإذا كان الشخص يبعد عن قاعدة البرج مسافة ٥٠ مترًا فما ارتفاع البرج ؟ «٤١ مترًا تقريبًا»

---

٣ رصد شخص طائرة على ارتفاع ١٠٠٠ متر فوجد أن قياس زاوية ارتفاعها ١٧َ ٢٥° ، أوجد بعد الراصد عن الطائرة. «٢٣٤١,٤ مترًا تقريبًا»

---

٤ من قمة صخرة ارتفاعها ١٨٠ مترًا من سطح البحر قيست زاوية انخفاض قارب يبعد ٣٠٠ متر عن قاعدة الصخرة ، فما مقدار قياس زاوية الانخفاض بالراديان ؟ «٠,٥٤ ^ء^ تقريبًا»

---

٥ رصد شخص من قمة جبل ارتفاعه ٢,٥٦ كم نقطة على سطح الأرض، فوجد أن قياس زاوية انخفاضها هو ٦٣°. أوجد المسافة لأقرب متر بين النقطة والراصد. «٢٨٧٣ مترًا تقريبًا»

---

٦ من قمة منارة ارتفاعها ٢٠٠ متر قيست زاوية انخفاض قارب فى النهر فكان قياسها يساوى ١٤َ ٣١° فما بُعد القارب عن قاعدة المنارة إذا كان القارب يقع مع قاعدة المنارة فى مستو أفقى واحد ؟ «٣٢٩,٨ مترًا تقريبًا»

---

٧ من قمة برج ارتفاعه ٦٠ مترًا وجد أن قياس زاوية انخفاض جسم واقع فى المستوى الأفقى المار بقاعدة البرج يساوى ٣٦َ ٢٨°. أوجد بعد الجسم عن قاعدة البرج لأقرب متر. «١١٠ متر تقريبًا»

٨ عمود إنارة طوله ٧,٢ متر يلقى ظلًا على الأرض طوله ٤,٨ متر
أوجد بالراديان قياس زاوية ارتفاع الشمس عندئذ. «٠,٩٨٣ء»

---

٩ من قمة برج ارتفاعه ١٦٠ مترًا وجد أن قياس زاوية انخفاض جسم فى المستوى الأفقى المار بقاعدة البرج هو ٣٥° أوجد بُعد هذا الجسم عن كل من قاعدة البرج وقمته لأقرب متر. «٢٢٩ مترًا تقريبًا ، ٢٧٩ مترًا تقريبًا»

---

١٠ سلم يستند بأحد طرفيه على حائط رأسى ، ويرتفع عن سطح الأرض ٣,٨ متر والطرف السفلى للسلم على الأرض وقياس زاوية ميل السلم على الأرض ٦٤°
أوجد لأقرب رقمين عشريين كلًا من :
(١) بعد الطرف السفلى عن الحائط. (٢) طول السلم. «١,٨٥ مترًا تقريبًا ، ٤,٢٣ مترًا تقريبًا»

---

١١ إذا كان قياس زاوية ارتفاع مئذنة من نقطة على بُعد ١٤٠ مترًا من قاعدتها يساوى ٤٦َ ٢٦° فما هو ارتفاع المئذنة لأقرب متر ؟ وإذا قيست زاوية ارتفاع المئذنة نفسها من نقطة تبعد ١١٠ أمتار من قاعدتها فأوجد لأقرب دقيقة قياس زاوية ارتفاعها عندئذ. «٧١ مترًا ، ٥٠َ ٣٢°»

---

١٢ وجد راصد أن قياس زاوية ارتفاع منطاد مثبت هو $\frac{\pi}{٦}$ ، ولما سار الراصد فى مستوى أفقى نحو المنطاد مسافة ٨٠٠ متر وجد أن قياس زاوية الارتفاع هو $\frac{\pi}{٤}$
أوجد ارتفاع المنطاد لأقرب متر. «١٠٩٣ مترًا تقريبًا»

---

١٣ وقف رجلان فى جهتين مختلفتين من سارية علم مثبتة رأسيًا على سطح الأرض بحيث كان الرجلان وقاعدة السارية على مستقيم أفقى واحد. فإذا رصد كل منهما زاوية ارتفاع قمة السارية وكان قياسا زاويتى ارتفاعها هما ١٦َ ٥٤° ، ١٢َ ٤٧° أوجد البعد بين الرجلين
إذا كان طول السارية ١٢ مترًا (بفرض إهمال طولى الرجلين). «١٩,٧ مترًا»

---

١٤ $\overline{أب}$ يمثل برجًا ارتفاعه ٥٠ مترًا قاعدته ب وقمته أ ، وقف شخصان أحدهما عند حـ والآخر عند ء حيث ب ، حـ ، ء تقع على مستقيم أفقى واحد ، بحيث حـ تقع بين ب ، ء فإذا رصد كل منهما زاوية ارتفاع قمة البرج ، كان قياسا زاويتى ارتفاع قمة البرج ١٣َ ٥٢° ، ٣٦َ ٤٥° على الترتيب فأوجد طول $\overline{حـ ء}$ (بفرض إهمال طولى الشخصين). «١٠,٢ مترًا»

---

١٥ من قمة برج ارتفاعه ٦٠ مترًا رصدت سفينتان فى البحر على شعاع أفقى واحد من قاعدة البرج فوجد أن قياسى زاويتى انخفاضيهما ٤٧° ، ٣٥َ ٤١° على الترتيب.
أوجد البعد بين السفينتين لأقرب متر. «١٢ مترًا»

---

١٦ يقف شخص على بعد ٨٥ مترًا من قاعدة برج على قمته سارية علم فلاحظ أن قياسى زاويتى ارتفاع قمة السارية وقاعدة السارية ٥٦° ، ٥٤° على الترتيب.
أوجد طول سارية العلم لأقرب متر (بفرض إهمال طول الشخص). «٩ أمتار»

١٧ تقترب سفينة من منارة ارتفاعها ٥٠ مترًا ، رصدت قمة المنارة فى لحظة ما فوجد أن قياس زاوية ارتفاعها ١١ ، ٠° وبعد ١٥ دقيقة رصدت قمة المنارة ثانية فوجد أن قياس زاوية ارتفاعها ٢٢ ، ٠°

احسب سرعة السفينة علمًا بأنها تسير بسرعة منتظمة. «١٥,٣ متر/دقيقة»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) فى الشكل المقابل :

إذا كانت قياسات زوايا ارتفاع أعلى نقطة فى البرج

من ثلاث نقاط على الخط المؤدى لأسفل نقطة فى البرج

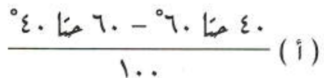
هى ٣٠° ، ٤٥° ، ٦٠° على الترتيب

فإن أ ب : ب حـ = ...

(أ) ١ : $\sqrt{٣}$ (ب) ٢ : ٣ (جـ) $\sqrt{٣}$: $\sqrt{٢}$ (د) $\sqrt{٣}$: ١

(٢) فى الشكل المقابل :

ظل زاوية ارتفاع قمة البرج من قمة المنزل = ...



(أ) $\frac{٤٠ \text{ جا } ٦٠° - ٦٠ \text{ جا } ٤٠°}{١٠٠}$

(ب) $\frac{٤٠ \text{ ظا } ٦٠° - ٦٠ \text{ ظا } ٤٠°}{١٠٠}$

(جـ) ١٠٠ ظا ٨٠°

(د) ٤٠ ظا ٦٠° − ٦٠ ظا ٤٠°

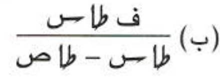
(٣) فى الشكل المقابل :

قيست زاويتا ارتفاع قمة جبل $\overline{أ ب}$

من قاعدة وقمة منزل $\overline{حـ ء}$ ارتفاعه ف فوجد قياساهما على

الترتيب س ، ص فإن : أ ب = ...

(أ) $\frac{\text{ف ظا س}}{\text{ظا ص}}$



(ب) $\frac{\text{ف ظا س}}{\text{ظا س − ظا ص}}$

(جـ) ف (ظا س − ظا ص) (د) ف ظا س ظا ص

الدرس 5

القطاع الدائرى

تعريف

القطاع الدائرى هو جزء من سطح دائرة محدود بقوس فيها وبنصفى القطرين المارين بطرفى هذا القوس.

فإذا رسمنا فى الدائرة م نصفى القطرين $\overline{مأ}$ ، $\overline{مب}$

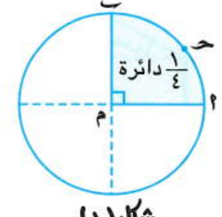
– كما فى الشكل المقابل – فإن سطح الدائرة

ينقسم بهما إلى جزأين كل منهما يسمى **«قطاع دائرى»**.

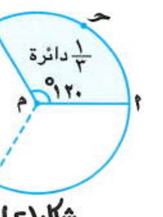


- فالجزء م أ جـ ب يسمى قطاعًا دائريًا أصغر بينما الجزء م أ ء ب يسمى قطاعاً دائريًا أكبر.
- وتسمى ∠ أ م ب بزاوية القطاع الأصغر، ∠ أ م ب المنعكسة بزاوية القطاع الأكبر.
- ويسمى $\overset{\frown}{أجـب}$ بقوس القطاع الأصغر ، $\overset{\frown}{أءب}$ بقوس القطاع الأكبر.

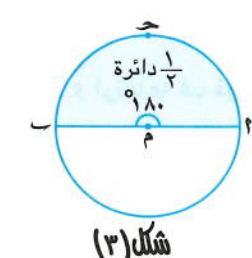
مساحة القطاع الدائرى



شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)



شكل (٤)

بملاحظة الأشكال السابقة نجد أن :

شكل (١) : $\frac{\text{مساحة القطاع (م أ جـ ب)}}{\text{مساحة الدائرة م}} = \frac{١}{٤}$ ، $\frac{\text{ق (∠ أ م ب)}}{\text{قياس الدائرة م}} = \frac{٩٠°}{٣٦٠°} = \frac{١}{٤}$

شكل (٢) : $\frac{\text{مساحة القطاع (م أ جـ ب)}}{\text{مساحة الدائرة م}} = \frac{١}{٣}$ ، $\frac{\text{ق (∠ أ م ب)}}{\text{قياس الدائرة م}} = \frac{١٢٠°}{٣٦٠°} = \frac{١}{٣}$

شكل(٣) : $\frac{\text{مساحة القطاع (م ا حـ ب)}}{\text{مساحة الدائرة م}} = \frac{1}{2}$ ، $\frac{\text{ق (د ا م ب)}}{\text{قياس الدائرة م}} = \frac{180^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{2}$

شكل(٤) : $\frac{\text{مساحة القطاع (م ا حـ ب)}}{\text{مساحة الدائرة م}} = \frac{2}{3}$ ، $\frac{\text{ق (د ا م ب المنعكسة)}}{\text{قياس الدائرة م}} = \frac{240^\circ}{360^\circ} = \frac{2}{3}$

أى أن النسبة بين مساحة القطاع ومساحة الدائرة هى نفس النسبة بين قياس زاوية القطاع وقياس الدائرة.

$$\frac{\text{مساحة القطاع}}{\text{مساحة الدائرة}} = \frac{\text{قياس زاوية القطاع}}{\text{قياس الدائرة}}$$

وإذا رمزنا إلى : قياس زاوية القطاع بالتقدير الدائرى بالرمز $\theta^{د}$ وقياسها بالتقدير الستينى بالرمز $س^\circ$ ، طول نصف قطر الدائرة بالرمز نق وطول قوس القطاع بالرمز ل فإن :

١ $\frac{\text{مساحة القطاع الدائرى}}{\pi \text{ نق}^2} = \frac{\theta^{د}}{2\pi}$ $\therefore$ مساحة القطاع الدائرى $= \frac{\theta^{د}}{2\pi} \times \pi \text{ نق}^2$

أى أن مساحة القطاع الدائرى $= \frac{1}{2} \theta^{د} \text{ نق}^2$

٢ $\frac{\text{مساحة القطاع الدائرى}}{\pi \text{ نق}^2} = \frac{س^\circ}{360^\circ}$ $\therefore$ مساحة القطاع الدائرى $= \frac{س^\circ}{360^\circ} \times \pi \text{ نق}^2$

أى أن مساحة القطاع الدائرى $= \frac{س^\circ}{360^\circ} \times$ مساحة الدائرة

٣ $\because \theta^{د} = \frac{ل}{\text{نق}}$

، $\because$ مساحة القطاع الدائرى $= \frac{1}{2} \theta^{د} \text{ نق}^2$ $\therefore$ مساحة القطاع الدائرى $= \frac{1}{2} \times \frac{ل}{\text{نق}} \times \text{نق}^2$

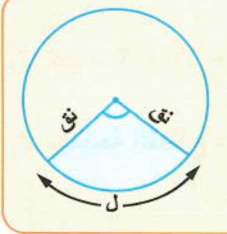
أى أن مساحة القطاع الدائرى $= \frac{1}{2}$ ل نق

ملاحظتان

١ يمكن اعتبار الدائرة قطاعًا دائريًا قياس زاويته $= 360^\circ$

وتكون مساحة القطاع الدائرى = مساحة الدائرة $= \pi$ نق^2

٢ محيط القطاع الدائرى = ٢ نق + ل



مثال ١

أوجد مساحة القطاع الدائرى الذى طول قوسه ل فى دائرة طول نصف قطرها نق إذا كان قياس زاويته $\theta^{د}$ بالتقدير الدائرى ، سـ° بالتقدير الستينى فى كل مما يأتى :

١ نق = ١٠ سم ، $\theta^{د}$ = ١,٥ د

٢ نق = ١٠,٥ سم ، سـ° = ١٤٤°

٣ نق = ٦ سم ، ل = ٤ سم

الحل

١ مساحة القطاع = $\frac{1}{2}$ $\theta^{د}$ نق٢ = $\frac{1}{2}$ × ١,٥ × (١٠)٢ = ٧٥ سم٢

٢ مساحة القطاع = $\frac{\text{سـ}^\circ}{360^\circ}$ × π نق٢ = $\frac{144^\circ}{360^\circ}$ × π × (١٠,٥)٢ ≈ ١٣٨,٥ سم٢

٣ مساحة القطاع = $\frac{1}{2}$ ل نق = $\frac{1}{2}$ × ٤ × ٦ = ١٢ سم٢

حاول بنفسك

١ أوجد مساحة القطاع الدائرى الذى طول نصف قطر دائرته = ٧ سم ، زاويته المركزية قياسها ٢,١ د

٢ أوجد مساحة القطاع الدائرى الذى طول نصف قطر دائرته = ٦,٥ سم وطول قوسه = ٨ سم

٣ أوجد مساحة القطاع الدائرى الذى قياس زاويته ٦٠° فى دائرة طول نصف قطرها ٥ سم

مثال ٢

قطاع دائرى طول نصف قطر دائرته ١٢ سم ، ومحيطه ٥٥ سم أوجد مساحته.

الحل

∵ نق = ١٢ سم ، محيط القطاع = ٥٥ سم ، ∵ محيط القطاع = ٢ نق + ل

∴ ٥٥ = ٢ × ١٢ + ل   ∴ ل = ٣١ سم

∴ مساحة القطاع = $\frac{1}{2}$ ل نق = $\frac{1}{2}$ × ٣١ × ١٢ = ١٨٦ سم٢

مثال ٣

قطاع دائرى طول نصف قطر دائرته ١٥ سم ، ومساحته ٢٧٠ سم^{٢} أوجد :

١ طول قوس القطاع. **٢** قياس زاوية القطاع بالقياسين الدائرى والستينى.

الحل

١ ∵ نق = ١٥ سم ، مساحة القطاع = ٢٧٠ سم^{٢} ، ∵ مساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ ل نق

∴ ٢٧٠ = $\frac{١}{٢}$ ل × ١٥ ∴ ل = ٣٦ سم

٢ ∵ ل = ٣٦ سم ، نق = ١٥ سم ∴ $\theta^{ء} = \frac{ل}{نق} = \frac{٣٦}{١٥} = ٢,٤^{ء}$

∴ $س^{\circ} = ٢,٤ \times \frac{١٨٠^{\circ}}{\pi} \approx ١٣٧^{\circ}\ ٣١'$

مثال ٤

قطاع دائرى مساحته ٧٥ سم^{٢} ومحيطه ٣٥ سم

أوجد طول نصف قطر دائرته وقياس زاويته المركزية بالقياس الستينى.

الحل

∵ مساحة القطاع = ٧٥ ∴ $\frac{١}{٢}$ ل نق = ٧٥ ∴ ل نق = ١٥٠ (١)

، ∵ محيط القطاع = ٣٥ ∴ ل + ٢ نق = ٣٥ ∴ ل = ٣٥ − ٢ نق (٢)

وبالتعويض من (٢) فى (١) : ∴ (٣٥ − ٢ نق) نق = ١٥٠

∴ ٢ نق^{٢} − ٣٥ نق + ١٥٠ = ٠ ∴ (نق − ١٠) (٢ نق − ١٥) = ٠

∴ نق = ١٠ سم أ ، نق = ٧$\frac{١}{٢}$ سم وبالتعويض فى (١)

∴ ل = ١٥ سم

، ∵ $\theta^{ء} = \frac{ل}{نق} = \frac{١٥}{١٠} = ١,٥^{ء}$

∴ $س^{\circ} = ١,٥^{ء} \times \frac{١٨٠^{\circ}}{\pi} \approx ٨٥^{\circ}\ ٥٦'\ ٣٧''$

∴ ل = ٢٠ سم

، ∵ $\theta^{ء} = \frac{ل}{نق} = \frac{٢٠}{٧,٥} = \frac{٨}{٣}^{ء}$

∴ $س^{\circ} = \frac{٨}{٣}^{ء} \times \frac{١٨٠^{\circ}}{\pi} \approx ١٥٢^{\circ}\ ٤٧'\ ١٩''$

حاول بنفسك

قطاع دائرى مساحته ١٢٠ سم^{٢} ، وطوله قوسه ٢٠ سم

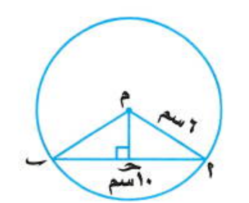
أوجد قياس زاويته بالقياسين الدائرى والستينى وأوجد محيط القطاع.

مثال ٥

دائرة م طول نصف قطرها ٦ سم ، رسم فيها نصفا القطرين $\overline{م ٢}$ ، $\overline{م ب}$ بحيث : ٢ ب = ١٠ سم

أوجد مساحة القطاع الأصغر م ٢ ب لأقرب سنتيمتر مربع.

الحل



نرسم $\overline{م حـ}$ ⊥ $\overline{٢ ب}$ يقطعه فى حـ فيكون حـ منتصف $\overline{٢ ب}$

∴ ٢ حـ = حـ ب = ٥ سم

∵ Δ ٢ حـ م فيه : ق (∠ ٢ حـ م) = ٩٠°

∴ حا (∠ ٢ م حـ) = $\frac{٢ حـ}{٢ م}$ = $\frac{٥}{٦}$ ∴ ق (∠ ٢ م حـ) ≈ ٥٦° ٢٦َ ٣٤ً

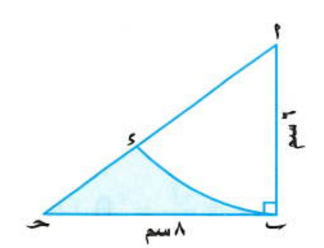
∴ ق (∠ ٢ م ب) = ٢ × ٥٦° ٢٦َ ٣٤ً = ١١٢° ٥٣َ ٨ً

مساحة القطاع الأصغر م ٢ ب = $\frac{س°}{٣٦٠°}$ × π نق^٢ = $\frac{١١٢° ٥٣َ ٨ً}{٣٦٠°}$ × π × (٦)^٢ ≈ ٣٥,٤٦ سم^٢

مثال ٦

٢ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب فيه : ٢ ب = ٦ سم ، ب حـ = ٨ سم ، رسم قوس دائرى مركزه ٢ وطول نصف قطر دائرته يساوى ٢ ب قطع $\overline{٢ حـ}$ فى ء أوجد لأقرب سم^٢ مساحة المنطقة المحصورة بين : $\overline{ب حـ}$ ، $\overline{حـ ء}$ ، $\overset{\frown}{ب ء}$

الحل



المساحة المطلوبة = مساحة Δ ٢ ب حـ − مساحة القطاع ٢ ب ء

إيجاد مساحة Δ ٢ ب حـ :

مساحة Δ ٢ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ ٢ ب × ب حـ = $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٨ = ٢٤ سم^٢

إيجاد مساحة القطاع ٢ ب ء :

∵ نق = ٢ ب = ٦ سم ، طا (∠ ب ٢ ء) = $\frac{ب حـ}{٢ ب}$ = $\frac{٨}{٦}$ ∴ ق (∠ ب ٢ ء) ≈ ٥٣° ٧َ ٤٨ً

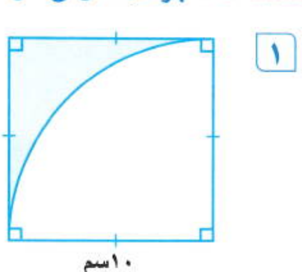
∴ مساحة القطاع ٢ ب ء = π نق^٢ × $\frac{س°}{٣٦٠°}$ = π × ٦^٢ × $\frac{٥٣° ٧َ ٤٨ً}{٣٦٠°}$ ≈ ١٧ سم^٢

∴ المساحة المطلوبة = ٢٤ − ١٧ = ٧ سم^٢

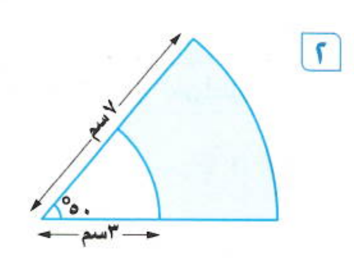
حاول بنفسك

أوجد مساحة الجزء المظلل فى كل مما يأتى بدلالة π :

١



٢



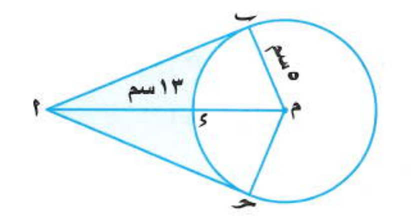
مثال ٧

أ نقطة خارج دائرة م طول نصف قطرها ٥ سم ، أ م = ١٣ سم ، رسمت $\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ مماستين للدائرة فى ب ، حـ فأوجد لأقرب سم^2 مساحة المنطقة بين : $\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ ، $\overset{\frown}{بحـ}$

الحل

مساحة المنطقة المطلوبة = مساحة الشكل أ ب م حـ − مساحة القطاع م حـ ء ب

إيجاد مساحة الشكل أ ب م حـ :



∵ $\overline{أب}$ مماسة للدائرة ، $\overline{بم}$ نصف قطر فيها.

∴ ق (∠ م ب أ) = ٩٠°

وبالمثل ق (∠ أ حـ م) = ٩٠°

∴ أ ب = أ حـ = $\sqrt{(١٣)^2 - (٥)^2}$ = ١٢ سم (فيثاغورث)

∴ مساحة الشكل أ ب م حـ = ٢ × مساحة Δ أ ب م = ٢ × $\frac{١}{٢}$ × ٥ × ١٢ = ٦٠ سم^2

إيجاد مساحة القطاع م حـ ء ب :

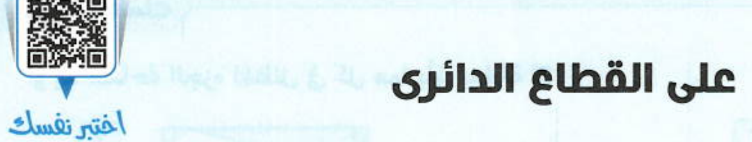
فى Δ م ب أ القائم الزاوية فى ب : حتا (∠ ب م أ) = $\frac{٥}{١٣}$ ∴ ق (∠ ب م أ) ≈ ٤٨ً ٢٢َ ٦٧°

∴ ق (∠ ب م حـ) = ٢ × ٤٨ً ٢٢َ ٦٧° ≈ ٣٦ً ٤٥َ ١٣٤°

∴ مساحة القطاع م حـ ء ب = π نق^2 × $\frac{س°}{٣٦٠°}$ = π × ٢٥ × $\frac{٣٦ً\ ٤٥َ\ ١٣٤°}{٣٦٠°}$ ≈ ٢٩ سم^2

∴ مساحة المنطقة المطلوبة = ٦٠ − ٢٩ = ٣١ سم^2





تمارين 12 على القطاع الدائرى

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسى • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) محيط القطاع الدائرى الذى طول قوسه ٤ سم وطول قطر دائرته ١٠ سم يساوى .... سم

(أ) ١٤ (ب) ٢٠ (جـ) ٣٠ (د) ١٠

(٢) مساحة القطاع الدائرى الذى طول نصف قطر دائرته ٤ سم وطول قوسه ٦ سم تساوى .... سم^2

(أ) ٢٤ (ب) ١٢ (جـ) ١٠ (د) ٨

(٣) مساحة القطاع الدائرى الذى طول قوسه ١٠ سم وطول قطر دائرته ١٠ سم تساوى .... سم^2

(أ) ٥٠ (ب) ٢٥ (جـ) ١٢,٥ (د) ١٠٠

(٤) مساحة القطاع الدائرى الذى قياس زاويته ١,٢ء وطول نصف قطر دائرته ٤ سم تساوى .... سم^2

(أ) ٤,٨ (ب) ٩,٦ (جـ) ١٢,٨ (د) ١٩,٦

(٥) مساحة القطاع الدائرى الذى قياس زاويته ١٢٠° وطول نصف قطر دائرته ٣ سم تساوى .... سم^2

(أ) ٣ π (ب) ٦ π (جـ) ٩ π (د) ١٢ π

(٦) إذا كان محيط قطاع دائرى ٨ سم وطول قوسه ٢ سم فإن : نق = ... سم

(أ) ٦ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٧) القطاع الدائرى الذى محيطه ٤٤ سم وطول نصف قطر دائرته ١٤ سم فإن طول قوسه يساوى .... سم

(أ) ١٦ (ب) ٨ (جـ) ٣٢ (د) ٤

(٨) مساحة القطاع الدائرى الذى محيطه ١٢ سم وطول قوسه ٦ سم تساوى .... سم^2

(أ) ٦ (ب) ٩ (جـ) ١٢ (د) ١٨

(٩) مساحة القطاع الدائرى الذى طول نصف قطر دائرته يساوى ٤ سم ، ومحيطه ٢٠ سم تساوى .... سم^2

(أ) ٤٠ (ب) ٣٢ (جـ) ٢٤ (د) ٤٨

(١٠) قطاع دائرى مساحته ١٥ سم^2 وطول قوسه ٣ سم فإن : نق = ... سم

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ٢,٥ (د) ١٥

(١١) قطاع دائرى مساحته ٤٠٠ سم^2 ، وطول نصف قطر دائرته ٢٠ سم فإن طول قوسه يساوى .... سم

(أ) ١٠ (ب) ٥ (جـ) ٢٠ (د) ٤٠

(١٢) إذا كانت مساحة قطاع دائرى تساوى ١١٠ سم^2 وقياس زاويته ٢,٢^د

فإن طول نصف قطر دائرته يساوى .... سم

(أ) ٢ (ب) ٥ (جـ) ١٠ (د) ٢٠

(١٣) طول قوس القطاع الدائرى الذى مساحته ٦ π سم^2 ، وقياس زاويته المركزية $\frac{\pi}{٣}$ هو .... سم

(أ) ١٨ (ب) ٦ π (جـ) ٦ (د) ٢ π

(١٤) محيط القطاع الدائرى الذى مساحته ٢٤ سم^2 ، طول قوسه ٨ سم يساوى .... سم

(أ) ٢٠ (ب) ١٤ (جـ) ٣٢ (د) ٢٤

(١٥) قطاع دائرى مساحته ٤٥ سم^2 وطول قطر دائرته ٢٠ سم ، فإن محيطه يساوى .... سم

(أ) ٢٩ (ب) ١٩ (جـ) ٣٩ (د) ٤٩

(١٦) مساحة قطاع دائرى ٢٧ سم^2 وطول نصف قطر دائرته ٦ سم

، فإن القياس الدائرى لزاويته المركزية = ...^{د}

(أ) ١,٥ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤,٥

(١٧) قطاع دائرى محيطه ٤ نق سم حيث نق طول نصف قطر دائرته ، فإن القياس الدائرى لزاويته المركزية

يساوى .... راديان.

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ٨ (جـ) ٢ (د) $\frac{١}{٣}$

(١٨) قطاع دائرى طول قوسه (ل) وقياس زاويته ١,٢^د وطول نصف قطر دائرته (نق)

فإن محيطه = ... وحدة طول.

(أ) ١,٢ نق (ب) ٣,٢ نق (جـ) ١,٢ نق^2 (د) ٣,٢ نق^2

(١٩) قياس زاوية القطاع الدائرى الذى طول نصف قطر دائرته نق سم ومساحته $\frac{\pi}{٦}$ نق^2 سم^2

يساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٩٠° (د) ٤٥°

(٢٠) قطاع دائرى محيطه ٢٤ سم وطول قوسه ١٠ سم فإن مساحة سطح الدائرة التى تحوى هذا القطاع

تساوى .... سم^2

(أ) ٧ π (ب) ١٤ π (جـ) ٤٩ π (د) ١٥٤ π

(٢١) دائرة مساحتها ٥٣,٦ سم^2 فإن مساحة قطاع من هذه الدائرة قياس زاويته ٣٠َ ٦٧° ≃ .... سم^2

(أ) ١٠ (ب) ١١ (جـ) ١٢ (د) ١٣

(٢٢) دائرة مساحتها $\frac{٥}{٨}$ ٤٩٠ سم^2 فإن مساحة قطاع من هذه الدائرة طول قوسه ٣٢ سم ≃ .... سم^2

(أ) ١٠٠ (ب) ٢٠٠ (جـ) ٤٠٠ (د) ٣٠٠

(٢٣) قطاع دائرى طول قوسه ٤ ل سم وطول نصف قطر دائرته نق سم فإن محيطه = ... سم

(أ) ل + ٢ نق (ب) نق + ٢ ل (جـ) ٢ (نق + ٢ ل) (د) ٢ (ل + ٢ نق)

(٢٤) قطاع دائرى طول قوسه (ل) وقياس زاويته ($\theta^{ء}$) وطول نصف قطر دائرته (نق)

فإن محيطه = ...

(أ) نق + ل (ب) نق + ٢ ل (جـ) نق (٢ + $\theta^{ء}$) (د) ٢ نق (١ + $\theta^{ء}$)

(٢٥) قطاع دائرى محيطه ٣٥ سم ، ومساحته ٧٥ سم^{٢} فإن قياس زاويته بالقياس الدائرى = ...^{ء}

(أ) $\frac{٣}{٢}$ أ ، $\frac{٧}{٣}$ (ب) $\frac{٤}{٣}$ أ ، $\frac{٧}{٣}$ (جـ) $\frac{٣}{٢}$ أ ، $\frac{٨}{٣}$ (د) ١ أ ، $\frac{٨}{٣}$

(٢٦) قطاع دائرى مساحته (م) زاد طول قطر دائرته إلى الضعف فإن مساحته تصبح .... باعتبار أن زاويته المركزية لا تتغير.

(أ) ٢ م (ب) ٤ م (جـ) $\frac{١}{٢}$ م (د) ٣ م

(٢٧) دائرة طول نصف قطرها نق سم وكان محيط قطاع دائرى فيها (٢ نق + ٨) سم

فإن مساحة هذا القطاع .... سم^{٢}

(أ) نق^{٢} (ب) ٤ نق^{٢} (جـ) ٨ نق^{٢} (د) ٤ نق

(٢٨) إذا كانت النسبة بين مساحة قطاع دائرى إلى مساحة دائرته كنسبة ٢ : ٥

فإن قياس زاوية القطاع = ...

(أ) ٣٦° (ب) ٧٢° (جـ) ١٠٨° (د) ١٤٤°

(٢٩) إذا كانت النسبة بين مساحة قطاع دائرى إلى مساحة دائرته كنسبة ٣ : ٧ وكان محيط الدائرة يساوى ٤٢ سم فإن طول قوس القطاع = ... سم

(أ) ٦ (ب) ٩ (جـ) ١٢ (د) ١٨

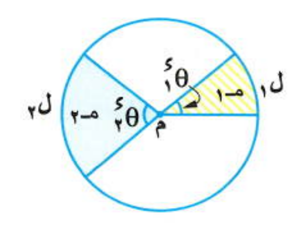
(٣٠) فى الشكل المقابل :

مساحة المنطقة المظللة تساوى ....

(أ) $\frac{٥٠}{٩}\pi$ (ب) $\frac{١٢٥}{٩}\pi$

(جـ) $\frac{٢٠٠}{٩}\pi$ (د) $\frac{٣٢٥}{٩}\pi$

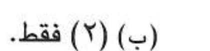
(٣١) فى الشكل المقابل :



دائرة مركزها م ، مـ$_{١}$ ، مـ$_{٢}$ هما مساحتى القطاعين المظللين

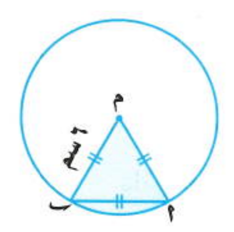
فإن : $\frac{مـ_{١}}{مـ_{٢}}$ = ...

(١) $\frac{ل_{١}}{ل_{٢}}$ (٢) $\frac{\theta^{ء}_{١}}{\theta^{ء}_{٢}}$ (٣) $\frac{ل_{١}^{٢}}{ل_{٢}^{٢}}$

(أ) (١) فقط.  (ب) (٢) فقط.

(جـ) (١) ، (٢) فقط. (د) (٢) ، (٣) فقط.

(٣٢) **في الشكل المقابل :**



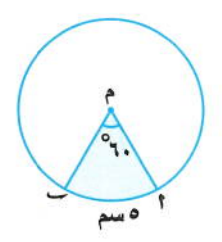
نصف دائرة مركزها هـ

إذا كان : $\frac{م_1}{م_2} = \frac{٢}{٣}$

فإن : θ = ...

(أ) ١٠٠° (ب) ١٠٥° (جـ) ١٠٨° (د) ١٢٠°

(٣٣) **في الشكل المقابل :**

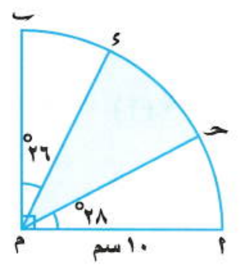


مساحة الجزء المظلل = ... سم٢

(أ) ١٨ (ب) ١٨ $\sqrt{٣}$

(جـ) ٩ $\sqrt{٣}$ π (د) ٦ π

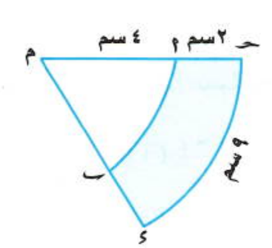
(٣٤) **في الشكل المقابل :** مساحة القطاع المظلل = ... سم٢



(أ) ٣٠ π (ب) $\frac{٢٢٥}{\pi}$

(جـ) $\frac{٧٥}{٢\pi}$ (د) ٥٠ π

(٣٥) **في الشكل المقابل :**



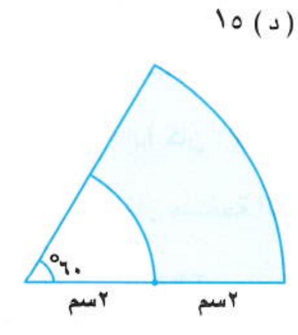
ربع دائرة مركزها م

فإن مساحة الجزء المظلل = ... سم٢

(أ) ١٠ π (ب) ٢٠ π

(جـ) ٣٠ π (د) ٤٠ π

(٣٦) **في الشكل المقابل :**



دائرتان متحدتا المركز (م)

طولا نصفا قطريهما ٤ سم ، ٦ سم

وطول $\overset{\frown}{حـ ء}$ = ٩ سم

فإن مساحة الجزء المظلل = ... سم٢

(أ) ١٠ (ب) ٩ π (جـ) ١٢ π (د) ١٥

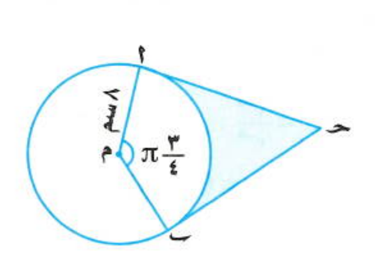
(٣٧) **في الشكل المقابل :**

مساحة الجزء المظلل = ... سم٢

(أ) π (ب) ٢ π

(جـ) $\frac{\pi}{٣}$ (د) $\frac{٢}{٣}$ π

(٣٨) في الشكل المقابل :



حـ أ ، حـ ب مماسان للدائرة م

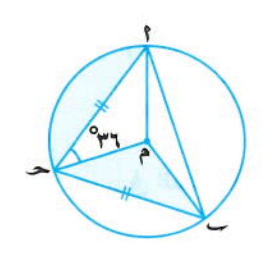
، طول نصف قطر الدائرة م = ٨ سم

فإذا كان : ق (∠ أ م ب) = $\frac{٣}{٤}\pi$

فإن مساحة الجزء المظلل = ... سم^{٢}

(أ) ٧٩,١ (ب) ٩٧,١ (جـ) ٧,٩١ (د) ٩,٧١

(٣٩) في الشكل المقابل :



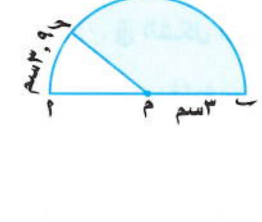
دائرة م طول نصف قطرها ١٠ سم

، ب حـ = أ حـ ، ق (∠ أ حـ م) = ٣٦°

فإن مساحة الجزء المظلل = ... سم^{٢}

(أ) ٢٠ π (ب) ٣٠ π (جـ) ٤٠ π (د) ٥٠ π

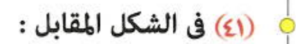
(٤٠) في الشكل المقابل :



نصف دائرة مركزها م فإن مساحة الجزء المظلل ≃ .... سم^{٢}

(أ) ٨,٢٩ (ب) ١٦,٦

(جـ) ٥,٥٢ (د) ١١,٠٤



(٤١) في الشكل المقابل :

إذا كانت : أ (٤ $\sqrt{٢}$ ، ٤ $\sqrt{٢}$)

فإن : مساحة الجزء المظلل تساوى .... سم^{٢}

(أ) ٦٤ π (ب) ١٦ π

(جـ) ٤ π (د) ٨ π

(٤٢) في الشكل المقابل :

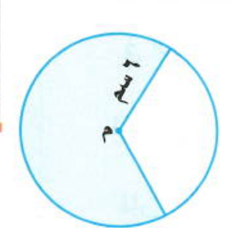
أ ب مماس للدائرة م التى تمر بالنقط حـ ، ى ، هـ

إذا كان : أ ب = ٨ سم ، م ى = ١١ سم ، طول $\overset{\frown}{حـ هـ ى}$ = ٦ سم

فإن مساحة الجزء المظلل = ... سم^{٢}

(أ) ٢٢ (ب) ١٨ (جـ) ١٢ (د) ١١

(٤٣) **فى الشكل المقابل :**

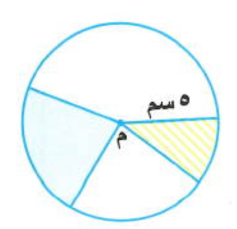


م مركز الدائرة ، محيط الجزء المظلل = ٤٥,٧ سم

فإن مساحة هذا الجزء = ... سم^{٢}

(أ) ١١٣,٢ (ب) ١٠١,١ (جـ) ٣٤ π (د) ٣٣ π

(٤٤) **فى الشكل المقابل :**



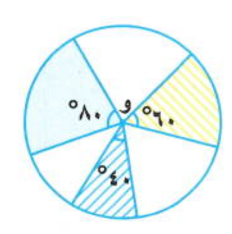
قطاعان دائريان فى دائرة طول نصف قطرها ٥ سم

، مجموع محيطيهما ٣٠ سم فإن مجموع مساحتيهما

يساوى .... سم^{٢}

(أ) ٣٥ (ب) ٢٥ (جـ) ٢٢ (د) ٢٠

(٤٥) **فى الشكل المقابل :**

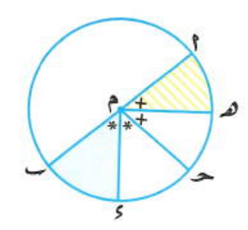


دائرة طول نصف قطرها ٧ سم

فإن مساحة المنطقة المظللة = ... سم^{٢} $\left(\pi = \frac{٢٢}{٧}\right)$

(أ) ١١ (ب) ٧٧ (جـ) ٥٣٧ (د) ٧٧٠

(٤٦) **فى الشكل المقابل :**



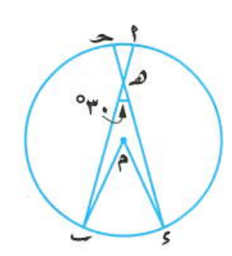
$\overline{أب}$ قطر فى دائرة م طول نصف قطرها ٤ سم

، $\overrightarrow{مء}$ ينصف ∠ ب م جـ ، $\overrightarrow{مهـ}$ ينصف ∠ أ م جـ

فإن مساحة الجزء المظلل = ... سم^{٢}

(أ) ٤ π (ب) ٣ π (جـ) ٢ π (د) π

(٤٧) **فى الشكل المقابل :**



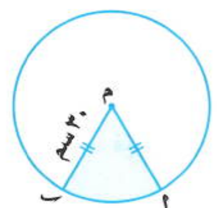
دائرة مركزها م وطول نصف قطرها ٣ سم ، ق $(\overset{\frown}{أجـ})$ = °٢٠

، ق (∠ ء هـ ب) = °٣٠

فإن مساحة القطاع ء م ب تساوى .... سم^{٢}

(أ) π (ب) $\frac{١}{٢}$ π (جـ) ٢ π (د) $\frac{٣}{٤}$ π

(٤٨) **فى الشكل المقابل :**

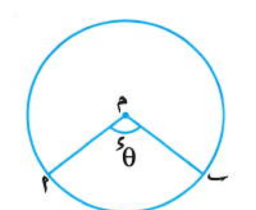


إذا كان طول $\overset{\frown}{أب}$: طول $\overset{\frown}{أب}$ الأكبر = ١ : ٥

فإن مساحة القطاع المظلل = ... سم^{٢}

(أ) ٩٠ π (ب) ١٢٠ π (جـ) ١٥٠ π (د) ١٨٠ π

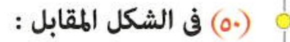
(٤٩) في الشكل المقابل :



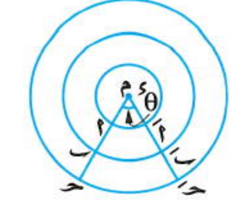
إذا كان : $\frac{\text{مساحة القطاع الأصغر}}{\text{مساحة القطاع الأكبر}} = \frac{٢}{٧}$

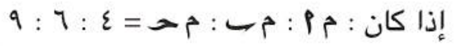
فإن θ° = ...

(أ) $\frac{٢\pi}{٩}$ (ب) $\frac{٤\pi}{٩}$ (جـ) $\frac{٣\pi}{٤}$ (د) $\frac{٢\pi}{٣}$



(٥٠) في الشكل المقابل :





إذا كان : م أ : م ب : م حـ = ٤ : ٦ : ٩

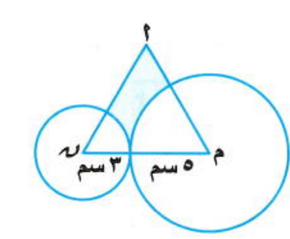
فإن : $\frac{\text{مساحة القطاع الأصغر م أ أَ}}{\text{مساحة القطاع الأصغر م حـ حـَ}}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\frac{٤}{٩}$ (د) $\frac{١٦}{٨١}$

(٥١) دائرة طول نصف قطرها نق قسمت إلى ن من القطاعات الدائرية المتساوية في المساحة فإن مساحة القطاع الواحد = ...

(أ) $\frac{ن}{٣٦٠}\pi$ نق^{٢} (ب) $\frac{١}{٢}$ ن° نق^{٢} (جـ) $\frac{١}{ن}\pi$ نق^{٢} (د) $\frac{ن}{\pi}$ نق^{٢}

(٥٢) في الشكل المقابل :



دائرتان م ، ن متماستان من الخارج ، المثلث أ م ن متساوي الأضلاع

فإن مساحة الجزء المظلل = ... سم^{٢}

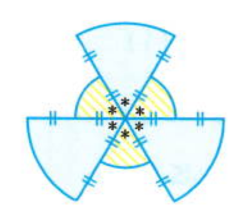
(أ) $٨\sqrt{٣} - \frac{٢}{٣}\pi$ (ب) $١٦\sqrt{٣} - \frac{١٧}{٣}\pi$

(جـ) $١١\sqrt{٣} - ١٧\pi$ (د) $٨\sqrt{٣} - \frac{١٧}{٣}\pi$

(٥٣) إذا كانت مـ مساحة قطاع دائري في دائرة فإذا نقص طول نصف قطر الدائرة إلى النصف دون تغيير زاويته المركزية فإن مساحة القطاع تنقص بمقدار .... المساحة الأصلية.

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{١}{٨}$

(٥٤) في الشكل المقابل :



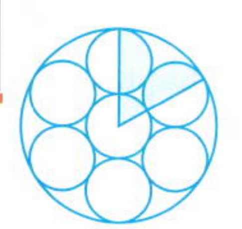
٣ قطاعات دائرية من دائرة طول نصف قطرها نق سم

و ٣ قطاعات دائرية أخرى من دائرة طول نصف قطرها ٢ نق سم

فإن المساحة الكلية للشكل = ... سم^{٢}

(أ) ٣π نق^{٢} (ب) ٥π نق^{٢} (جـ) $\frac{٥}{٢}\pi$ نق^{٢} (د) $\frac{٣}{٢}\pi$ نق^{٢}

(٥٥) في الشكل المقابل :



٧ دوائر متطابقة ومتماسة من الخارج

كما بالشكل طول نصف قطر كل منها نق سم

فإن مساحة الجزء المظلل = ... سم^{٢}

(أ) $\frac{\pi}{٦}$ نق^{٢} (ب) $\frac{٧\pi}{٦}$ نق^{٢} (جـ) $\frac{٣\pi}{٤}$ نق^{٢} (د) $\frac{٥}{٦}$ π نق^{٢}

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد مساحة قطاع دائرى طول قوسه ١٢ سم ، وطول نصف قطر دائرته ٨ سم «٤٨ سم^{٢}»

---

٢ قطاع دائرى طول قوسه ١٦ سم وطول نصف قطر دائرته ٩ سم. أوجد مساحته. «٧٢ سم^{٢}»

---

٣ قطاع دائرى قياس زاويته المركزية ٣٠° ، وطول نصف قطر دائرته ٣,٥ سم

احسب لأقرب سم^{٢} مساحة القطاع. «٣ سم^{٢} تقريبًا»

---

٤ أوجد مساحة القطاع الدائرى الذى طول قطر دائرته ٢٠ سم وقياس زاويته ١٢٠° «١٠٤,٧ سم^{٢} تقريبًا»

---

٥ أوجد مساحة القطاع الدائرى الذى قياس زاويته ٤٠° فى دائرة طول نصف قطرها ٦ سم لأقرب سم^{٢}

«١٣ سم^{٢}»

---

٦ أوجد مساحة القطاع الدائرى الذى طول نصف قطر دائرته ١٠ سم وقياس زاويته ١,٢^{ء} «٦٠ سم^{٢}»

---

٧ قطاع دائرى طول قوسه ٧ سم ، ومحيطه ٢٥ سم أوجد مساحته. «٣١,٥ سم^{٢}»

---

٨ قطاع دائرى محيطه ٢٨ سم ، وطول نصف قطر دائرته ٧ سم أوجد مساحته وقياس زاويته المركزية بكلا القياسين الدائرى والستينى. «٤٩ سم^{٢} ، ٢^{ء} ، ٣٥ ١١٤°»

---

٩ قطاع دائرى مساحته تساوى ٢٧٠ سم^{٢} وطول نصف قطر دائرته يساوى ١٥ سم

أوجد طول قوس القطاع وقياس زاويته المركزية بالراديان. «٣٦ سم ، ٢,٤^{ء}»

---

١٠ قطاع دائرى مساحته ٤٠ سم^{٢} ، وطول قوسه ٨ سم أوجد محيطه. «٢٨ سم»

---

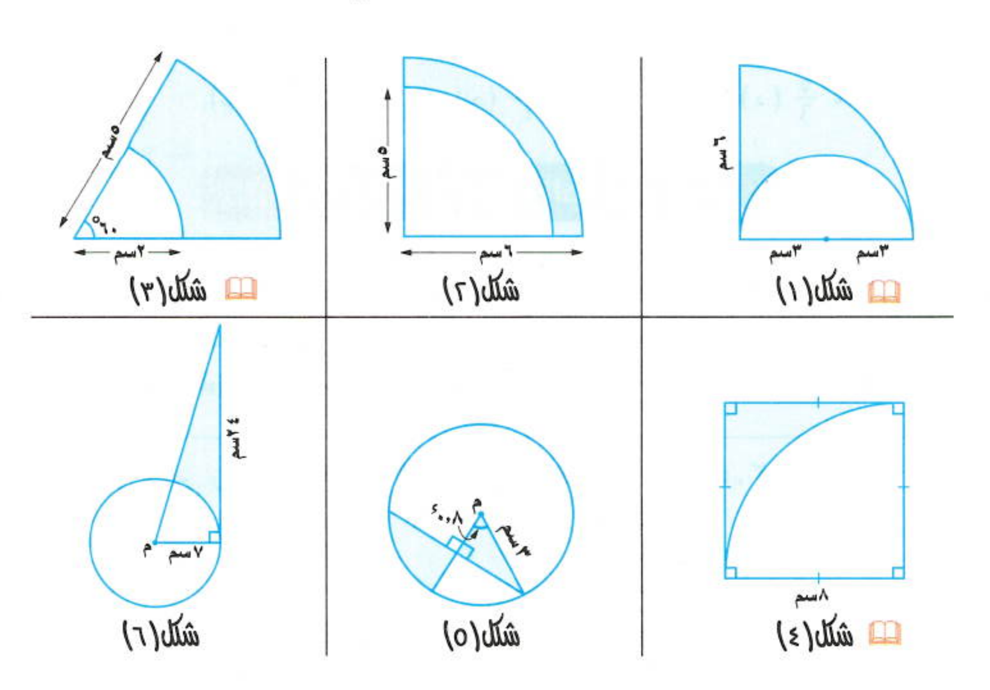
١١ قطاع دائرى مساحته ٢٥ سم^{٢} ، وقياس زاويته المركزية ٠,٥^{ء} احسب طول نصف قطر دائرته وطول قوسه.

«١٠ سم ، ٥ سم»

١٢ إذا كانت مساحة قطاع دائرى = $\frac{٢}{٥}$ مساحة دائرته فأوجد قياس زاوية القطاع بالقياس الستينى والقياس الدائرى.

وإذا كان طول نصف قطر الدائرة ١٠ سم فأوجد محيط القطاع لأقرب سنتيمتر. «١٤٤° ، ٢,٥١ ، ٤٥ سم»

١٣ أوجد بدلالة π مساحة الجزء المظلل فى كل شكل من الأشكال الآتية :



١٤ دائرة م طول نصف قطرها ٧,٥ سم ، رسم فيها نصفا القطرين $\overline{مأ}$ ، $\overline{مب}$ بحيث : أب = ١٢ سم

أوجد مساحة القطاع الأصغر م أ ب لأقرب سم^{٢} «٥٢ سم^{٢} تقريبًا»

١٥ ثلاث دوائر طول نصف قطر كل منها ٥ سم ومراكزها هى رؤوس المثلث متساوى الأضلاع وطول ضلعه ١٠ سم

أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين الدوائر الثلاث. «٤ سم^{٢} تقريبًا»

١٦ أ نقطة خارج دائرة م طول نصف قطرها ٦ سم ، م أ = ١٢ سم رسمت $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ مماستين للدائرة فى ب ، جـ

أوجد لأقرب سم^{٢} مساحة المنطقة المحصورة بين المماسين ، $\overset{\frown}{بجـ}$ الأصغر. «٢٥ سم^{٢} تقريبًا»

١٧ أ ب جـ مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٨ $\sqrt{٣}$ سم ، رسم قوس دائرى مركزه أ ويمس $\overline{بجـ}$ فى ء

ويقطع $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ فى س ، ص أوجد لأقرب جزء من عشرة من السنتيمتر المربع مساحة المنطقة

المحصورة بين $\overline{بجـ}$ ، $\overset{\frown}{س ص}$ ($\sqrt{٣}$ = ١,٧٣٢) «٧,٧ سم^{٢} تقريبًا»

١٨ $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ وتران فى دائرة م حيث : أب = أجـ = ٨ سم فإذا كان ق (∠ أ) = ٦٠°

، فأوجد لأقرب سم^{٢} مساحة القطاع الأصغر م ب جـ «٢٢ سم^{٢} تقريبًا»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان جذرا المعادلة ٣ $س^٢$ − ١٩ س + ١٣ = ٠ يساويان طول قطر دائرة وطول قوس فيها

فإن محيط القطاع الدائرى المرسوم على هذا القوس = ... سم

(أ) ١٩ (ب) ١٣ (جـ) $\frac{١٩}{٣}$ (د) $\frac{١٣}{٣}$

(٢) إذا كان جذرا المعادلة $س^٢$ − ١٣ س + ١٩ = ٠ يساويان طول قطر دائرة وطول قوس فيها

فإن مساحة القطاع الدائرى المرسوم على هذا القوس = ... $سم^٢$

(أ) ١٩ (ب) $\frac{١٩}{٢}$ (جـ) $\frac{١٣}{٤}$ (د) $\frac{١٩}{٤}$

(٣) **فى الشكل المقابل :**

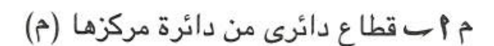
دائرتان م ، ن متباعدتان

إذا كان $م_١$ ، $م_٢$ هما مساحتا القطاعين

وكان : $\frac{م_١}{م_٢} = \frac{٩}{٥}$ فإن : θ = ...

(أ) °٧٢ (ب) °٨٠ (جـ) °٩٠ (د) °١٠٠

(٤) **فى الشكل المقابل :**



م أ ب قطاع دائرى من دائرة مركزها (م)

، طول نصف قطرها ٦ سم ، ق (∠ أ م ب) = $\frac{\pi}{٣}$

، ودائرة (ن) بداخل القطاع

تمس $\overline{م أ}$ ، $\overline{م ب}$ ، $\overset\frown{أ ب}$

فإن مساحة الجزء المظلل = ... $سم^٢$

(أ) π (ب) ٢ π (جـ) ٣ π (د) ٤ π

(٥) **فى الشكل المقابل :**

دائرتان متحدتا المركز (م) ، م جـ = جـ أ

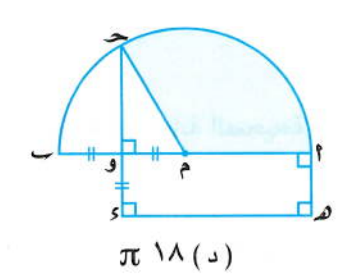
إذا كان $م_١$ ، $م_٢$ هما مساحتا المنطقتين المظللتين

وكان : $م_١ = م_٢$

فإن ق (∠ أ م هـ) = ...

(أ) $\frac{\pi}{٦}$ (ب) $\frac{\pi}{٤}$ (جـ) $\frac{\pi}{٣}$ (د) $\frac{٥\pi}{١٢}$

(٦) فى الشكل المقابل :

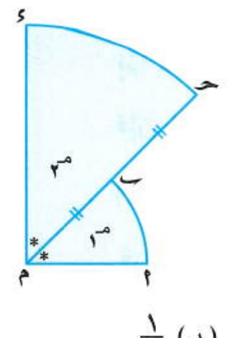


إذا كانت مساحة المستطيل أ هـ ء و = ٢٧ سم^{٢}

فإن مساحة الجزء المظلل = ... سم^{٢}

(أ) ٩ π (ب) ١٢ π (جـ) ١٥ π (د) ١٨ π

(٧) فى الشكل المقابل :

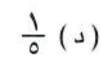


$\overset{\frown}{أب}$ ، $\overset{\frown}{حـ ء}$ قوسان فى دائرتين متحدتى المركز م

، م ب = ب حـ ، ق (∠ أ م ب) = ق (∠ حـ م ء)

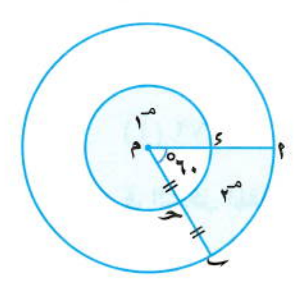
إذا كان : م$_{١}$ ، م$_{٢}$ مساحتى القطاعين

فإن : $\frac{م_{١}}{م_{٢}}$ = ...



(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) $\frac{١}{٥}$

(٨) فى الشكل المقابل :



دائرتان متحدتا المركز (م)

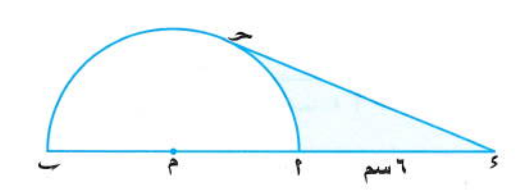
إذا كان : ق (∠ أ م ب) = ٦٠° ، م حـ = حـ ب

وكان م$_{١}$ ، م$_{٢}$ مساحتى المنطقتين المظللتين

فإن : $\frac{م_{١}}{م_{٢}}$ = ...

(أ) ٢ (ب) $\frac{٥}{٣}$ (جـ) $\frac{٤}{٣}$ (د) ١

(٩) فى الشكل المقابل :



إذا كان : $\overleftrightarrow{ء حـ}$ مماس لنصف دائرة (م)

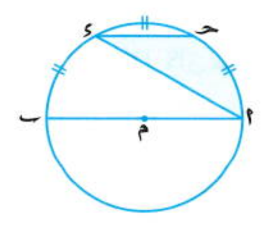
وكان : ء ب = $\sqrt{٣}$ ء حـ ، أ ء = ٦ سم

فإن مساحة الجزء المظلل = ... سم^{٢}

(أ) ٢ $\sqrt{٣}$ (ب) ١٢ $\sqrt{٣}$ − ٣ π

(جـ) ١٨ $\sqrt{٣}$ − ٦ π (د) ١٨ $\sqrt{٣}$ − ٨ π

(١٠) فى الشكل المقابل :

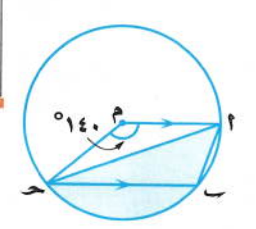


$\overline{أب}$ قطر فى الدائرة م طوله ١٢ سم

إذا كان : ق ($\overset{\frown}{أحـ}$) = ق ($\overset{\frown}{حـ ء}$) = ق ($\overset{\frown}{ء ب}$)

فإن مساحة الجزء المظلل = ... سم^{٢}

(أ) ٥ π (ب) ٦ π (جـ) ٨ π (د) ١٠ π



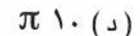
(١١) في الشكل المقابل :

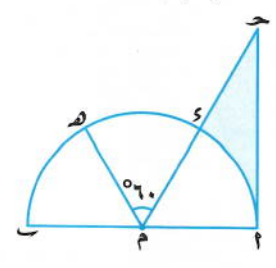
دائرة مركزها (م) ، $\overline{ا م}$ // $\overline{ب حـ}$ ، ق (∠ ا م حـ) = ١٤٠°

، طول نصف قطر الدائرة = ٦ سم

فإن مساحة الجزء المظلل = ... سم^{2}

(أ) ٥ π (ب) ٦ π (جـ) ٨ π (د) ١٠ π





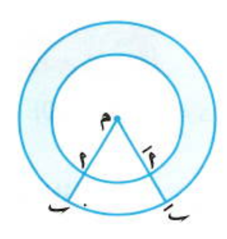
(١٢) في الشكل المقابل :

إذا كان طول القوس $\overset{\frown}{ا ء هـ}$ = طول $\overline{ا حـ}$

، ا م = ١٢ سم ، $\overleftrightarrow{ا حـ}$ مماس للدائرة م عند ا

فإن مساحة الجزء المظلل = ... سم^{2}

(أ) ٦ π (ب) ١٨ π (جـ) ٢٤ π (د) ٣٦ π



(١٣) في الشكل المقابل :

دائرتان متحدتا المركز م طولا نصفي قطريهما ١٢ سم

، ١٨ سم إذا كان : ق (∠ ا م اَ) = ٣٠°

فإن مساحة المنطقة المظللة = ... سم^{2}

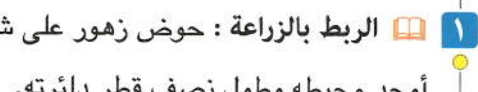
(أ) ١٢٥ π (ب) ١٥٠ π (جـ) ١٦٥ π (د) ١٨٠ π

---

٢ ا ب حـ مثلث قائم الزاوية في ب ، فيه ا ب = ٤ سم ، ب حـ = ٦ سم ، رسم قوس من دائرة مركزها ا ويمس $\overline{ب حـ}$ عند ب ويقطع $\overline{ا حـ}$ في ء فأوجد لأقرب جزء من عشرة من السنتيمتر المربع مساحة الجزء المحصور بين $\overline{ب حـ}$ ، $\overline{حـ ء}$ ، $\overset{\frown}{ب ء}$ «٤,١ سم^{2}»

---

٣ م ، ن مركزا دائرتين متماستين من الخارج في ا ، المستقيم $\overleftrightarrow{ب حـ}$ مماس مشترك لهما يمس الأولى في ب والثانية في حـ فإذا كان طولا نصفي قطري الدائرتين ٥ سم ، ١٥ سم على الترتيب فأوجد لأقرب سم^{2} مساحة المنطقة المحصورة بين المماس المشترك والدائرتين ($\sqrt{3}$ = ١,٧٣٢) «٢٩ سم^{2} تقريبًا»



تطبيقات حياتية

١ **الربط بالزراعة :** حوض زهور على شكل قطاع دائري مساحته ٤٨ م^{2} وطول قوسه ٦ م أوجد محيطه وطول نصف قطر دائرته. «٣٨ متر ، ١٦ متر»

---

٢ قطعة من الورق على شكل مربع قطع منها ربع دائرة مركزها أحد رؤوس المربع وطول نصف قطرها يساوي طول ضلع المربع فإذا كانت مساحة الجزء الباقي من المربع ٤٨,٢٨٥ سم^{2} فأوجد طول ضلع المربع. «١٥ سم»

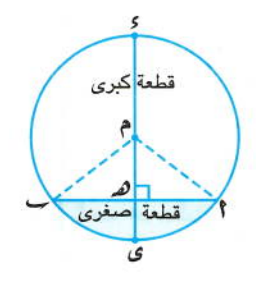


القطعة الدائرية



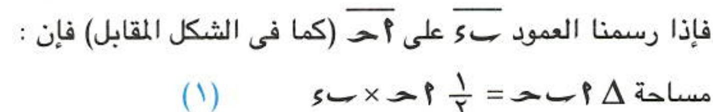
تعريف

القطعة الدائرية هى جزء من سطح دائرة محدود بقوس فيها ووتر مار بنهايتى ذلك القوس.

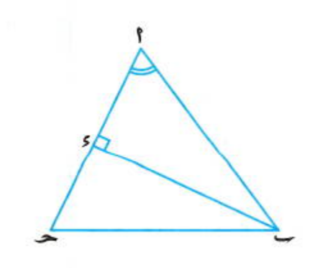


- فإذا رسمنا فى الدائرة م الوتر $\overline{أب}$ كما فى الشكل المقابل
  فإن سطح الدائرة ينقسم بهذا الوتر إلى جزأين كل منهما يسمى **«قطعة دائرية»**.
- والزاوية المركزية التى تقابل قوس القطعة تسمى زاوية القطعة فالزاوية أ م ب فى الشكل هى زاوية القطعة الصغرى أ ى ب بينما ∠ أ م ب المنعكسة هى زاوية القطعة الكبرى أ ء ب
- وإذا كان $\overline{ءى}$ قطرًا عموديًا على الوتر $\overline{أب}$ بحيث : $\overline{ءى} \cap \overline{أب} = \{هـ\}$
  فإن ى هـ يسمى ارتفاع القطعة الصغرى.
- **ويلاحظ أن** مساحة القطعة الصغرى = مساحة القطاع م أ ى ب − مساحة Δ م أ ب
  ، مساحة القطعة الكبرى = مساحة القطاع م أ ء ب + مساحة Δ م أ ب

وعلى ذلك فإن مساحة القطعة الدائرية يتطلب حسابها إيجاد مساحة المثلث الذى قاعدته وتر القطعة ورأسه مركز الدائرة ، لذلك نمهد لمساحة القطعة بقانون يستفاد به فى إيجاد مساحة المثلث.



مساحة المثلث بمعلومية طولى ضلعين فيه وقياس الزاوية المحصورة بينهما :



نفرض أن لدينا Δ أ ب حـ المعلوم فيه : طول $\overline{أب}$ ، طول $\overline{أحـ}$ ، ق (∠ أ)

فإذا رسمنا العمود $\overline{بء}$ على $\overline{أحـ}$ (كما فى الشكل المقابل) فإن :

مساحة Δ أ ب حـ = $\frac{1}{2}$ أ حـ × ب ء (١)

ولكن من Δ أ ب ء القائم الزاوية فى ء :

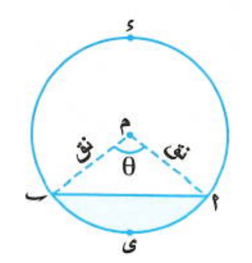
$\frac{ب ء}{أ ب}$ = حا أ أى ب ء = أ ب حا أ (٢)

وبالتعويض من (٢) فى (١) : ∴ مساحة Δ أ ب حـ = $\frac{1}{2}$ أ حـ × أ ب حا أ

وهذا القانون صحيح لأى مثلث

∴ مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولى ضلعين فيه × جيب الزاوية المحصورة بينهما.

إيجاد مساحة القطعة الدائرية



نفرض أن المطلوب إيجاد مساحة القطعة الصغرى أ ى ب

من دائرة طول نصف قطرها «نق» وأن قياس الزاوية

المركزية للقطعة = θ بالقياس الدائرى.

لذلك نقول : مساحة القطاع م أ ى ب = $\frac{1}{2}$ $\theta^{ء}$ نق^{٢}

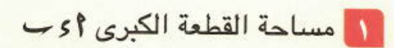
، مساحة Δ م أ ب = $\frac{1}{2}$ م أ × م ب × حا (د أ م ب) = $\frac{1}{2}$ نق × نق حا θ = $\frac{1}{2}$ نق^{٢} حا θ

∴ مساحة القطعة أ ى ب = مساحة القطاع م أ ى ب − مساحة Δ م أ ب

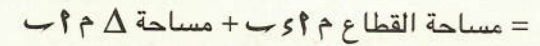
= $\frac{1}{2}$ $\theta^{ء}$ نق^{٢} − $\frac{1}{2}$ نق^{٢} حا θ = $\frac{1}{2}$ نق^{٢} ($\theta^{ء}$ − حا θ)

∴ مساحة القطعة الدائرية = $\frac{1}{2}$ نق^{٢} ($\theta^{ء}$ − حا θ)

ملاحظات



١ مساحة القطعة الكبرى أ ء ب



= مساحة القطاع م أ ء ب + مساحة Δ م أ ب

= $\frac{1}{2}$ $\theta^{ء}$ نق^{٢} + $\frac{1}{2}$ نق^{٢} حا (٢ π − θ)

= $\frac{1}{2}$ $\theta^{ء}$ نق^{٢} − $\frac{1}{2}$ نق^{٢} حا θ (لأن حا (٢ π − θ) = − حا θ) = $\frac{1}{2}$ نق^{٢} ($\theta^{ء}$ − حا θ)

٢ يمكن إيجاد مساحة القطعة الكبرى بطرح مساحة القطعة الصغرى من مساحة الدائرة.

٣ محيط القطعة الدائرية = طول قوسها + طول وترها

مثال ١

أوجد مساحة قطعة دائرية طول نصف قطر دائرتها ٨ سم ، وقياس زاويتها المركزية ١٢٠°

الحل

∵ $\theta^{ء}$ = ١٢٠° × $\frac{\pi}{١٨٠°}$ ≈ ٢,٠٩٤٤^{ء}

∴ مساحة القطعة الدائرية = $\frac{1}{2}$ نق^{٢} ($\theta^{ء}$ − حا θ) = $\frac{1}{2}$ × ٨^{٢} (٢,٠٩٤٤^{ء} − حا ١٢٠°) ≈ ٣٩,٣ سم^{٢}

ملاحظة

فى المثال السابق : يمكن استخدام القياس الدائرى للزاوية المركزية فى حساب مساحة القطعة بدلاً من استخدام القياس الستينى فتكون :

مساحة القطعة الدائرية = $\frac{1}{2} \times 8^2$ (٢,٠٩٤٤^{د} – جا ٢,٠٩٤٤) ≈ ٣٩,٣ سم^2

مع ملاحظة أنه يجب تحويل نظام الآلة من النظام (Deg) إلى النظام (Rad) قبل حساب المساحة وذلك بالضغط على SHIFT ثم MODE ثم 4



مثال ٢

أوجد مساحة القطعة الدائرية التى طول نصف قطر دائرتها ١٠ سم ، وقياس زاويتها المركزية ١,٠٢^{د} مقربًا الناتج لرقمين عشريين.

الحل

مساحة القطعة الدائرية = $\frac{1}{2}$ نق^2 ($\theta^{د}$ – جا θ) = $\frac{1}{2} \times 10^2$ (١,٠٢^{د} – جا ١,٠٢^{د})

≈ ٨,٣٩ سم^2

حاول بنفسك

أوجد مساحة القطعة الدائرية التى طول نصف قطر دائرتها نق وقياس زاويتها المركزية θ إذا كان :

1. نق = ١٢ سم ، θ = ١٥٠°
2. نق = ٨ سم ، $\theta^{د}$ = ٢,٠٢^{د}

مثال ٣

قطعة دائرية طول نصف قطر دائرتها ١٠ سم ، وطول قوسها ٢٦,١٩ سم

أوجد مساحة هذه القطعة.

الحل

∵ $\theta^{د}$ = $\frac{ل}{نق}$ = $\frac{26.19}{10}$ = ٢,٦١٩^{د}

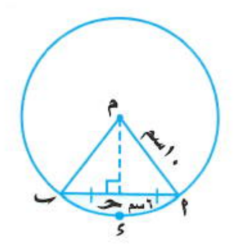
∴ مساحة القطعة = $\frac{1}{2}$ نق^2 ($\theta^{د}$ – جا θ)

= $\frac{1}{2} \times (10)^2$ [٢,٦١٩^{د} – جا ٢,٦١٩^{د}] ≈ ١٠٥,٩٩ سم^2

مثال ٤

إذا كان طول وتر قطعة دائرية فى دائرة طول نصف قطرها ١٠ سم يساوى ١٢ سم فأوجد مساحة هذه القطعة علمًا بأنها قطعة صغرى فى الدائرة.

الحل



نفرض أن $\overline{\text{أب}}$ هو وتر القطعة ، م هو مركز الدائرة

ونرسم $\overline{\text{م حـ}} \perp \overline{\text{أب}}$ فتكون حـ منتصف $\overline{\text{أب}}$

أى أ حـ = حـ ب = ٦ سم

ومن Δ أ م حـ يكون : م حـ = $\sqrt{(١٠)^٢ - (٦)^٢}$ = ٨ سم ، جا (∠ أ م حـ) = $\frac{٦}{١٠}$ = ٠,٦

∴ ق (∠ أ م حـ) ≈ ٣٦° ٥٢َ   ∴ ق (∠ أ م ب) = ٢ × ٣٦° ٥٢َ = ٧٣° ٤٤َ

∴ θء = ٧٣° ٤٤َ × $\frac{\pi}{١٨٠°}$ ≈ ١,٢٨٦٩ء

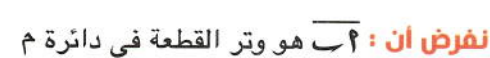
∴ مساحة القطعة الدائرية أ ء ب = $\frac{١}{٢}$ نق^٢ (θء − جا θ)

= $\frac{١}{٢}$ × ١٠٠ (١,٢٨٦٩ء − جا ٧٣° ٤٤َ) ≈ ١٦,٣٥ سم^٢

مثال ٥

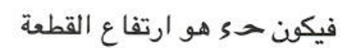
أوجد مساحة القطعة الدائرية الصغرى التى طول وترها ٢٤ سم ، وارتفاعها ٦ سم

الحل



نفرض أن : $\overline{\text{أب}}$ هو وتر القطعة فى دائرة م

ونرسم $\overline{\text{م حـ}} \perp \overline{\text{أب}}$ يقطع $\overline{\text{أب}}$ فى ء ويقطع الدائرة فى حـ



فيكون حـ ء هو ارتفاع القطعة   ∴ حـ ء = ٦ سم

، ∵ $\overline{\text{م ء}} \perp \overline{\text{أب}}$ ∴ أ ء = ء ب = ١٢ سم

، ∵ م حـ = م أ = نق   ∴ م ء = نق − ٦

∵ Δ أ ء م فيه ق (∠ أ ء م) = ٩٠°   ∴ (أ م)^٢ = (أ ء)^٢ + (م ء)^٢

∴ نق^٢ = ١٤٤ + (نق − ٦)^٢ ∴ نق^٢ = ١٤٤ + نق^٢ − ١٢ نق + ٣٦

∴ ١٢ نق = ١٨٠   ∴ نق = ١٥ سم

لاحظ أن

١٢ × ١٢ = ٦ × (٢ نق − ٦)

∴ نق = ١٥ سم

، ∵ حا (د أ م ء) = $\frac{أء}{أم}$ = $\frac{١٢}{١٥}$ = $\frac{٤}{٥}$

∴ ق (د أ م ء) = ٤٨ً ٧َ ٥٣°

∴ ق (د أ م ب) = ٢ × ٤٨ً ٧َ ٥٣° = ٣٦ً ١٥َ ١٠٦°

، ∵ $\theta^ء$ = ٣٦ً ١٥َ ١٠٦° × $\frac{\pi}{١٨٠°}$ ≃ ١,٨٥ ء

∴ مساحة القطعة الدائرية الصغرى = $\frac{١}{٢}$ × نق^٢ ($\theta^ء$ − حا θ)

= $\frac{١}{٢}$ × ١٥^٢ (١,٨٥ ء − حا ٣٦ً ١٥َ ١٠٦°) = ١٠٠,١٢٥ سم^٢

حاول بنفسك

أوجد مساحة قطعة دائرية ارتفاعها ٣ سم ، وطول نصف قطر دائرتها ١٠ سم

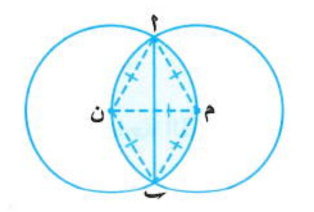


مثال ٦

دائرتان متطابقتان طول نصف قطر كل منهما ٦ سم وتمر إحداهما بمركز الأخرى

أوجد مساحة المنطقة المشتركة بينهما.

الحل



بفرض أن الدائرتين متقاطعتان فى أ ، ب

∴ $\overline{أب}$ يقسم المنطقة المحصورة بين الدائرتين إلى قطعتين متساويتين فى المساحة.

، ∵ Δ أ م ن متساوى الأضلاع فيه : م أ = م ن = أ ن = ٦ سم

، Δ ب م ن متساوى الأضلاع فيه : م ب = م ن = ن ب = ٦ سم

∴ ق (د أ م ن) = ق (د ب م ن) = ٦٠°   ∴ ق (د أ م ب) = ق (د أ ن ب) = ١٢٠°

، ∵ $\theta^ء$ = ١٢٠° × $\frac{\pi}{١٨٠°}$ = $\frac{٢}{٣}\pi$

∴ مساحة القطعة الصغرى أ ن ب = $\frac{١}{٢}$نق^٢ ($\theta^ء$ − حا θ)

= $\frac{١}{٢}$ × ٦^٢ ($\frac{٢}{٣}\pi$ − حا ١٢٠°) ≈ ٢٢,١١ سم^٢

∴ مساحة المنطقة المحصورة بين الدائرتين = ٢ × ٢٢,١١ = ٤٤,٢٢ سم^٢



تمارين 13 على القطعة الدائرية

📖 من أسئلة الكتاب المدرسى ● تذكر ● فهم ○ تطبيق ● مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مساحة القطعة الدائرية التى طول نصف قطر دائرتها ٨ سم وقياس زاويتها المركزية ١٢٠°

تساوى تقريبًا .... سم^٢

(أ) ٩٥ (ب) ٥١ (جـ) ٨٣ (د) ٣٩

(٢) مساحة القطعة الدائرية التى طول قطر دائرتها ٨ سم وقياس زاويتها المركزية $١,٢^{ء}$

تساوى تقريبًا .... سم^٢

(أ) ٨,٥٧ (ب) ٢,١٤ (جـ) ٤,٢٨ (د) ١,٠٧

(٣) مساحة القطعة الدائرية التى طول نصف قطر دائرتها ١٠ سم ، وطول قوسها ٥ سم

تساوى تقريبًا .... سم^٢

(أ) ١,٠٣ (ب) ٢,٠٦ (جـ) ٠,٠١ (د) ٠,٠٥

(٤) مساحة القطعة الدائرية التى قياس زاويتها ٣٠° ، وطول نصف قطر دائرتها $٢\sqrt{٣}$ سم

تساوى .... سم^٢

(أ) $\frac{\pi}{٣} + ٢$ (ب) $\pi - ٣$ (جـ) $\pi + ٣$ (د) $\frac{\pi}{٣} - ٢$

(٥) مساحة القطعة الدائرية المرسومة فى دائرة طول نصف قطرها ١٠ سم وقياس زاويتها المحيطية ٦٠°

تساوى تقريبًا .... سم^٢

(أ) ١٨ (ب) ٥٥ (جـ) ٦١ (د) ٢٧

(٦) مساحة قطعة دائرية طول وترها ١٨ سم ، وطول نصف قطر دائرتها ١٨ سم لأقرب سم^٢

تساوى .... سم^٢

(أ) ٢٩ (ب) ٢٨ (جـ) ٣٠ (د) ٦٠

(٧) فى الشكل المقابل :

مساحة الجزء المظلل تساوى تقريبًا .... سم^٢

(أ) ٧,١ (ب) ٢٨,٥

(جـ) ١٤,٣ (د) ٢,٠٢



(٨) مساحة القطعة الدائرية الكبرى التى طول وترها يساوى طول نصف قطر دائرتها يساوى ١٢ سم ≃ .... سم²

(أ) ٤٣٩ (ب) ٣١٥ (جـ) ١٣٧ (د) ١٣

(٩) أ ب جـ مثلث متساوى الأضلاع مرسوم داخل دائرة طول نصف قطرها ٧,٥ سم فإن مساحة القطعة الصغرى التى وترها ب جـ ≃ .... سم²

(أ) ٣٥ (ب) ٧٢ (جـ) ٤٥ (د) ٥

(١٠) القطعة الدائرية التى قياس زاويتها المركزية ٩٠° ومساحة سطحها ٥٦ سم² يكون طول نصف قطر دائرتها يساوى تقريبًا .... سم

(أ) ٩,٩ (ب) ١٩,٨ (جـ) ٧ (د) ١٤

(١١) دائرة مساحتها ٧٠٦,٥ سم² فإن مساحة قطعة من هذه الدائرة قياس زاويتها المركزية ١٣٥° (π = ٣,١٤) تساوى .... سم² تقريبًا.

(أ) ٢٦٤,٩ (ب) ١٨٥,٥ (جـ) ١٢,٤ (د) ٣٤٤,٦

(١٢) مساحة القطعة الدائرية التى ارتفاعها ٥ سم وطول نصف قطر دائرتها ١٠ سم تساوى تقريبًا .... سم²

(أ) ٩,١ (ب) ١٢٢,٨ (جـ) ١٢,٣ (د) ٦١,٤

(١٣) مساحة قطعة دائرية طول وترها ٨ سم ، ويبعد عن مركز الدائرة ٥ سم تساوى تقريبًا .... سم²

(أ) ٤٨ (ب) ١٢١ (جـ) ٧ (د) ٨

(١٤) مساحة قطعة دائرية طول وترها ١٦ سم ، وارتفاعها ٤ سم ≃ .... سم²

(أ) ١٤١ (ب) ٤٥ (جـ) ٧٩ (د) ١٠٧

(١٥) مساحة القطعة الدائرية تساوى مساحة القطاع الدائرى المشترك معها فى القوس إذا كان قياس زاويته المركزية يساوى ....°

(أ) ٩٠ (ب) ١٨٠ (جـ) ٢٧٠ (د) ٤٥

(١٦) أ ب جـ مثلث فيه : أ ب = ٥ سم ، ب جـ = ٨ سم ، ق(∠ب) = ٦٠° فإن مساحة المثلث = ... سم²

(أ) ١٠ (ب) ٢٠ (جـ) ١٠ $\sqrt{٣}$ (د) ٢٠ $\sqrt{٣}$

(١٧) فى دائرة واحدة إذا كانت القطعة الدائرية تشترك مع القطاع الدائرى فى نفس القوس فيكون لها نفس المساحة إذا كان ....

(أ) ل = ٢ نق (ب) $\theta = \pi$ (جـ) $\theta = \frac{٣\pi}{٢}$ (د) ل = نق

(١٨) قطعة دائرية من دائرة طول نصف قطرها نق سم وطول وترها $\sqrt{٢}$ نق سم

فإن مساحتها .... سم^{٢}

(أ) نق^{٢} $\left(\frac{\pi}{٢} - ١\right)$ (ب) $\frac{١}{٤}$ نق^{٢} $(\pi - ٢)$

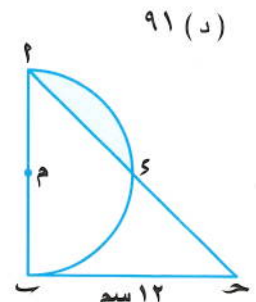
(جـ) ٢ نق^{٢} $(\pi - ١)$ (د) $\frac{١}{٤}$ نق^{٢} $\left(\frac{\pi}{٢} - ١\right)$

(١٩) في الشكل المقابل :

ق (∠ أ ب حـ) = ٤٥° ، $\overline{أب}$ قطر في الدائرة م بحيث أ ب = ١٤ سم

فإن مساحة الجزء المظلل = ... سم^{٢} حيث $\left(\pi = \frac{٢٢}{٧}\right)$

(أ) ٧٧ (ب) ٦٣ (جـ) ١٤ (د) ٩١



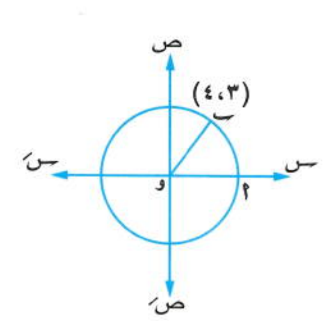
(٢٠) في الشكل المقابل :

نصف دائرة م ، $\overleftrightarrow{بحـ}$ مماس للدائرة م عند ب

، أ ب = ب حـ = ١٢ سم فإن مساحة الجزء المظلل ≃ .... سم^{٢}

(أ) ٢٠,٥٥ (ب) ٣,٤٢

(جـ) ١٠,٢٧ (د) ١,٤



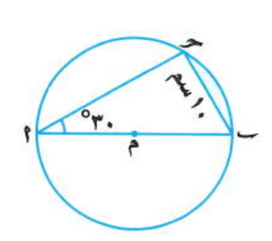
(٢١) في الشكل المقابل :

مساحة القطعة الدائرية الصغرى

التي وترها $\overline{أب}$ ≃ .... وحدة مربعة.

(أ) ٠,٣ (ب) ٠,٦

(جـ) ١,٣ (د) ١,٦



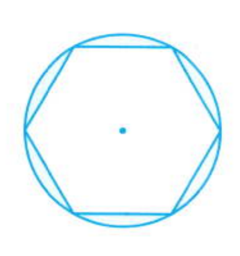
(٢٢) في الشكل المقابل :

إذا كان $\overline{أب}$ قطر في دائرة م

فإن : مساحة الجزء المظلل ≃ .... سم^{٢}

(أ) ٧ (ب) ٨

(جـ) ٩ (د) ١٠



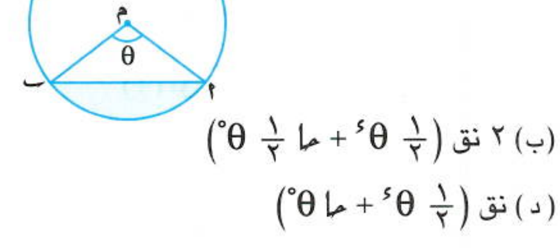
(٢٣) في الشكل المقابل :

دائرة طول نصف قطرها ٦ سم تمر برؤوس سداسي منتظم

فإن مساحة الجزء المظلل ≃ .... سم^{٢}

(أ) ١٦,٢٤ (ب) ١٩,٥٧ (جـ) ٢٠,٤١ (د) ٢٢,١٥

(٢٤) في الشكل المقابل :



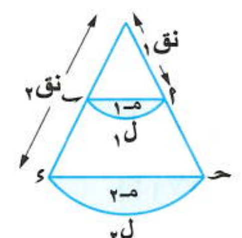
دائرة طول نصف قطرها نق

فإن محيط القطعة الدائرية المظللة = ...

(أ) نق $(\theta^{ء} + \text{جا } \theta^{\circ})$ (ب) ٢ نق $(\frac{1}{2} \theta^{ء} + \text{جا } \frac{1}{2} \theta^{\circ})$

(جـ) ٢ نق $(\theta^{ء} + \text{جا } \frac{1}{2} \theta^{\circ})$ (د) نق $(\frac{1}{2} \theta^{ء} + \text{جا } \theta^{\circ})$

(٢٥) في الشكل المقابل :

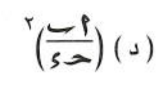


إذا كان : $م_1$ مساحة القطعة الدائرية التي وترها $\overline{أب}$

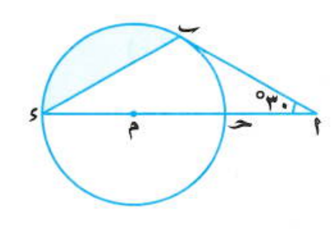
، $م_2$ مساحة القطعة الدائرية التي وترها $\overline{حـ ء}$

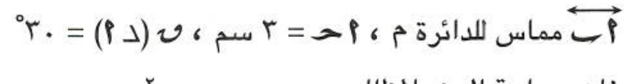
فإن : $\frac{م_1}{م_2}$ تساوي كل مما يأتي ما عدا ....

(أ) $\frac{ل_1 \text{ نق}_2}{ل_2 \text{ نق}_1}$ (ب) $\left(\frac{ل_1}{ل_2}\right)^2$ (جـ) $\left(\frac{\text{نق}_1}{\text{نق}_2}\right)^2$ (د) $\left(\frac{أب}{حـ ء}\right)^2$



(٢٦) في الشكل المقابل :





$\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة م ، أ حـ = ٣ سم ، ق (∠ أ) = ٣٠°

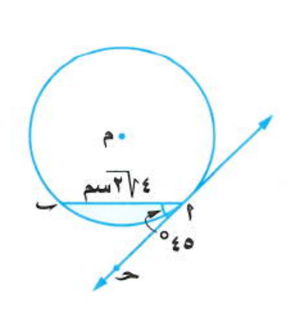
فإن مساحة الجزء المظلل ≃ .... $سم^2$



(أ) ١٨,٥٦ (ب) ١٠,٤٩

(جـ) ٨,٩ (د) ٥,٥٣

(٢٧) في الشكل المقابل :



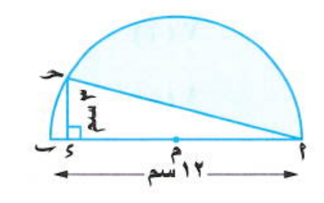
دائرة مركزها م ، $\overleftrightarrow{أحـ}$ مماس للدائرة عند أ ، ق (∠ب أ حـ) = ٤٥°

فإن مساحة المنطقة المظللة = ... $سم^2$

(أ) ٤ π − ٦ (ب) ٤ π − ٨

(جـ) ٢ π − ٤ (د) ٢ π − ٦

(٢٨) في الشكل المقابل :



نصف دائرة م طول قطرها ١٢ سم

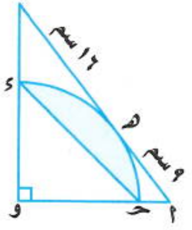
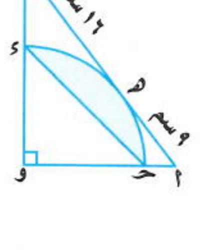
، $\overline{حـ ء} \perp \overline{أب}$ ، حـ ء = ٣ سم

فإن مساحة المنطقة المظللة = ... $سم^2$

(أ) ١٥ π − ٩ (ب) ١٥ π − ١٨

(جـ) ١٢ π − ٩ (د) ١٢ π − ١٨

(٢٩) في الشكل المقابل :

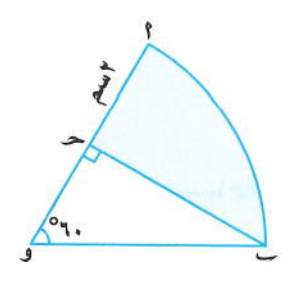
حـ هـ ء ربع دائرة مركزها و ، أب يمسها في هـ

فإن مساحة القطعة الدائرية المظللة = ... سم^٢

(أ) ٣٦ π　　(ب) ٧٢ π

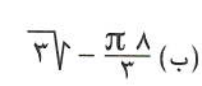
(جـ) ٣٦ (π − ٢)　　(د) ٧٢ (π − ٢)

(٣٠) في الشكل المقابل :



دائرة مركزها (و) ، ق(∠ و) = ٦٠° ، أحـ = ٢ سم

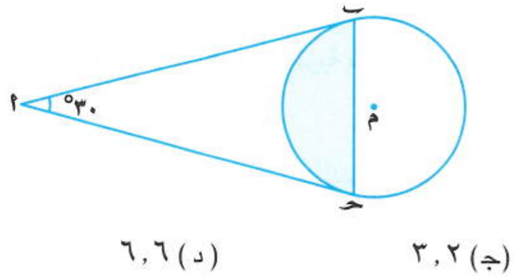
فإن مساحة الجزء المظلل = ... سم^٢



(أ) ٤ π − ٢ √٣　　(ب) $\frac{٨ π}{٣}$ − √٣

(جـ) $\frac{٨ π}{٣}$ − ٢ √٣　　(د) ٢ π − √٣

(٣١) في الشكل المقابل :



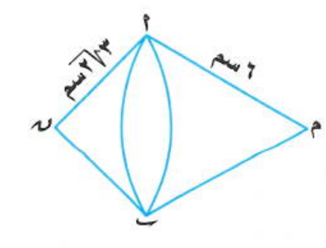
إذا كان : أب ، أحـ قطعتان مماستان للدائرة م

، قياس الزاوية بينهما ٣٠° ، أب = ٥ سم

فإن مساحة الجزء المظلل ≃ .... سم^٢

(أ) ١,٩　　(ب) ٢,٧　　(جـ) ٣,٢　　(د) ٦,٦

(٣٢) في الشكل المقابل :

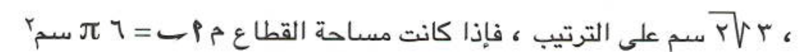


قطاعان دائريان من الدائرتين م ، ن اللتان طولا نصفا قطريهما ٦ سم

، ٣ √٢ سم على الترتيب ، فإذا كانت مساحة القطاع م أب = ٦ π سم^٢

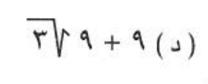
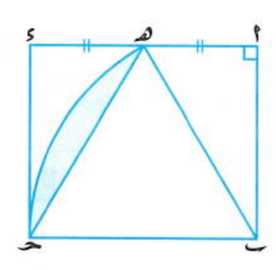
، مساحة القطاع ن أب = ٤,٥ π سم^٢

فإن مساحة الشكل الرباعي أ م ب ن = ... سم^٢



(أ) ١٠,٥ π　　(ب) ٩ √٣　　(جـ) ٩ √٣ π　　(د) ٩ + ٩ √٣

(٣٣) في الشكل المقابل :

أ ب حـ ء مستطيل فيه هـ منتصف أء ، أهـ = هـ ء = ٦ سم

رسمت دائرة مركزها (ب) تمر بالنقطتين هـ ، حـ

فإن مساحة الجزء المظلل = ... سم^٢

(أ) ٩ π − ٣٦ √٣　　(ب) ١٨ π − ٣٦ √٣

(جـ) ٢٤ π − ٣٦ √٣　　(د) ٣٦ π − ٣٦ √٣



(٣٤) في الشكل المقابل :

دائرة مركزها م ، وطول نصف قطرها نق

إذا كان : ء هـ = ٣ هـ حـ

فإن مساحة المنطقة المظللة = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} × ....

(أ) $\frac{\pi}{٦} - \frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{٢\pi}{٣}$ (جـ) $\frac{٢\pi}{٣} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (د) $\frac{٢\pi}{٣} - \frac{١}{٢}$

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد مساحة القطعة الدائرية التي :

(١) طول نصف قطر دائرتها ١٢ سم ، وقياس زاويتها يساوي ١,٤ ء «٣٠ سم^{٢} تقريبًا»

(٢) طول نصف قطر دائرتها ٨ سم ، وقياس زاويتها يساوي ١٣٥° «٥٣ سم^{٢} تقريبًا»

---

٢ أوجد مساحة قطعة دائرية قياس زاويتها المركزية ٢٤َ ١١٥° ، وطول نصف قطر دائرتها ٢٠ سم

«٢٢٢ سم^{٢} تقريبًا»

---

٣ أوجد مساحة القطعة الدائرية التي طول نصف قطر دائرتها ١٤ سم ، وطول قوسها ٢٢ سم. «٥٦ سم^{٢} تقريبًا»

---

٤ دائرة مساحتها $\frac{٧}{٨}$ ٤٩٠ سم^{٢} أوجد مساحة قطعة من هذه الدائرة طول قوسها ٢٦,١٨ سم «٩٦ سم^{٢}»

---

٥ $\overline{أب}$ وتر في دائرة طوله ١٠ سم يقابل زاوية مركزية قياسها ٦٠° أوجد مساحة القطعة الكبرى التي وترها $\overline{أب}$ «٣٠٥ سم^{٢}»

---

٦ أوجد مساحة القطعة الدائرية التي :

(١) طول وترها ٦ سم ، وطول نصف قطر دائرتها ٥ سم «٤ سم^{٢} تقريبًا»

(٢) ارتفاعها ٥ سم ، وطول نصف قطر دائرتها ١٠ سم «٦١ سم^{٢} تقريبًا»

---

٧ أوجد مساحة قطعة دائرية طول وترها = طول نصف قطر دائرتها = ٦ سم «٣,٢٦ سم^{٢}تقريبًا»

---

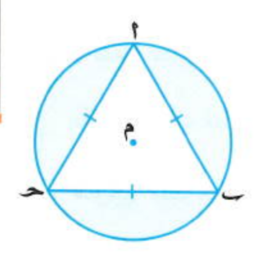
٨ أوجد مساحة قطعة دائرية كبرى طول وترها ١٤ سم ، وطول نصف قطر دائرتها ١٠,٥ سم «٣٢١ سم^{٢}»

---

٩ وتر في دائرة طوله ٨ سم على بعد ٣ سم من مركزها ، أوجد مساحة القطعة الدائرية الصغرى الحادثة من تقاطع هذا الوتر مع سطح الدائرة. «١١ سم^{٢} تقريبًا»

١٠ في الشكل المرسوم :

أ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع مرسوم داخل الدائرة م التى طول نصف قطرها ٨ سم ، أوجد مساحة كل جزء من القطع الدائرية المظللة.



« ٣٩ سم^2 تقريبًا »

---

١١ أ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٢٤ سم ، رسمت دائرة برؤوسه أوجد طول نصف قطر الدائرة ثم أوجد مساحة القطعة الدائرية الصغرى الى وترها $\overline{\text{ب حـ}}$

« ١١٨ سم^2 »

---

١٢ أ ب حـ مثلث مرسوم داخل دائرة فإذا كان أ ب = أ حـ = ١٥ سم ، ب حـ = ١٨ سم فأوجد مساحة كل من القطع الصغرى الثلاث التى أوتارها أضلاع المثلث أ ب حـ

« ٣٩,٣ سم^2 ، ٣٩,٣ سم^2 ، ٨٩,٥ سم^2 تقريبًا »

---

١٣ $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ حـ}}$ وتران متساويا الطول فى دائرة م طول كل منهما ٦ $\sqrt{٣}$ سم ، ق (د ب أ حـ) = ٦٠°

أوجد مساحة الجزء من سطح الدائرة المحصور بين الوترين والقوس الأصغر $\overset{\frown}{\text{ب حـ}}$

« ٦٩ سم^2 »

---

١٤ في الشكل المقابل :

أ ب حـ ء مربع طول ضلعه ٦ سم

رسم قوسان دائريان مركزاهما أ ، حـ

، وطول نصف قطر كل منهما = ٦ سم

أوجد مساحة الجزء المظلل.

« ٢١ سم^2 تقريبًا »

---

١٥ دائرتان متطابقتان طول نصف قطر كل منهما ١٢ سم ، وتمر كل منهما بمركز الأخرى.

أوجد مساحة المنطقة المشتركة بينهما.

« ١٧٧ سم^2 تقريبًا »

---

١٦ أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب فيه : أ ب = ٦ سم ، ب حـ = ٨ سم مرسوم داخل دائرة

أوجد لأقرب سنتيمتر مربع مساحة كل من القطع الثلاث الصغرى التى أوتارها أضلاع المثلث.

« ٤ سم^2 ، ١١ سم^2 ، ٢٩ سم^2 تقريبًا »

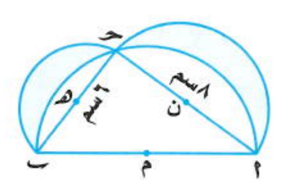
---

١٧ في الشكل المقابل :

م ، ن ، هـ مراكز أنصاف دوائر

، أ حـ = ٨ سم ، حـ ب = ٦ سم

أوجد مساحة الجزء المظلل.



« ٢٤ سم^2 »

١٨ أ نقطة خارج دائرة مركزها م ، رسم من أ القطعتان المماستان $\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ يمسانها فى ب ، حـ فإذا كان طول نصف قطر الدائرة = ٥ سم ، أ م = ١٠ سم

فأوجد مساحة القطعة الصغرى التى قوسها $\frown{بحـ}$ «١٥,٣٥٥ سم^2»

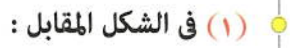
---

١٩ دائرتان طولا نصفى قطريهما ٦ سم ، ٨ سم ، والبعد بين مركزيهما ١٠ سم

أوجد مساحة المنطقة المشتركة بين الدائرتين لأقرب جزء من عشرة. «٢٦,٦ سم^2»

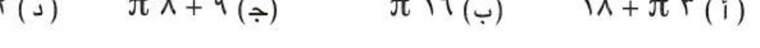
ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

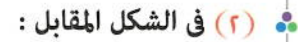
١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :


(١) فى الشكل المقابل :

ربع دائرة م ، ق(∠ أ م حـ) = ٥٠° ، حـ هـ = حـ ب

فإن مساحة الجزء المظلل = ... سم^2


(أ) ٣ π + ١٨ (ب) ١٦ π (جـ) ٩ + ٨ π (د) ١٢ π


(٢) فى الشكل المقابل :

دائرتان متماستان من الخارج فى أ ، إذا كان : أ ب = ٤ سم

، أ حـ = ٦ سم وكانت $م_1$ ، $م_2$ مساحتى الجزأين المظللين

فإن : $\frac{م_2}{م_1}$ = ...

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٢}{٥}$ (جـ) $\frac{٤}{٩}$ (د) $\frac{٤}{٢٥}$


(٣) فى الشكل المقابل :

دائرة مركزها م ، ق($\frown{أحـب}$) = ٣٠٠°

، محيط الشكل المظلل = (٣ π + ٩) سم

فإن مساحة الشكل المظلل = ... سم^2


(أ) $\frac{٢٧}{٢}$ (٣ π − ٣ $\sqrt{٣}$) (ب) $\frac{٢٧}{٢}$ (٢ π − ٣ $\sqrt{٣}$)

(جـ) $\frac{٢٧}{٤}$ (٣ π − ٣ $\sqrt{٣}$) (د) $\frac{٢٧}{٤}$ (٢ π − ٣ $\sqrt{٣}$)

---

٢ إذا كان وتر التقاطع لدائرتين متقاطعتين هو قطر إحداهما وطوله يساوى طول نصف قطر الدائرة الأخرى ويساوى ١٠ سم فأوجد مساحة المنطقة المشتركة بين الدائرتين. «٤٨,٣٣ سم^2»

الدرس **7**

المساحـــات

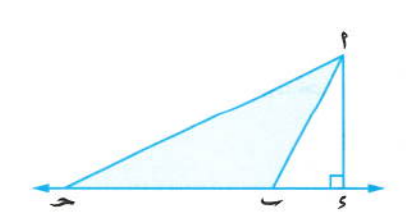


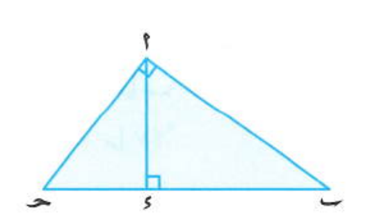
أولًا مســاحة المـثلث

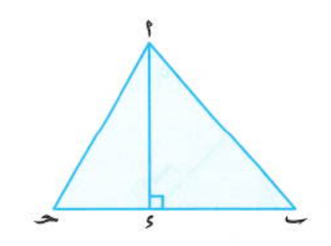
سبق أن درست مساحة المثلث وعلمت أن :

أولًا مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ طول القاعدة × الارتفاع المناظر لها

أى أنه فى أى مثلث أ ب ج إذا كان $\overline{\text{أ د}} \perp \overleftrightarrow{\text{ب ج}}$ فإن :



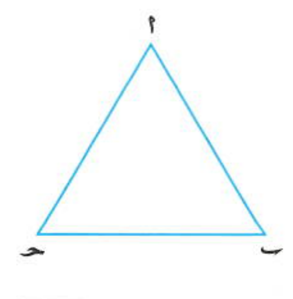




مساحة $\triangle$ أ ب ج = $\frac{1}{2}$ ب ج × أ د

ثانيًا مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولى ضلعين فيه × جيب الزاوية المحصورة بينهما

أى أنه فى أى مثلث أ ب ج



مساحة المثلث أ ب ج = $\frac{1}{2}$ أ ب × أ ج × جا أ

= $\frac{1}{2}$ أ ب × ب ج × جا ب

= $\frac{1}{2}$ أ ج × ب ج × جا ج

قاعدة هيرون لحساب مساحة المثلث

إذا رمزنا لمحيط المثلث أ ب حـ (مجموع أطوال أضلاع المثلث) بالرمز ٢ ع

فإن : مساحة المثلث أ ب حـ = $\sqrt{\text{ع (ع - أ ب) (ع - ب حـ) (ع - أ حـ)}}$

مثال ١

احسب مساحة المثلث أ ب حـ فى كل من الحالات الآتية :

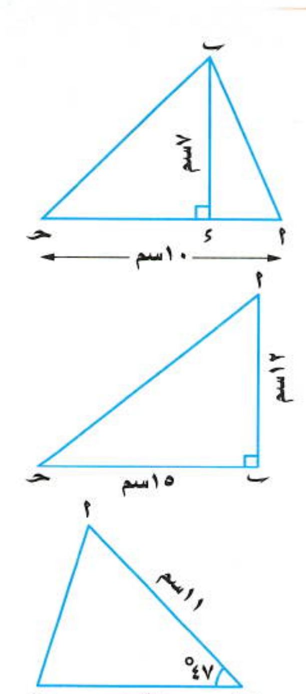
١ أ حـ = ١٠ سم وطول العمود المرسوم من ب على $\overline{\text{أ حـ}}$ يساوى ٧ سم

٢ أ ب = ١٢ سم ، ب حـ = ١٥ سم ، ق (∠ب) = ٩٠°

٣ أ ب = ١١ سم ، ب حـ = ١٠ سم ، ق (∠ب) = ٤٧° مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين.

٤ أ ب = ٢٥ سم ، ب حـ = ١٧ سم ، أ حـ = ٢٦ سم

الحل



١ مساحة المثلث أ ب حـ = $\frac{1}{2}$ أ حـ × ب ء

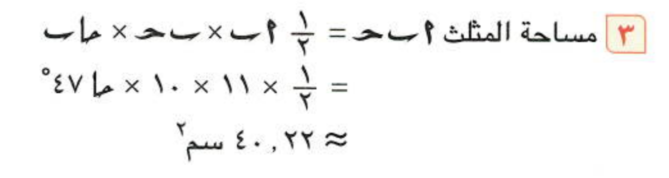
= $\frac{1}{2}$ × ١٠ × ٧

= ٣٥ سم^2

٢ مساحة المثلث أ ب حـ = $\frac{1}{2}$ ب حـ × أ ب

= $\frac{1}{2}$ × ١٥ × ١٢

= ٩٠ سم^2



٣ مساحة المثلث أ ب حـ = $\frac{1}{2}$ أ ب × ب حـ × جا ب

= $\frac{1}{2}$ × ١١ × ١٠ × جا ٤٧°

≈ ٤٠,٢٢ سم^2

٤ ∵ ع = $\frac{1}{2}$ (٢٥ + ١٧ + ٢٦) = ٣٤ سم

∴ مساحة Δ أ ب حـ = $\sqrt{\text{٣٤ (٣٤ - ٢٥) (٣٤ - ١٧) (٣٤ - ٢٦)}}$ = ٢٠٤ سم^2

حاول بنفسك

احسب مساحة المثلث أ ب حـ فى كل من الحالات الآتية مقربًا الناتج لرقمين عشريين :

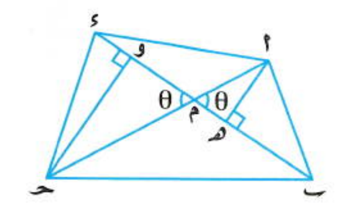
١ المثلث أ ب حـ متساوى الأضلاع وطول ضلعه ٦ سم.

٢ أ ب = ١٢ سم ، ب حـ = ١٥ سم ، ق (∠ب) = ٦٢°

٣ أ ب = ٦ سم ، ب حـ = ٨ سم ، أ حـ = ٩ سم

ثانيًا مساحة الشكل الرباعى المحدب

فى الشكل المقابل :



أ ب جـ ء شكل رباعى قطراه $\overline{أجـ}$ ، $\overline{بء}$ متقاطعان فى م ويحصران

بينهما زاوية قياسها θ

فإذا كان : $\overline{أهـ} \perp \overline{بء}$ ، $\overline{جـو} \perp \overline{بء}$

فإن : مساحة المضلع أ ب جـ ء = مساحة Δ أ ب ء + مساحة Δ ب جـ ء

= $\frac{1}{2}$ ب ء × أ هـ + $\frac{1}{2}$ ب ء × جـ و = $\frac{1}{2}$ ب ء (أ هـ + جـ و)

∵ Δ أ هـ م فيه : ق(∠ أ هـ م) = ٩٠° ∴ جا θ = $\frac{أهـ}{أم}$ ∴ أ هـ = أ م جا θ

، Δ جـ و م فيه : ق(∠ جـ و م) = ٩٠° ∴ جا θ = $\frac{جـو}{جـم}$ ∴ جـ و = جـ م جا θ

∴ مساحة المضلع أ ب جـ ء = $\frac{1}{2}$ ب ء (أ م جا θ + جـ م جا θ) = $\frac{1}{2}$ ب ء جا θ (أ م + جـ م)

= $\frac{1}{2}$ ب ء جا θ × أ جـ = $\frac{1}{2}$ ب ء × أ جـ × جا θ

أى أن مساحة الشكل الرباعى = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولى قطريه × جيب الزاوية المحصورة بينهما

ملاحظة

إذا استخدمنا الزاوية ∠ أ م ء التى قياسها (١٨٠° − θ) أى الزاوية المكملة للزاوية ∠ أ م ب التى قياسها θ فإن مساحة الشكل الرباعى أ ب جـ ء لا تتغير لأن : جا (١٨٠° − θ) = جا θ

مثال ٢

احسب مساحة الشكل الرباعى الذى طولا قطريه ١٠ سم ، ١٢ سم وقياس الزاوية المحصورة بينهما ٦٢°

الحل

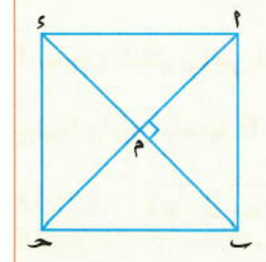
مساحة الشكل الرباعى = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولى قطريه × جيب الزاوية المحصورة بينهما

= $\frac{1}{2}$ × ١٠ × ١٢ × جا ٦٢° ≈ ٥٢,٩٨ سم^2

ملاحظة

يمكن استخدام القانون السابق فى حساب مساحات بعض الأشكال الرباعية الخاصة مثل :

١ المربع :



فى الشكل المقابل : أ ب حـ ء مربع ∴ أ حـ = ب ء ، $\overline{أحـ} \perp \overline{بء}$

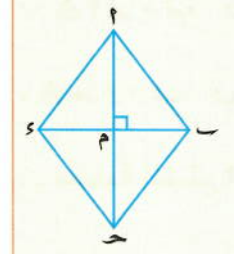
∴ مساحة المربع أ ب حـ ء = $\frac{١}{٢}$ × أ حـ × ب ء × حا ٩٠°

= $\frac{١}{٢}$ × أ حـ × أ حـ × ١ = $\frac{١}{٢}$ (أ حـ)^{٢}

∴ مساحة المربع = $\frac{١}{٢}$ مربع طول قطره

فمثلاً المربع الذى طول قطره ٦ سم تكون مساحته = $\frac{١}{٢}$ × (٦)^{٢} = ١٨ سم^{٢}

٢ المعين :



فى الشكل المقابل : أ ب حـ ء معين ∴ $\overline{أحـ} \perp \overline{بء}$

∴ مساحة المعين أ ب حـ ء = $\frac{١}{٢}$ × أ حـ × ب ء × حا ٩٠° = $\frac{١}{٢}$ × أ حـ × ب ء

∴ مساحة المعين = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولى قطريه

فمثلاً المعين الذى طولا قطريه ٦ سم ، ٨ سم تكون مساحته = $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٨ = ٢٤ سم^{٢}

حاول بنفسك

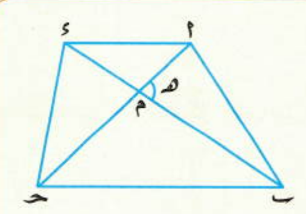
أوجد ما يأتى :

١ مساحة المربع الذى طول قطره ٨ سم

٢ مساحة المعين الذى طولا قطريه ١٢ سم ، ١٦ سم

٣ مساحة الشكل الرباعى الذى طولا قطريه ٦ سم ، ٨ سم وقياس الزاوية بينهما ١٢٠°

ملاحظة



فى الشكل الرباعى : أ ب حـ ء إذا تقاطع قطراه فى م

فإن : م (Δ أ ب م) × م (Δ ء حـ م) = م (Δ أ ء م) × م (Δ ب حـ م)

الإثبات

م (Δ أ ب م) × م (Δ ء حـ م) = [$\frac{١}{٢}$ (م أ) (م ب) حا هـ] × [$\frac{١}{٢}$ (م ء) (م حـ) حا هـ]

= [$\frac{١}{٢}$ (م أ) (م ء) حا (١٨٠° − هـ)]

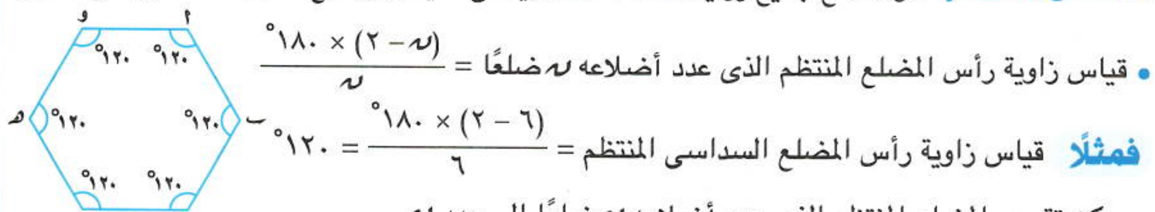
× [$\frac{١}{٢}$ (م ب) (م حـ) حا (١٨٠° − هـ)]

= م (Δ أ ء م) × م (Δ ب حـ م)

ثالثًا مساحة المضلع المنتظم

تذكر أن

- **المضلع المنتظم :** هو مضلع جميع زواياه الداخلة متساوية فى القياس وجميع أضلاعه متساوية فى الطول.



- قياس زاوية رأس المضلع المنتظم الذى عدد أضلاعه ن ضلعًا = $\frac{(\text{ن} - ٢) \times ١٨٠^\circ}{\text{ن}}$

فمثلًا قياس زاوية رأس المضلع السداسى المنتظم = $\frac{(٦ - ٢) \times ١٨٠^\circ}{٦} = ١٢٠^\circ$

- يمكن تقسيم المضلع المنتظم الذى عدد أضلاعه ن ضلعًا إلى عدد ن

من المثلثات المتساوية الساقين والمتطابقة والتى قياس زاوية رأس كل منها = $\frac{٢\pi}{\text{ن}}$

فمثلًا المضلع الخماسى المنتظم ينقسم إلى ٥ مثلثات متطابقة

كل منها متساوى الساقين وقياس زاوية رأسه = $\frac{٢\pi}{٥} = ٧٢^\circ$



- **مساحة المضلع المنتظم :**

فى الشكل المقابل :

مضلع منتظم عدد أضلاعه ن ضلعًا

وطول ضلعه = س وحدة طول.

فإن : مساحة المضلع = مساحة Δ أ م ب × ن

$\because$ Δ أ م ب متساوى الساقين فيه : م أ = م ب ، ق (∠ أ م ب) = $\frac{٢\pi}{\text{ن}}$

، $\because$ $\overline{\text{م ء}} \perp \overline{\text{أ ب}}$ $\therefore$ ق (∠ أ م ء) = $\frac{\pi}{\text{ن}}$

، $\because$ ظا (∠ أ م ء) = $\frac{\text{أ ء}}{\text{م ء}}$ $\therefore$ ظا $\frac{\pi}{\text{ن}} = \frac{\frac{١}{٢}\text{س}}{\text{م ء}}$ $\therefore$ م ء = $\frac{١}{٢}$ س ظتا $\frac{\pi}{\text{ن}}$

، $\because$ مساحة Δ أ م ب = $\frac{١}{٢}$ طول القاعدة × الارتفاع = $\frac{١}{٢}$ × أ ب × م ء

= $\frac{١}{٢}$ × س × $\frac{١}{٢}$ س ظتا $\frac{\pi}{\text{ن}}$ = $\frac{١}{٤}$ س^٢ ظتا $\frac{\pi}{\text{ن}}$

$\therefore$ مساحة المضلع = $\left(\frac{١}{٤}\text{ س}^٢ \text{ ظتا } \frac{\pi}{\text{ن}}\right)$ × ن = $\frac{١}{٤}$ ن س^٢ ظتا $\frac{\pi}{\text{ن}}$

أى أن مساحة المضلع المنتظم الذى عدد أضلاعه ن ضلعًا وطول ضلعه س = $\frac{١}{٤}$ ن س^٢ ظتا $\frac{\pi}{\text{ن}}$

مثال ٣

أوجد مساحة كل من :

١ شكل ثمانى منتظم طول ضلعه ٧ سم (لأقرب رقمين عشريين)

٢ مضلع منتظم عدد أضلاعه = ١٢ ضلعًا وطول ضلعه = ١٠ سم (لأقرب سنتيمتر مربع)

٣ مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه = ٩ سم (لأقرب ثلاثة أرقام عشرية)

الحـــل

١ مساحة المضلع الثمانى المنتظم = $\frac{1}{4}$ ن س^2 ظتا $\frac{\pi}{ن}$ = $\frac{1}{4}$ × ٨ × ٧^2 × ظتا $\frac{\pi}{8}$ ≈ ٢٣٦,٥٩ سم^2

٢ مساحة المضلع الذى عدد أضلاعه ١٢ ضلعًا = $\frac{1}{4}$ ن س^2 ظتا $\frac{\pi}{ن}$ = $\frac{1}{4}$ × ١٢ × ١٠^2 × ظتا $\frac{\pi}{12}$ ≈ ١١٢٠ سم^2

٣ مساحة المثلث المتساوى الأضلاع = $\frac{1}{4}$ ن س^2 ظتا $\frac{\pi}{ن}$ = $\frac{1}{4}$ × ٣ × ٩^2 × ظتا $\frac{\pi}{3}$ ≈ ٣٥,٠٧٤ سم^2

حل آخر: مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولى ضلعين × جيب الزاوية المحصورة بينهما

= $\frac{1}{2}$ × ٩ × ٩ × جا ٦٠° ≈ ٣٥,٠٧٤ سم^2

ملاحظتان

- المثلث المتساوى الأضلاع هو مضلع ثلاثى منتظم ولذلك يمكن استخدام قانون حساب مساحة المضلع المنتظم فى إيجاد مساحته كما فى المثال السابق ويكون :

مساحة المثلث المتساوى الأضلاع = $\frac{1}{4}$ × ٣ × س^2 × ظتا $\frac{\pi}{3}$

= $\frac{3}{4}$ س^2 × ظتا ٦٠°

= $\frac{3}{4}$ س^2 × $\frac{\sqrt{3}}{3}$ = $\frac{\sqrt{3}}{4}$ س^2

أى أن مساحة المثلث المتساوى الأضلاع = $\frac{\sqrt{3}}{4}$ س^2 حيث س طول ضلع المثلث

- وبنفس الطريقة يمكن إيجاد مساحة السداسى المنتظم :

مساحة السداسى المنتظم = $\frac{1}{4}$ × ٦ × س^2 × ظتا $\frac{\pi}{6}$

= $\frac{3}{2}$ س^2 × ظتا ٣٠° = $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ س^2

أى أن مساحة السداسى المنتظم = $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ س^2 حيث س طول ضلعه

حاول بنفسك

استخدم قانون حساب مساحة المضلع المنتظم فى إيجاد مساحة كل من :

١ مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ١٥ سم (مقربًا الناتج لرقمين عشريين)

٢ مربع طول ضلعه ٦ سم

٣ مضلع خماسى منتظم طول ضلعه ١٢ سم (مقربًا الناتج لثلاثة أرقام عشرية)

تمارين 14 على المساحـــات



من أسئلة الكتاب المدرسى • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مساحة المثلث أ ب حـ الذى فيه : أ ب = ٧ سم ، ب حـ = ٨ سم ، ق (∠ ب) = ٥٠° تساوى .... سم^2

(أ) ٢١,٤ (ب) ٤٢,٩ (جـ) ١٨ (د) ٣٣,٤

(٢) مساحة المثلث المتساوى الساقين الذى طول أحد ساقيه ١٠ سم وقياس زاوية رأسه ٦٠° تساوى .... سم^2

(أ) ٢٥ (ب) ٥٠ $\sqrt{3}$ (جـ) ٢٥ $\sqrt{3}$ (د) ٥٠

(٣) مساحة المثلث المتساوى الساقين الذى طول قاعدته ٦ سم ، طول أحد ساقيه ٥ سم تساوى .... سم^2

(أ) ١٥ (ب) ١٢ (جـ) ١٠ (د) ٢٠

(٤) مساحة المثلث المتساوى الأضلاع الذى طول ضلعه ٦ سم تساوى .... سم^2

(أ) ١٨ (ب) ١٨ $\sqrt{3}$ (جـ) ٩ (د) ٩ $\sqrt{3}$

(٥) مساحة الشكل الرباعى الذى طولا قطريه ٦ سم ، ٨ سم وقياس الزاوية بينهما ٣٠° تساوى .... سم^2

(أ) ١٢ (ب) ٢٤ (جـ) ١٢ $\sqrt{3}$ (د) ٢٤ $\sqrt{3}$

(٦) الشكل الرباعى الذى طولا قطريه ١٠ سم ، ١٢ سم ومساحته تساوى ٣٠ سم^2 يكون قياس الزاوية الحادة بين قطريه ....

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ١٥٠° (د) ٤٥°

(٧) مساحة الشكل السداسى المنتظم الذى طول ضلعه ٤ سم تساوى .... سم^2

(أ) ١٢ $\sqrt{3}$ (ب) ١٢ (جـ) ٢٤ $\sqrt{3}$ (د) ٢٤

(٨) مساحة الشكل الخماسى المنتظم الذى طول ضلعه ١٠ سم ≃ .... سم^2

(أ) ١٧٢,٠٥ (ب) ٩٠,٨٢ (جـ) ٦٨٨,١٩ (د) ١٣٧,٦٤

(٩) المعين الذى قياس إحدى زواياه ٥٠° وطول ضلعه ٦ سم تكون مساحته .... سم^2

(أ) ١٣,٧٩ (ب) ١١٠,٣١ (جـ) ٢٧,٦ (د) ١١,٥٧

(١٠) مساحة المثلث المتساوى الأضلاع الذى طول ضلعه س سم تساوى .... سم^2

(أ) س^2 (ب) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ س^2 (جـ) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ س^2 (د) $\frac{1}{2}$ س^2

(١١) مساحة المربع الذى طول قطره ـس سم تساوى .... سم^٢

(أ) ـس^٢ (ب) $\frac{١}{٢}$ ـس^٢ (جـ) $\sqrt{٢}$ ـس^٢ (د) $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ ـس^٢

(١٢) مساحة الشكل السداسى المنتظم الذى طول ضلعه ـس سم تساوى .... سم^٢

(أ) $\frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$ ـس^٢ (ب) $\frac{٣\sqrt{٣}}{٤}$ ـس^٢ (جـ) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ـس^٢ (د) $\frac{٣}{٢}$ ـس^٢

(١٣) مساحة الشكل الثمانى المنتظم الذى طول ضلعه ـس سم تساوى .... سم^٢

(أ) ٢ ـس^٢ ظتا ٤٥° (ب) ٢ ـس^٢ ظا ٤٥°

(جـ) ٨ ـس^٢ ظتا ٢٢,٥° (د) ٢ ـس^٢ ظتا ٢٢,٥°

(١٤) فى الشكل المقابل :

أ ب جـ ء شكل رباعى فيه : ب ء = ٦ سم

، مساحة الشكل أ ب جـ ء = ٢٤ $\sqrt{٣}$ سم^٢

فإن : أ جـ = ... سم

(أ) ١٢ (ب) ١٤ (جـ) ١٥ (د) ١٦

(١٥) مساحة المثلث الذى أطوال أضلاعه $\sqrt{٢}$ ، $\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{٥}$ سم تساوى .... سم^٢

(أ) $\sqrt{٦}$ (ب) $\frac{١}{٢}\sqrt{٦}$ (جـ) $\sqrt{٣٠}$ (د) $\frac{١}{٢}\sqrt{٣٠}$

(١٦) مثلث حاد الزوايا مساحته ١٤,٤ سم^٢ ، طولا ضلعين فيه ٦ سم ، ٨ سم فإن جيب تمام الزاوية المحصورة بين هذين الضلعين يساوى ....

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{٤}{٥}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{١}{٢}$

(١٧) مساحة المثلث الذى أطوال أضلاعه ٤ سم ، ٦ سم ، ٨ سم ≃ .... سم^٢

(أ) ١٧٣,٩ (ب) ١١,٦ (جـ) ١٣,٩ (د) ٤١,٦

(١٨) أ ب جـ مثلث حاد الزوايا مساحته ٤٠,١٣ سم^٢ فإذا كان : أ ب = ٩ سم ، ب جـ = ١٢ سم

فإن : ق (∠ ب) = ...° (لأقرب درجة)

(أ) ٣٢ (ب) ٤٢ (جـ) ٤٨ (د) ٨٨

(١٩) طول ضلع المثلث المتساوى الأضلاع الذى مساحته ٣٦ $\sqrt{٣}$ سم^٢ يساوى .... سم

(أ) ٦ $\sqrt{٣}$ (ب) ٢٤ (جـ) ٦ (د) ١٢

(٢٠) فى الشكل المقابل :

أ ب جـ ء متوازى أضلاع

مساحته = ... سم^٢

(أ) ١٦ (ب) ٢٠ (جـ) ٢٤ (د) ٣٦

(٢١) مساحة الشكل الرباعى الذى طولا قطريه ١٢ سم ، ١٣ سم ، ويحصران زاوية جيب تمامها $\frac{٥}{١٣}$ تساوى .... سم^٢

(أ) ٣٠ (ب) ٧٢ (جـ) ٦٠ (د) ١٤٤

(٢٢) إذا كانت مساحة شكل سداسى منتظم ٥٤ $\sqrt{٣}$ سم^٢ ، فإن طول ضلعه يساوى .... سم.

(أ) ٦ (ب) ١٢ (جـ) ٦ $\sqrt{٣}$ (د) ١٢ $\sqrt{٣}$

(٢٣) فى الشكل المقابل :

$\overline{بحـ}$ قطر فى دائرة م ، أحـ = ٦ سم ، ق (∠ أ ب حـ) = θ

فإن : مساحة Δ أ ب حـ = ... سم^٢

(أ) ٦ جا θ (ب) ٦ ظا θ (جـ) ١٨ ظا θ (د) ١٨ ظتا θ

(٢٤) فى الشكل المقابل :

إذا كان طول العمود المرسوم من مركز سداسى منتظم على أحد أضلاعه يساوى ٦ سم فإن مساحة السداسى تساوى ....

(أ) ٢٧ $\sqrt{٣}$ سم^٢ (ب) ٣٦ $\sqrt{٣}$ سم^٢

(جـ) ٥٤ $\sqrt{٣}$ سم^٢ (د) ٧٢ $\sqrt{٣}$ سم^٢

(٢٥) فى الشكل المقابل :

مساحة Δ أ ب حـ تساوى .... سم^٢

(أ) ٢٤ (ب) ٢٨

(جـ) ٣٢ (د) ٣٥

(٢٦) فى الشكل المقابل :

إذا كانت مساحة الشكل أ ب حـ ء = ٥٠ سم^٢

فإن : ق (∠ أ هـ ب) = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠°

(جـ) ٧٥° (د) ٩٠°

(٢٧) فى الشكل المقابل :

إذا كانت مساحة الشكل أ ب حـ ء = ١٩٠ سم^٢

فإن : طول $\overline{هـ حـ}$ = ... سم

(أ) ٩ (ب) ١٠ (جـ) ١١ (د) ١٢

(٢٨) فى Δ أ ب حـ : إذا رمزنا لنصف محيط المثلث بالرمز ح وكان ح − أ ب = ٦ سم ،
ح − ب حـ = ٨ سم ، ح − أ حـ = ١٠ سم فإن مساحة Δ أ ب حـ = ... سم^2

(أ) $8\sqrt{30}$ (ب) $24\sqrt{5}$ (جـ) $4\sqrt{30}$ (د) $48\sqrt{5}$

(٢٩) مضلع منتظم طول ضلعه ٦ سم وقياس الزاوية الخارجة عن أحد رؤوسه تساوى 36°
فإن مساحته ≃ .... سم^2

(أ) ٢٧٧ (ب) ٢٢٤ (جـ) ٢١٨ (د) ١٩٦

(٣٠) أ ب حـ مثلث فيه : ب حـ = ٨ سم وكان طول المتوسط $\overline{\text{أ ء}}$ = ٤ سم فإن أكبر مساحة للمثلث أ ب حـ
تساوى .... سم^2

(أ) ٣٢ (ب) ١٦ (جـ) $12\sqrt{3}$ (د) $6\sqrt{3}$

(٣١) مثلث متساوى الأضلاع ارتفاعه ٦ سم فإن مساحته .... سم^2

(أ) $12\sqrt{3}$ (ب) $16\sqrt{3}$ (جـ) $16\sqrt{2}$ (د) $18\sqrt{2}$

(٣٢) إذا كان ل هو ارتفاع المثلث المتساوى الأضلاع فإن مساحته = ... سم^2

(أ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ل^2 (ب) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ل^2 (جـ) $\sqrt{3}$ ل^2 (د) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ل^2

(٣٣) مثلث محيطه ١٥٠ سم والنسبة بين أطوال أضلاعه ٥ : ١٢ : ١٣ فإن مساحته = ... سم^2

(أ) ٢٥٠ (ب) ٣٧٥ (جـ) ٥٠٠ (د) ٧٥٠

(٣٤) أى المثلثات الآتية يمكن إيجاد مساحته ؟

(أ) مثلث متساوى الساقين محيطه = ٣٠ سم (ب) مثلث قائم الزاوية محيطه = ٣٠ سم

(جـ) مثلث متساوى الأضلاع محيطه = ٣٠ سم (د) مثلث قائم الزاوية طول وتره = ٣٠ سم

(٣٥) إذا كان قطرا الشكل الرباعى متعامدان فإن مساحته = ...

(أ) حاصل ضرب طولا قطريه. (ب) $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولا قطريه.

(جـ) حاصل ضرب أطوال أضلاعه. (د) $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب أطوال أضلاعه.

(٣٦) إذا كان : س هو محيط المثلث أ ب حـ
فإن : $\sqrt{\text{س (س − ٢ أ ب) (س − ٢ ب حـ) (س − ٢ أ حـ)}}$ = ...

(أ) مساحة Δ أ ب حـ (ب) ٢ مساحة Δ أ ب حـ

(جـ) ٣ مساحة Δ أ ب حـ (د) ٤ مساحة Δ أ ب حـ

(٣٧) مساحة المعين الذى طول ضلعه ل سم وقياس إحدى زواياه الداخلة θ تساوى .... سم^2

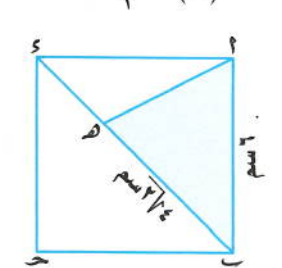
(أ) ل^2 (ب) $\frac{1}{2}$ ل^2 جا θ (جـ) ل^2 جا θ (د) ل^2 جتا θ

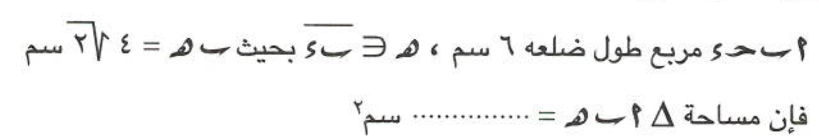
(٣٨) أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = ٤ سم ، ب حـ = ٨ سم ، أ حـ = ٦ سم ، $\overline{\text{أ ء}}$ متوسط

فإن مساحة Δ أ ب ء = ... سم٢

(أ) $\frac{٣\sqrt{١٥}}{٢}$ (ب) ٢ $\sqrt{١٥}$ (جـ) ٣ $\sqrt{١٥}$ (د) $\frac{٥\sqrt{١٥}}{٢}$

(٣٩) في الشكل المقابل :





أ ب حـ ء مربع طول ضلعه ٦ سم ، هـ ∈ $\overline{\text{ب ء}}$ بحيث ب هـ = ٤ $\sqrt{٢}$ سم

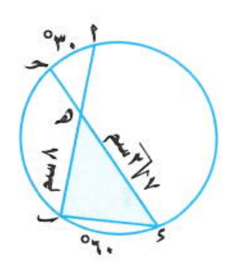
فإن مساحة Δ أ ب هـ = ... سم٢



(أ) ١٢ (ب) ٢٤

(جـ) ١٢ $\sqrt{٢}$ (د) ٢٤ $\sqrt{٢}$

(٤٠) في الشكل المقابل :



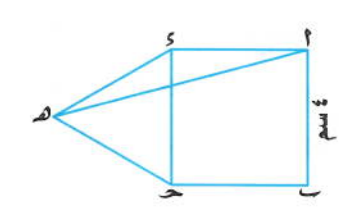
$\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{حـ ء}}$ وتران متقاطعان في هـ ، هـ ء = ٧ $\sqrt{٢}$ سم

، هـ ب = ٨ سم ، ق $(\widehat{\text{ب ء}})$ = ٦٠° ، ق $(\widehat{\text{أ حـ}})$ = ٣٠°

فإن : مساحة Δ ء هـ ب = ... سم٢

(أ) ٢٨ $\sqrt{٢}$ (ب) ٢٨ (جـ) ١٦ $\sqrt{٢}$ (د) ١٦

(٤١) في الشكل المقابل :



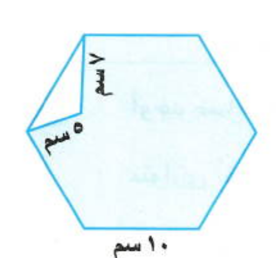
أ ب حـ ء مربع ، ء حـ هـ مثلث متساوي الأضلاع

فإن مساحة Δ أ ء هـ = ... سم٢

(أ) ١٦ (ب) ٨

(جـ) ٤ (د) ٤ $\sqrt{٣}$

(٤٢) في الشكل المقابل :

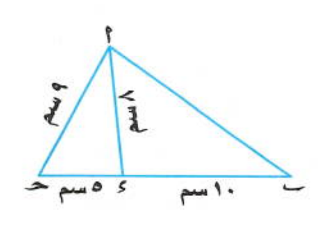


شكل سداسي منتظم فإن مساحة المنطقة المظللة ≃ سم٢

(أ) ٢٤١,٦ (ب) ٢٤٦,١

(جـ) ٢٤٣,٦ (د) ٢٤٨,٣

(٤٣) في الشكل المقابل :



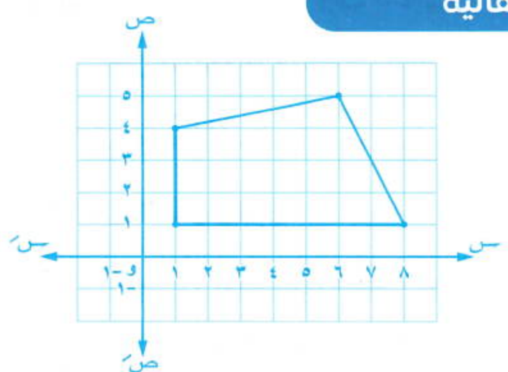
مساحة Δ أ ب حـ = ... سم٢

(أ) ٦ $\sqrt{١٦}$ (ب) ١٢ $\sqrt{١١}$

(جـ) ١٨ $\sqrt{١١}$ (د) ٣٦ $\sqrt{١١}$

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد مساحة الشكل المقابل :



---

٢ أوجد مساحة المثلث أ ب حـ فى كل من الحالات الآتية :

(١) أ ب = ٦ سم ، ب حـ = ٨ سم ، ق (∠ ب) = ٩٠° «٢٤ سم٢»

(٢) أ حـ = ١٢ سم وطول العمود المرسوم من ب على $\overline{أحـ}$ يساوى ٧ سم «٤٢ سم٢»

(٣) أ ب = ١٦ سم ، ب حـ = ٢٠ سم ، ق (∠ ب) = ٤٦° «١١٥ سم٢ تقريبًا»

(٤) أ ب = ٨ سم ، ب حـ = ٧ سم ، أ حـ = ١١ سم «٢٨ سم٢ تقريبًا»

---

٣ أوجد مساحة المثلث أ ب حـ الذى فيه : ب حـ = ١٦ سم ، ب أ = ٢٢ سم ، ق (∠ ب) = ٦٣°
مقربًا الناتج لأقرب ثلاثة أرقام عشرية. «١٥٦,٨١٧ سم٢»

---

٤ أوجد لأقرب رقم عشرى واحد مساحة مثلث متساوى الساقين طول كل من ساقيه ١٢ سم وقياس الزاوية المحصورة بينهما ٦٤° «٦٤,٧ سم٢»

---

٥ أوجد مساحة الشكل الرباعى الذى طولا قطريه ١٢ سم ، ١٦ سم وقياس الزاوية المحصورة بينهما ٦٨° مقربًا الناتج لأقرب سنتيمتر مربع. «٨٩ سم٢»

---

٦ أوجد مساحة الشكل أ ب حـ ء فى كل من الحالات الآتية :

(١) متوازى أضلاع فيه : أ ب = ٨ سم ، ب حـ = ١١ سم ، ق (∠ ب) = ٦٠° «٤٤ $\sqrt{٣}$ سم٢»

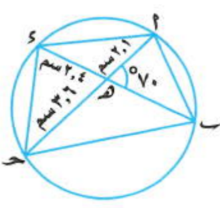
(٢) شبه منحرف طولا قاعدتيه المتوازيتين $\overline{أء}$ ، $\overline{ب حـ}$ يساوى ٧ سم ، ١١ سم
على الترتيب وطول العمود المرسوم من ء على $\overline{ب حـ}$ يساوى ٦ سم. «٥٤ سم٢»

(٣) معين فيه أ ب = ٨ سم ، وقياس الزاوية المحصورة بين ضلعين متجاورين فيه يساوى ٥٨° «٥٤ سم٢»

---

٧ أ ب حـ ء متوازى أضلاع طولا قطريه $\overline{أحـ}$ ، $\overline{ب ء}$ هما ١٦ سم ، ٢٤ سم على الترتيب فإذا كانت مساحته ١٩٢ سم٢
فأوجد : ق (∠ أ م ء) «٩٠°»

٨ فى الشكل المقابل :



أ ب ﺟ ء شكل رباعى مرسوم داخل دائرة ، $\overline{أﺟ} \cap \overline{بء} = \{ﻫ\}$

فإذا كان أ ﻫ = ٢,١ سم ، ﻫ ﺟ = ٣,٦ سم ، ﻫ ء = ٢,٤ سم ،

ق (∠ أ ﻫ ب) = ٧٠° فاحسب مساحة الشكل الرباعى أ ب ﺟ ء «١٥ سم^{٢} تقريبًا»

٩ أوجد مساحة كل مضلع منتظم من المضلعات الآتية (مقربًا الناتج لأقرب جزء من عشرة) :

(١) خماسى منتظم طول ضلعه = ١٦ سم «٤٤٠,٤ سم^{٢}»

(٢) سداسى منتظم طول ضلعه = ١٢ سم «٣٧٤,١ سم^{٢}»

(٣) ثمانى منتظم طول ضلعه = ٨ سم «٣٠٩ سم^{٢}»

(٤) سباعى منتظم طول ضلعه = ١٠ سم «٣٦٣,٤ سم^{٢}»

١٠ أوجد لأقرب رقم عشرى واحد مساحة شكل منتظم ذو ١٢ ضلعًا وطول ضلعه ١٠ سم «١١١٩,٦ سم^{٢}»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مثلث أ ب ﺟ محيطه = ١٤ سم ومساحته = $٢\sqrt{١٤}$ سم^{٢} وطول أحد أضلاعه ٣ سم

فإن الفرق بين طولى الضلعين الأخرين = ... سم

(أ) ١ (ب) $٢\frac{١}{٤}$ (ﺟ) ٧ (د) ١١

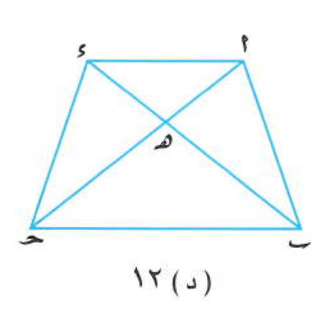
(٢) سداسى منتظم مساحته ($م_{١}$) مرسوم داخل دائرة مساحتها ($م_{٢}$) فإن $م_{٢} : م_{١}$ = ...

(أ) $\pi : \sqrt{٣}$ (ب) $٢\pi : \sqrt{٣}$ (ﺟ) $\pi : ٢\sqrt{٣}$ (د) $٢\pi : ٣\sqrt{٣}$

(٣) مضلعان منتظمان مرسومان داخل نفس الدائرة ، أحدهما مكون من ٦ أضلاع مساحته ($م_{١}$) والآخر مكون من ١٢ ضلعًا مساحته ($م_{٢}$) فإن $م_{١} : م_{٢}$ = ...

(أ) $١ : \sqrt{٢}$ (ب) ١ : ٢ (ﺟ) $\sqrt{٢} : ٣$ (د) $\sqrt{٣} : ٢$

(٤) فى الشكل المقابل :



إذا كان : أ ب ﺟ ء شكل رباعى فيه : $\overline{أﺟ} \cap \overline{بء} = \{ﻫ\}$

، مساحة (Δ أ ﻫ ء) = ٩ سم^{٢} ، مساحة (Δ أ ﻫ ب) = ١٨ سم^{٢}

، مساحة (Δ ﺟ ﻫ ب) = ١٦ سم^{٢}

فإن مساحة Δ ء ﻫ ﺟ = ... سم^{٢}

(أ) ٦ (ب) ٨ (ﺟ) ١٠ (د) ١٢

(٥) إذا كان : ا ب حـ ء هـ شكل خماسى منتظم طول ضلعه = ل سم وطول $\overline{ا حـ}$ = م سم

فإن : $\frac{\text{مساحة } (\Delta \text{ ا ب حـ})}{\text{مساحة } (\Delta \text{ ا حـ ء})}$ = ...

(أ) $\frac{ل}{م}$ (ب) $\frac{م}{ل}$ (جـ) $\frac{٢ ل}{٣ م}$ (د) $\frac{٣ ل}{٢ م}$

(٦) ا ب حـ ء شكل رباعى فيه : $\overline{ا حـ} \cap \overline{ب ء}$ = {هـ} إذا كانت مساحة (Δ ء هـ حـ) = مـ سم^{٢}

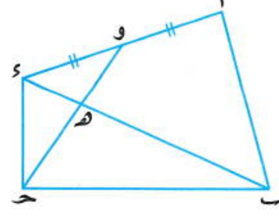
، مساحة (Δ ا هـ ء) = (مـ − ٢) سم^{٢} ، مساحة (Δ ا هـ ب) = (مـ + ١٠) سم^{٢}

، مساحة (Δ ب هـ حـ) = (مـ + ١٦) سم^{٢} فإن مساحة الشكل : ا ب حـ ء = ... سم^{٢}

(أ) ٨ (ب) ٣٢ (جـ) ٥٦ (د) ٨٨

---

٢ فى الشكل المقابل :



إذا كانت مساحة (Δ و هـ ء) = ٣ سم^{٢} ، مساحة (Δ ء هـ حـ) = ٨ سم^{٢}

، مساحة (Δ هـ ب حـ) = ٢٤ سم^{٢}

وكانت و منتصف $\overline{ا ء}$ أوجد مساحة الشكل ا ب حـ ء

«٥٦ سم^{٢}»

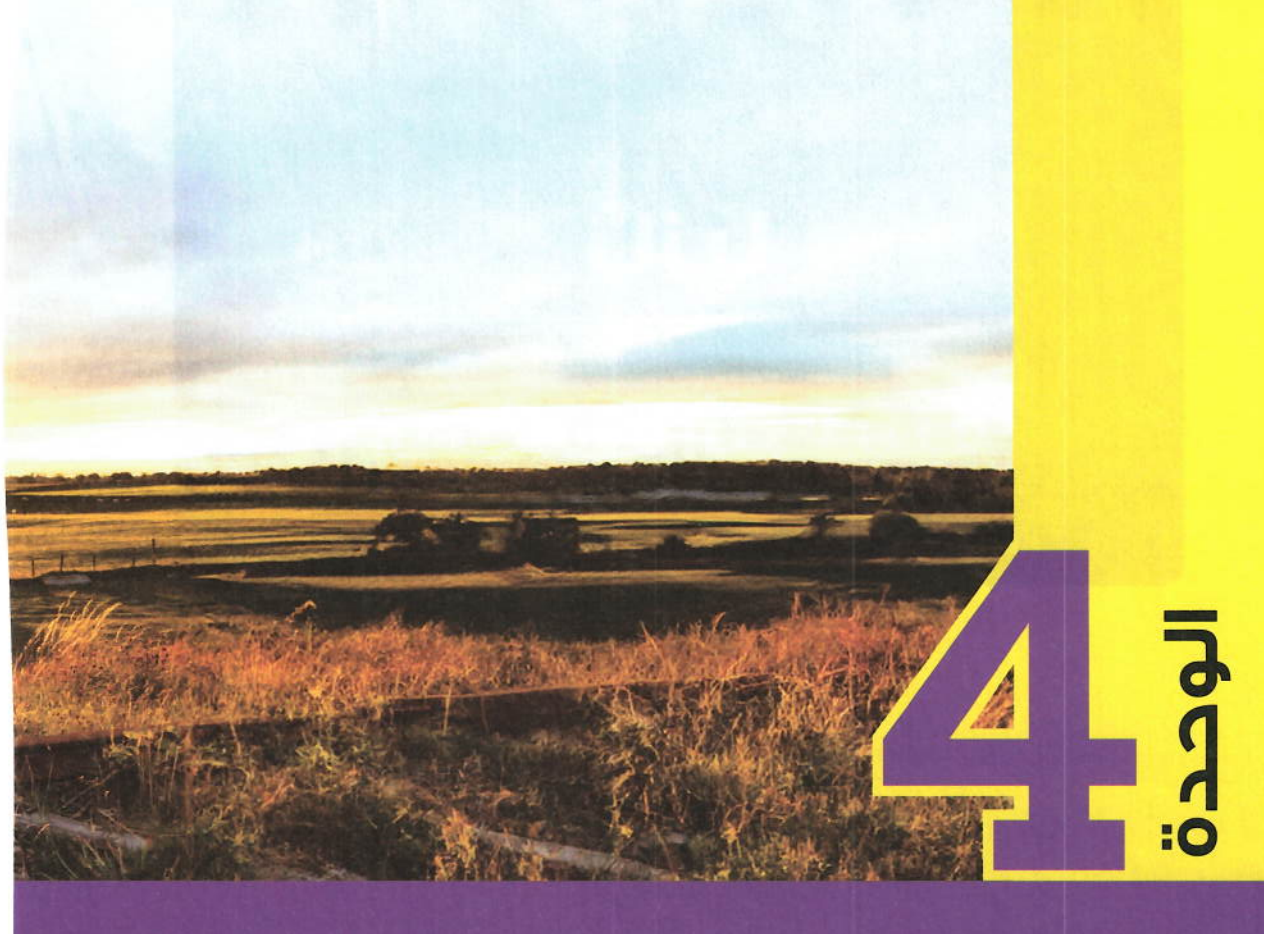


ثانيًا

الهندسة التحليلية

الوحدة 4 المتجهات.

الوحدة 5 الخط المستقيم.



الوحدة 4

المتجهات

دروس الوحدة

الدرس 1 الكميات القياسية والكميات المتجهة والقطعة المستقيمة الموجهة.

الدرس 2 المتجهات.

الدرس 3 العمليات على المتجهات.



نـواتــج الـتـعـلُّـم

فى نهاية هذه الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن :

- يتعرف الكمية القياسية والكمية المتجهة والقطعة المستقيمة الموجهة ، ويعبر عنها بدلالة طرفيها فى مستوى الإحداثيات.
- يتعرف متجه الموضع ويضعه فى الصورة القطبية.
- يوجد معيار المتجه ، والمتجه الصفرى.
- يتعرف ويحل تمارين على تكافؤ متجهين.
- يتعرف متجه الوحدة ويعبر عن المتجه بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين.
- يتعرف توازى متجهين وتعامد متجهين.
- يضرب متجهًا فى عدد حقيقى.
- يجمع متجهين باستخدام قاعدة المثلث (الإحداثيات - طريقة متوازى الأضلاع) - يطرح متجهين.

الدرس 1

الكميات القياسية والكميات المتجهة والقطعة المستقيمة الموجهة



الكميات القياسية والكميات المتجهة

* **تنقسم الكميات التى نتعامل معها فى حياتنا إلى نوعين :**

١ **الكمية القياسية :** هى كمية تتعين تمامًا بعدد حقيقى هو مقدار هذه الكمية.

ومن أمثلتها : الطول – الكتلة – الزمن – درجة الحرارة – الحجم – المسافة.

٢ **الكمية المتجهة :** هى كمية تتعين بعدد حقيقى هو مقدار هذه الكمية بالإضافة إلى الاتجاه.

ومن أمثلتها : القوة – الإزاحة – متجه السرعة.

ولتوضيح الفرق بين الكمية القياسية والكمية المتجهة نوضح على سبيل المثال الفرق بين المسافة ككمية قياسية والإزاحة ككمية متجهة :

١ **المسافة :** هى طول المسار الفعلى المقطوع أثناء الحركة من موضع إلى آخر.

وهى كمية قياسية لأنها تتعين تمامًا بمقدارها فقط وليس لها اتجاه.

٢ **الإزاحة :** هى أقصر بُعد بين نقطة البداية ونقطة النهاية ، وفى اتجاهٍ من نقطة البداية إلى نقطة النهاية ، أى أنها مسافة بين النقطتين فى اتجاه معين.

وهى كمية متجهة لأنها تتعين تمامًا بمقدارها بالإضافة إلى اتجاهها.

شمال
غرب
شرق
جنوب
أ
ب
حـ
١٢ متراً
٥ أمتار

فمثلًا فى الشكل المقابل :

إذا تحرك جسم من النقطة (أ) مسافة ١٢ مترًا شرقًا ثم غير اتجاهه وسار مسافة ٥ أمتار شمالاً ثم توقف عند النقطة (حـ)

فإن : المسافة التى قطعها الجسم أثناء الحركة = أب + ب حـ = ١٢ + ٥ = ١٧ مترًا

وتكون : الإزاحة الحادثة خلال الحركة هى طول $\overline{\text{أحـ}}$ وفى الاتجاه من أ إلى حـ

أى أن الإزاحة = $\sqrt{(١٢)^{٢} + (٥)^{٢}}$ = ١٣ مترًا فى اتجاه $\overrightarrow{\text{أحـ}}$

الاتجـــاه

كل شعاع فى المستوى يعين اتجاهًا معينًا.

فمثلاً فى الشكل المقابل :

- $\overrightarrow{\text{و أ}}$ يحدد اتجاه الشرق.
- $\overrightarrow{\text{و هـ}}$ يحدد اتجاه الشمال الشرقى.
- $\overrightarrow{\text{و ن}}$ يحدد اتجاه ٣٠° شمال الغرب.
- $\overrightarrow{\text{و م}}$ يحدد اتجاه ٣٥° شرق الجنوب.

الشمال
الشرق
الغرب
الجنوب
ب
ن
هـ
٣٠°
٤٥°
حـ
و
أ
٣٥°
م
ء

لاحظ أنه فى الشكل المقابل :

إذا كان : $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ متوازيين وكل منهما لا يوازى $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$

، هـ $\in \overline{\text{أ ب}}$ ، و $\in \overline{\text{حـ ء}}$ ، ع $\in \overline{\text{س ص}}$

فإن : • $\overrightarrow{\text{هـ أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ لهما نفس الاتجاه ويحملهما مستقيم واحد.

- $\overrightarrow{\text{هـ أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{و حـ}}$ لهما نفس الاتجاه ويحملهما مستقيمان متوازيان.
- $\overrightarrow{\text{هـ أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{هـ ب}}$ فى اتجاهين متضادين ويحملهما مستقيم واحد.
- $\overrightarrow{\text{هـ أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{و ء}}$ فى اتجاهين متضادين ويحملهما مستقيمان متوازيان.
- $\overrightarrow{\text{هـ أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ع س}}$ مختلفان فى الاتجاه ويحملهما مستقيمان غير متوازيين.

س
ع
ص
حـ
و
ء
أ
هـ
ب

وبصفة عامة :

* الشعاعان المتحدان فى الاتجاه أو المتضادان فى الاتجاه يحملهما مستقيم واحد أو مستقيمان متوازيان.
* الشعاعان المختلفان فى الاتجاه لا يمكن أن يحملهما مستقيم واحد أو مستقيمان متوازيان.

القطعة المستقيمة الموجهة

- إذا حددنا للقطعة المستقيمة $\overline{\text{أ ب}}$ نقطة بداية أ ونقطة نهاية ب فإنه يترتب على ذلك أن يصبح للقطعة المستقيمة اتجاه من أ إلى ب وتسمى قطعة مستقيمة موجهة ويرمز لها بالرمز $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ مع ملاحظة أن : $\overrightarrow{\text{أ ب}} \neq \overrightarrow{\text{ب أ}}$ لاختلافهما فى نقطتى البداية والنهاية مما يؤدى إلى تضادهما فى الاتجاه.

$\overrightarrow{\text{أ ب}}$
ب
أ
$\overrightarrow{\text{ب أ}}$
ب
أ

- **مما سبق نرى أن القطعة المستقيمة الموجهة تتحدد بثلاثة عناصر هى :**

[١] نقطة البداية. [٢] نقطة النهاية. [٣] الاتجاه من نقطة البداية إلى نقطة النهاية.

تعريف

١ **القطعة المستقيمة الموجهة :** هى قطعة مستقيمة لها نقطة بداية ونقطة نهاية واتجاه.

٢ **معيار القطعة المستقيمة الموجهة (معيار $\overleftarrow{أب}$) :** هو طول $\overline{أب}$ ويرمز له بالرمز $\|\overleftarrow{أب}\|$

ولاحظ أن $\|\overleftarrow{أب}\| = \|\overleftarrow{بأ}\| = أب$

٣ **تكافؤ قطعتين مستقيمتين موجهتين :** تتكافأ القطعتان المستقيمتان الموجهتان إذا كان :

(١) لهما نفس الطول (المعيار). (٢) لهما نفس الاتجاه.

مثال ١

في الشكل المقابل :

أبحد متوازى أضلاع تقاطع قطراه فى م ، هـ منتصف $\overline{أد}$

أولًا : اذكر القطع المستقيمة الموجهة (إن وجدت) والتى تكافئ :

١ $\overleftarrow{أب}$ ٢ $\overleftarrow{أد}$ ٣ $\overleftarrow{مب}$

٤ $\overleftarrow{أم}$ ٥ $\overleftarrow{أهـ}$ ٦ $\overleftarrow{مهـ}$

ثانيًا : بيِّن لماذا تكون القطع المستقيمة الموجهة التالية غير متكافئة :

١ $\overleftarrow{دم}$ ، $\overleftarrow{دب}$ ٢ $\overleftarrow{أد}$ ، $\overleftarrow{حب}$ ٣ $\overleftarrow{أم}$ ، $\overleftarrow{حم}$

الحل

أولًا : ١ $\overleftarrow{دح}$ ٢ $\overleftarrow{حب}$ ٣ $\overleftarrow{دم}$

٤ $\overleftarrow{مح}$ ٥ $\overleftarrow{هـد}$ ٦ لا يوجد.

ثانيًا : ١ لأن : $\|\overleftarrow{دم}\| \neq \|\overleftarrow{دب}\|$ ٢ لأن : $\overleftarrow{أد}$ ، $\overleftarrow{حب}$ متضادتان فى الاتجاه.

٣ لأن : $\overleftarrow{أم}$ ، $\overleftarrow{حم}$ متضادتان فى الاتجاه.

حاول بنفسك

في الشكل المقابل :

إذا كانت : $\overline{أد} \cap \overline{بح} = \{م\}$ ، م أ = م د ، م ب = م ح

فأكمل ما يأتى بوضع «تكافئ» أو «لا تكافئ» مع ذكر السبب :

١ $\overleftarrow{أم}$ .... $\overleftarrow{مد}$ لأنهما .... ٢ $\overleftarrow{مب}$ .... $\overleftarrow{مح}$ لأنهما ....

٣ $\overleftarrow{أب}$ .... $\overleftarrow{حد}$ لأنهما .... ٤ $\overleftarrow{بم}$ .... $\overleftarrow{بح}$ لأنهما ....

ملاحظات

١ $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{حـ ء}$ لا يمكن أن تتكافئا إلا إذا كان يحملهما مستقيمان متوازيان أو مستقيم واحد كما بالشكلين الآتيين :



٢ إذا كانت : أ ، ب ، حـ ، ء لا تقع على استقامة واحدة

وكانت : $\overleftarrow{أب}$ تكافئ $\overleftarrow{ء حـ}$

فإن : الشكل أ ب حـ ء متوازى أضلاع.

٣ من نقطة فى المستوى ولتكن حـ لا يمكن رسم

إلا قطعة مستقيمة موجهة وحيدة $\overleftarrow{حـ ء}$

تكافئ قطعة مستقيمة أخرى $\overleftarrow{أب}$ فى نفس المستوى.

٤ يوجد عدد لا نهائى من القطع المستقيمة الموجهة التى يمكن رسمها فى المستوى وكل منها تكافئ قطعة مستقيمة موجهة أخرى.

مثال ٢

فى مستوى إحداثى متعامد عيِّن النقط : أ (−٢ ، ١) ، ب (١ ، ٣) ، حـ (٢ ، ٢) ، ء (١ ، −١)

ثم ارسم $\overleftarrow{حـ هـ}$ ، $\overleftarrow{ء ل}$ كل منهما تكافئ $\overleftarrow{أب}$ ، أوجد إحداثيى كل من : هـ ، ل

الحل

لرسم $\overleftarrow{حـ هـ}$ تكافئ $\overleftarrow{أب}$ يجب أن تكون $\overleftarrow{حـ هـ}$ ، $\overleftarrow{أب}$

لهما نفس الاتجاه ونفس المعيار.

* نرسم $\overleftarrow{حـ هـ}$ // $\overleftarrow{أب}$ (ميل $\overleftrightarrow{حـ هـ}$ = ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{٢}{٣}$)

* نحدد طول $\overline{حـ هـ}$ = طول $\overline{أب}$ باستخدام الفرجار

أو بحساب عدد المربعات الأفقية والرأسية فنجد أن : هـ = (٥ ، ٤)

* وبالمثل : نرسم $\overleftarrow{ء ل}$ نجد أن : ل = (٤ ، ١)



حل آخر : ∵ الانتقال يحافظ على التوازى وأطوال القطع المستقيمة.

∴ النقطة حـ هى صورة أ بالانتقال [(٢ ، ٢) − (−٢ ، ١)] = (٤ ، ١)

ولرسم $\overleftarrow{حـ هـ}$ تكافئ $\overleftarrow{أب}$ نجد أن $\overleftarrow{حـ هـ}$ هى صورة $\overleftarrow{أب}$ بالانتقال (٤ ، ١)

∴ النقطة هـ هى صورة النقطة ب بالانتقال (٤ ، ١) ∴ النقطة هـ = (١ + ٤ ، ٣ + ١) = (٥ ، ٤)

وبالمثل يمكن إيجاد إحداثيى النقطة ل

تمارين 1

على الكميات القياسية والكميات المتجهة والقطعة المستقيمة الموجهة

من أسئلة الكتاب المدرسى ● تذكر ● فهم ○ تطبيق ● مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) أى مما يأتى يمثل كمية متجهة ؟

(أ) الزمن. (ب) درجة الحرارة. (جـ) الإزاحة. (د) الكتلة.

(٢) إذا كان : أ ب حـ ء متوازى أضلاع تقاطع قطراه فى م فإن :

أولًا : $\overrightarrow{\text{حء}}$ تكافئ ....

(أ) $\overrightarrow{\text{أب}}$ (ب) $\overrightarrow{\text{بأ}}$ (جـ) $\overrightarrow{\text{حأ}}$ (د) $\overrightarrow{\text{أء}}$

ثانيًا : $\overrightarrow{\text{مء}}$ تكافئ ....

(أ) $\overrightarrow{\text{ءم}}$ (ب) $\overrightarrow{\text{مب}}$ (جـ) $\overrightarrow{\text{بم}}$ (د) $\overrightarrow{\text{أم}}$

(٣) **فى الشكل المقابل :**

إذا كان : أ ب حـ ء ، هـ ب حـ و متوازيى أضلاع

فإن : $\overrightarrow{\text{أء}}$ تكافئ كلًا من ....

(أ) $\overrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overrightarrow{\text{حء}}$ (ب) $\overrightarrow{\text{بح}}$ ، $\overrightarrow{\text{حو}}$

(جـ) $\overrightarrow{\text{بح}}$ ، $\overrightarrow{\text{هو}}$ (د) $\overrightarrow{\text{بح}}$ ، $\overrightarrow{\text{بأ}}$

(٤) **فى الشكل المقابل :**

أ ب حـ ء هـ و سداسى منتظم ، مركزه النقطة م فإن :

أولًا : $\overrightarrow{\text{أب}}$ تكافئ كلًا من القطع المستقيمة الموجهة الآتية ما عدا ....

(أ) $\overrightarrow{\text{هء}}$ (ب) $\overrightarrow{\text{بح}}$ (جـ) $\overrightarrow{\text{مح}}$ (د) $\overrightarrow{\text{وم}}$

ثانيًا : $\overrightarrow{\text{مء}}$ تكافئ ....

(أ) $\overrightarrow{\text{أم}}$ (ب) $\overrightarrow{\text{بح}}$ (جـ) $\overrightarrow{\text{هو}}$ (د) $\overrightarrow{\text{حب}}$

(٥) أ ب حـ ء مربع تقاطع قطراه فى م ، فإن أزواج القطع المستقيمة الموجهة الآتية متكافئة ما عدا ....

(أ) $\overrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overrightarrow{\text{ءح}}$ (ب) $\overrightarrow{\text{أم}}$ ، $\overrightarrow{\text{مح}}$ (جـ) $\overrightarrow{\text{بح}}$ ، $\overrightarrow{\text{أء}}$ (د) $\overrightarrow{\text{أم}}$ ، $\overrightarrow{\text{مء}}$

(٦) إذا كان أ ب حـ ء هـ و شكل سداسى منتظم مركزه الهندسى (ن) أى من القطع المستقيمة الموجهة التالية غير متكافئة ؟

(أ) $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{ون}$ (ب) $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{هـء}$ (جـ) $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{نحـ}$ (د) $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{نء}$

(٧) إذا كان : $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{أحـ}$ فإن : ....

(أ) ب منتصف $\overline{أحـ}$ (ب) حـ منتصف $\overline{أب}$

(جـ) ب تنطبق على حـ (د) أ تنطبق على حـ

(٨) إذا كان حـ منتصف $\overline{أب}$ فأى مما يأتى يكون صحيح ؟

(١) $\overrightarrow{أحـ} = \overrightarrow{بحـ}$ (٢) $\|\overrightarrow{أحـ}\| = \|\overrightarrow{بحـ}\|$ (٣) $\overrightarrow{أحـ} = \overrightarrow{حـب}$

(أ) (١) فقط. (ب) (١) ، (٢) فقط. (جـ) (٢) ، (٣) فقط. (د) (١) ، (٢) ، (٣)

(٩) فى الشكل المقابل :

إذا كان : $\overline{مأ}$ ، $\overline{مب}$ نصفى قطرين فى دائرة (م)

فأى مما يأتى صحيح ؟

(١) $\overrightarrow{مأ} = \overrightarrow{مب}$ (٢) $\|\overrightarrow{مأ}\| = \|\overrightarrow{مب}\|$ (٣) $\overrightarrow{مأ} = -\overrightarrow{بم}$

(أ) (١) فقط. (ب) (٢) فقط. (جـ) (١) ، (٢) فقط. (د) (٢) ، (٣) فقط.

(١٠) إذا تحرك جسم من نقطة أ إلى نقطة ب فإن المسافة التى قطعها تكون ....

(أ) $\|\overrightarrow{أب}\|$ (ب) أقل من $\|\overrightarrow{أب}\|$

(جـ) أكبر من أو يساوى $\|\overrightarrow{أب}\|$ (د) $\overrightarrow{أب}$

(١١) إذا تحرك جسم من نقطة أ إلى نقطة ب ثم إلى نقطة حـ فإن ....

(أ) المسافة التى قطعها الجسم تساوى $\|\overrightarrow{أحـ}\|$

(ب) المسافة التى قطعها الجسم تساوى $\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{بحـ}$

(جـ) الإزاحة التى قطعها الجسم تساوى $\|\overrightarrow{أب}\| + \|\overrightarrow{بحـ}\|$

(د) الإزاحة التى قطعها الجسم تساوى $\overrightarrow{أحـ}$

(١٢) فى الشكل المقابل :

إذا تحرك جسم من النقطة أ شرقًا إلى النقطة حـ

ثم عاد غربًا إلى النقطة ب فإن :

أولًا : المسافة التى قطعها الجسم = ... سم.

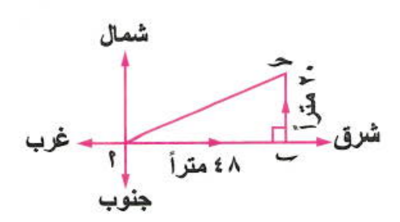
(أ) ٦ (ب) ٩ (جـ) ١٥ (د) ٢١

ثانيًا : الإزاحة الحادثة = ...

(أ) ٩ سم فى اتجاه أب   (ب) ٦ سم فى اتجاه حـب

(جـ) ٩ سم فى اتجاه بأ   (د) ٢١ سم فى اتجاه أب

(١٣) فى الشكل المقابل :



إذا تحرك جسم من النقطة أ مسافة ٤٨ مترًا شرقًا ثم غير اتجاهه وسار مسافة ٢٠ مترًا شمالاً ثم توقف عند النقطة حـ فإن :

أولًا : المسافة التى قطعها الجسم = ... مترًا

(أ) ٥٢   (ب) ٦٨   (جـ) ٤٨   (د) ٢٨

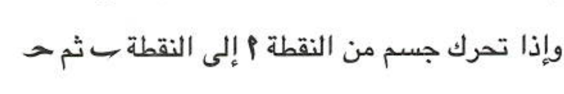
ثانيًا : الإزاحة الحادثة = ...

(أ) ٦٨ متر فى اتجاه أحـ   (ب) ٦٨ متر فى اتجاه حـأ

(جـ) ٥٢ متر فى اتجاه أحـ   (د) ٥٢ متر فى اتجاه حـأ

(١٤) فى الشكل المقابل :

إذا كانت كل من : ءحـ ، أب عمودية على بحـ



وإذا تحرك جسم من النقطة أ إلى النقطة ب ثم حـ

وتوقف عند النقطة ء فإن :

أولًا : المسافة التى قطعها الجسم = ... سم

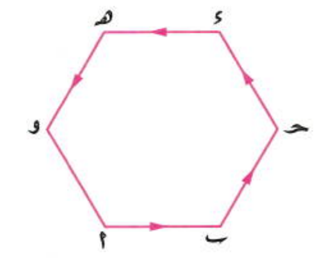
(أ) ٢٥   (ب) ٣٥   (جـ) ٢٩   (د) ٢٠

ثانيًا : الإزاحة الحادثة = ...

(أ) ٣٥ سم فى اتجاه أء   (ب) ٣٥ سم فى اتجاه ءأ

(جـ) ٢٥ سم فى اتجاه أء   (د) ٢٥ سم فى اتجاه ءأ

(١٥) فى الشكل المقابل :



أبحـءهـو شكل سداسى منتظم طول ضلعه ٨ أمتار

، إذا تحرك جسم من النقطة أ إلى النقطة ب

ثم حـ ثم ء ثم هـ وتوقف عند النقطة و فإن :

أولًا : المسافة التى قطعها الجسم = ... متر.

(أ) ٨   (ب) ٤٨   (جـ) ٣٢   (د) ٤٠

ثانيًا : الإزاحة الحادثة = ...

(أ) ٨ متر فى اتجاه أو　　　　(ب) ٤٠ متر فى اتجاه وأ

(جـ) ٨ متر فى اتجاه وأ　　　　(د) ٤٠ متر فى اتجاه أو

(١٦) سيارة قطعت ٢٠ متر فى اتجاه الشمال ثم قطعت نفس المسافة فى اتجاه الغرب فإن إزاحة السيارة هى ....

(أ) ٤٠ متر فى اتجاه الغرب.　　　　(ب) ٤٠ متر فى اتجاه الشمال الغربى.

(جـ) ٢٠ $\sqrt{٢}$ متر فى اتجاه الشمال الغربى.　　　　(د) ٢٠ $\sqrt{٢}$ متر فى اتجاه الجنوب الغربى.

(١٧) فى المستوى الإحداثى المتعامد إذا كانت : أ (١ ، ٣) ، ب (-٣ ، ١) ، حـ (٠ ، ٤)

وكان : أب يكافئ حـ ء　فإن : ء = ...

(أ) (-٤ ، ٢)　　(ب) (٤ ، -٢)　　(جـ) (-٣ ، ١)　　(د) (-٤ ، -٢)

(١٨) **فى الشكل المقابل :**

حديقة مربعة الشكل مساحتها ٩٠٠ متر مربع تم عمل مسارات مستقيمة للترجل بها حتى لا تؤذى النباتات فقسمت تلك المسارات الحديقة إلى ٩ مربعات متطابقة كما بالشكل فإذا تحرك شخص من نقطة أ إلى ب متخذًا المسار الموضح بالشكل فإن :

أولًا : المسافة المقطوعة = ... متر.

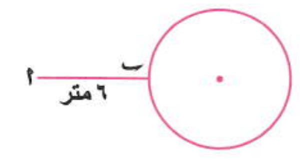
(أ) ٣٠　　(ب) ٥٠　　(جـ) ٦٠　　(د) ٩٠

ثانيًا : الإزاحة الحادثة = ...

(أ) ٦٠ متر فى اتجاه أب　　　　(ب) ٣٠ متر فى اتجاه أب

(جـ) ٣٠ $\sqrt{٢}$ متر فى اتجاه أب　　　　(د) ٦٠ متر فى اتجاه ب أ

(١٩) **فى الشكل المقابل :**



تحرك رجل من نقطة أ إلى نقطة ب ثم تحرك على مسار دائرى طول نصف قطره ٧ متر فإن أقصى معيار إزاحة للرجل = ... متر.

(أ) ١١　　(ب) ٢٠　　(جـ) ٣٥　　(د) ٥٠

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ في الشكل المقابل :

أ ب ح ء مستطيل تقاطع قطراه في م ، هـ $\in \overline{\text{أء}}$

بيِّن ما إذا كان الشعاعان في كل مما يأتي متحدين في الاتجاه أو متضادين في الاتجاه أو مختلفي الاتجاه :

(١) $\overleftarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftarrow{\text{حء}}$	(٢) $\overleftarrow{\text{أهـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ءهـ}}$	(٣) $\overleftarrow{\text{أم}}$ ، $\overleftarrow{\text{أح}}$
(٤) $\overleftarrow{\text{بم}}$ ، $\overleftarrow{\text{مح}}$	(٥) $\overleftarrow{\text{ءهـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{حب}}$	(٦) $\overleftarrow{\text{بم}}$ ، $\overleftarrow{\text{مء}}$

٢ في الشكل المقابل :

أ ب ح ء معين فيه : $\overline{\text{أح}} \cap \overline{\text{بء}} = \{\text{م}\}$

اكتب القطع المستقيمة الموجهة والتي تكافئ كلًا مما يأتي :

(١) $\overleftarrow{\text{مأ}}$	(٢) $\overleftarrow{\text{مء}}$
(٣) $\overleftarrow{\text{أء}}$	(٤) $\overleftarrow{\text{بأ}}$


٣ في الشكل المقابل :

أ ب ح ء متوازي أضلاع فيه : $\overline{\text{أح}} \cap \overline{\text{بء}} = \{\text{م}\}$

، هـ منتصف $\overline{\text{أب}}$ ، و منتصف $\overline{\text{بح}}$

أولًا : اذكر القطع المستقيمة الموجهة (إن وجدت) والتي تكافئ :

(١) $\overleftarrow{\text{بهـ}}$	(٢) $\overleftarrow{\text{مب}}$	(٣) $\overleftarrow{\text{مهـ}}$
(٤) $\overleftarrow{\text{أح}}$	(٥) $\overleftarrow{\text{أب}}$	(٦) $\overleftarrow{\text{بح}}$

ثانيًا : بيِّن لماذا تكون القطع المستقيمة الموجهة التالية غير متكافئة :

(١) $\overleftarrow{\text{مهـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{بو}}$	(٢) $\overleftarrow{\text{أح}}$ ، $\overleftarrow{\text{مح}}$
(٣) $\overleftarrow{\text{وب}}$ ، $\overleftarrow{\text{وح}}$	(٤) $\overleftarrow{\text{بأ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ءح}}$

٤ في الشكل المقابل :

أ ب ح مثلث فيه : س منتصف $\overline{\text{أب}}$

، ل منتصف $\overline{\text{أح}}$ ، س ص ع ل مستطيل

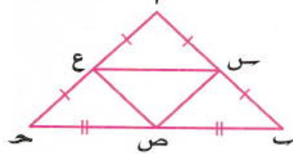
اكتب القطع المستقيمة الموجهة (إن وجدت) والتي تكافئ كلًا مما يأتي :


(١) $\overleftarrow{\text{سص}}$ (٢) $\overleftarrow{\text{سل}}$


(٣) $\overleftarrow{\text{أل}}$

(٤) $\overleftarrow{\text{بس}}$ (٥) $\overleftarrow{\text{بص}}$

٥ **فى الشكل المقابل :**



أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = أ حـ

، س ، ص ، ع منتصفات $\overline{أب}$ ، $\overline{ب حـ}$ ، $\overline{حـ أ}$ على الترتيب.

أولًا : أى العبارات التالية صحيحة :

(١) ‖ $\overleftarrow{س ص}$ ‖ = ‖ $\overleftarrow{ع ص}$ ‖ (٢) $\overleftarrow{س ص}$ تكافئ $\overleftarrow{ع ص}$ (٣) $\overleftarrow{ب ص}$ تكافئ $\overleftarrow{ع س}$

ثانيًا : اكتب القطع المستقيمة الموجهة (إن وجدت) والتى تكافئ كلاً من :

(١) $\overleftarrow{ب س}$ (٢) $\overleftarrow{أ ع}$ (٣) $\overleftarrow{س ع}$

(٤) $\overleftarrow{حـ ص}$ (٥) $\overleftarrow{س ص}$ (٦) $\overleftarrow{ع ص}$

---

٦ **فى مستوى إحداثى متعامد :** إذا كانت أ (٢ ، ٣) ، ب (−٣ ، ١) ، حـ (٥ ، −١)

(١) ارسم $\overleftarrow{حـ ء}$ تكافئ $\overleftarrow{أ ب}$ وعين إحداثيى النقطة ء

(٢) عين إحداثيى النقطة م منتصف $\overline{ب حـ}$ ثم حدد القطع المستقيمة الموجهة التى تكافئ :

(أ) $\overleftarrow{ب م}$ (ب) $\overleftarrow{أ م}$ (جـ) $\overleftarrow{أ حـ}$ (د) $\overleftarrow{ء ب}$

(٣) هل الشكل أ حـ ء ب متوازى أضلاع ؟ فسر إجابتك.

---

٧ **فى مستوى إحداثى متعامد :** إذا كانت أ (٤ ، −٣) ، ب (٤ ، ٤) ، حـ (−٣ ، −١) وكانت كل من القطع المستقيمة الموجهة $\overleftarrow{ب أ}$ ، $\overleftarrow{حـ ء}$ ، $\overleftarrow{و م}$ ، $\overleftarrow{ن و}$ متكافئة حيث و نقطة الأصل. **أوجد إحداثيى كل من : ء ، م ، ن**

---

٨ **فى مستوى إحداثى متعامد :**

إذا كانت أ (٣ ، −٢) ، ب (٦ ، ٢) ، حـ (١ ، ٣) ، ء (٤ ، ٧)

(١) **أوجد :** ‖ $\overleftarrow{أ ب}$ ‖ ، ‖ $\overleftarrow{حـ ء}$ ‖

(٢) **أثبت أن :** $\overleftarrow{أ ب}$ تكافئ $\overleftarrow{حـ ء}$

(٣) إذا كانت القطع المستقيمة الموجهة $\overleftarrow{ب حـ}$ ، $\overleftarrow{أ م}$ ، $\overleftarrow{ن ء}$ ، $\overleftarrow{و ر}$ متكافئة.

أوجد إحداثيى كل من : م ، ن ، ر حيث و نقطة الأصل.

---

٩ **أنشئ نظامًا للإحداثيات المتعامدة فى المستوى حيث (و) نقطة الأصل وعيِّن عليه النقط :**

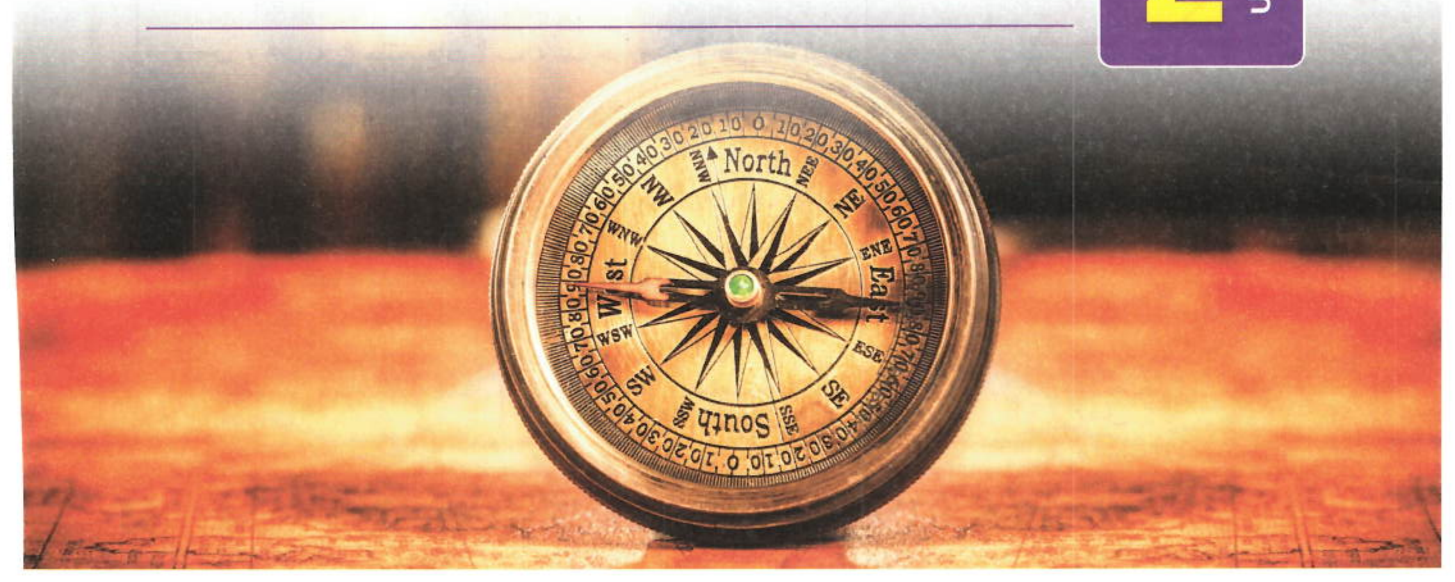
أ (−٢ ، ٣) ، ب (١ ، ٠) ، حـ (٢ ، −٣) ، ن (−٣ ، ١) ، ط (٤ ، ١)

ثم ارسم القطع المستقيمة الموجهة : $\overleftarrow{حـ ء}$ ، $\overleftarrow{و هـ}$ ، $\overleftarrow{ن ل}$ ، $\overleftarrow{ق ط}$ كل منها تكافئ $\overleftarrow{أ ب}$

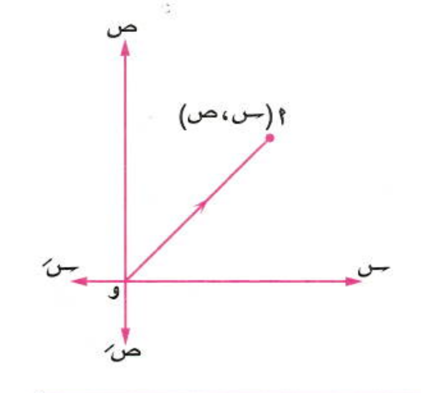
وعيِّن من الرسم إحداثيات : ء ، هـ ، ل ، ق

الدرس 2

المتجهات



متجه الموضع



نعلم أن كل نقطة أ فى المستوى الإحداثى المتعامـد تُعين بزوج مرتب وحيد (س ، ص) ولذلك يكون لها موضع وحيد بالنسبة لنقطة الأصل و يتحدد بالقطعة المستقيمة الموجهة $\overrightarrow{و أ}$ التى تُسمى متجه الموضع لنقطة أ

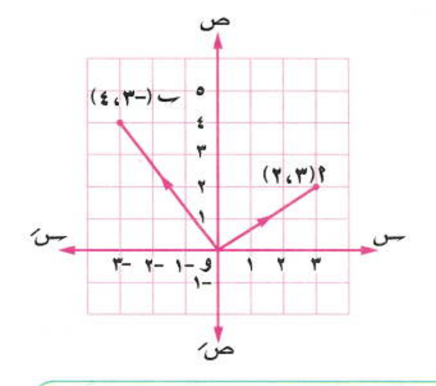
ويُكتب : $\overrightarrow{و أ}$ = (س ، ص)

تعريف

متجه الموضع لنقطة معلومة أ بالنسبة لنقطة الأصل و :

هو القطعة المستقيمة الموجهة $\overrightarrow{و أ}$ التى بدايتها نقطة الأصل و ونهايتها النقطة المعلومة أ

فمثلًا فى الشكل المقابل



* $\overrightarrow{و أ}$ هو متجه الموضع لنقطة أ بالنسبة لنقطة الأصل و

ويُكتب : $\overrightarrow{و أ}$ = (٣ ، ٢)

* $\overrightarrow{و ب}$ هو متجه الموضع لنقطة ب بالنسبة لنقطة الأصل و

ويُكتب : $\overrightarrow{و ب}$ = (-٣ ، ٤)

ملاحظة

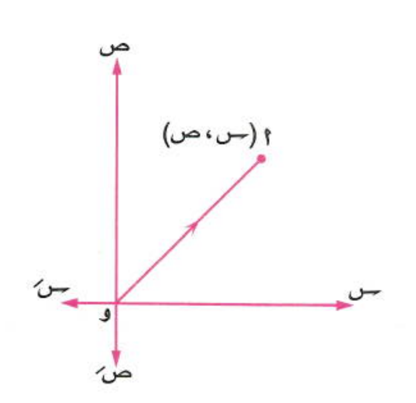
نظرًا لأن كل متجهات الموضع لها نفس نقطة البداية «و» لذلك نرمز لمتجه الموضع «$\overrightarrow{و أ}$» بالرمز «$\overrightarrow{أ}$»

ففى الشكل السابق : نكتب : $\overrightarrow{أ}$ = (٣ ، ٢) ، $\overrightarrow{ب}$ = (-٣ ، ٤)

معيار المتجه

هو طول القطعة المستقيمة التى تمثل المتجه.

فإذا كان : $\overrightarrow{أ} = (س ، ص)$ فإن : $\|\overrightarrow{أ}\| = $ طول $\overline{و أ}$



وإذا استخدمنا قانون البعد بين نقطتين لإيجاد طول $\overline{و أ}$

فإن : طول $\overline{و أ} = \sqrt{(س - ٠)^٢ + (ص - ٠)^٢}$

$\therefore \|\overrightarrow{أ}\| = \sqrt{س^٢ + ص^٢}$

فمثلًا

- إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (٣ ، -٤)$ فإن : $\|\overrightarrow{أ}\| = \sqrt{(٣)^٢ + (-٤)^٢} = ٥$ وحدة طول.
- إذا كان : $\overrightarrow{ب} = (-٣ ، ٣\sqrt{٣})$ فإن : $\|\overrightarrow{ب}\| = \sqrt{(-٣)^٢ + (٣\sqrt{٣})^٢} = ٦$ وحدة طول.
- إذا كان : $\overrightarrow{حـ} = (-٣ ، ك)$ وكان $\|\overrightarrow{حـ}\| = ٣\sqrt{٢}$ فإن : $\sqrt{(-٣)^٢ + ك^٢} = ٣\sqrt{٢}$

$\therefore ٩ + ك^٢ = ١٨$ $\therefore ك^٢ = ٩$ $\therefore ك = \pm ٣$

متجه الوحدة

هو متجه معياره الواحد الصحيح.

فمثلًا $\overrightarrow{أ} = \left(\frac{٣}{٥} ، \frac{٤}{٥}\right)$ متجه وحدة لأن : $\|\overrightarrow{أ}\| = \sqrt{\left(\frac{٣}{٥}\right)^٢ + \left(\frac{٤}{٥}\right)^٢} = ١$ وحدة طول.

المتجه الصفرى

هو متجه معياره يساوى الصفر ويرمز له بالرمز $\overrightarrow{و}$ أو $\overrightarrow{٠}$ حيث $\overrightarrow{و} = (٠ ، ٠)$ وهو متجه غير معين الاتجاه.

تحقق من فهمك

١) إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (٦ ، -٨)$ فأوجد : $\|\overrightarrow{أ}\|$

٢) هل $\overrightarrow{أ} = \left(\frac{-\sqrt{٣}}{٢} ، \frac{١}{٢}\right)$ متجه وحدة أم لا ؟ ولماذا ؟

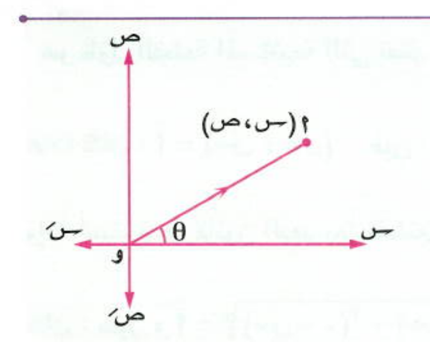
٣) إذا كان : $(ك ، \frac{-٣}{٥})$ متجه وحدة فأوجد قيمة : ك

الصورة القطبية لمتجه الموضع

إذا كان متجه الموضع $\overrightarrow{وأ}$ يصنع زاوية قياسها θ

مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فإن :

الصورة القطبية لمتجه الموضع $\overrightarrow{وأ} = (\|\overrightarrow{وأ}\| ، \theta)$

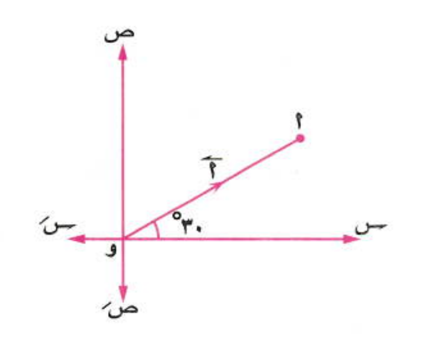


فمثلًا إذا كان $\overrightarrow{وأ}$ يصنع زاوية قياسها 30° مع

الاتجاه الموجب لمحور السينات وكان $\|\overrightarrow{أ}\| = 6$ وحدة طول

فإن : الصورة القطبية للمتجه $\overrightarrow{وأ} = (6 ، 30^\circ)$

أى أن $\overrightarrow{وأ} = (6 ، \frac{\pi}{6})$



ملاحظة

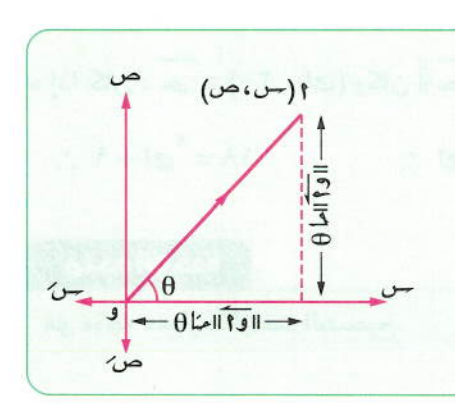
إذا كان : متجه موضع النقطة أ (س ، ص)

على الصورة القطبية $\overrightarrow{وأ} = (\|\overrightarrow{وأ}\| ، \theta)$ فإن :

$س = \|\overrightarrow{وأ}\|$ جتا θ ، $ص = \|\overrightarrow{وأ}\|$ جا θ حيث ظا $\theta = \frac{ص}{س}$

وتكون الصورة الإحداثية للمتجه $\overrightarrow{وأ}$ هى :

$\overrightarrow{وأ} = (\|\overrightarrow{وأ}\|$ جتا θ ، $\|\overrightarrow{وأ}\|$ جا $\theta)$



مثال ١

إذا كان $\overrightarrow{وأ}$ متجه موضع النقطة أ بالنسبة لنقطة الأصل

فأوجد إحداثيي النقطة أ فى كل من الحالات الآتية :

١ $\overrightarrow{وأ} = (10\sqrt{3} ، 60^\circ)$ ٢ $\overrightarrow{وأ} = (6\sqrt{2} ، 135^\circ)$ ٣ $\overrightarrow{وأ} = (8 ، \frac{4\pi}{3})$

الحل

١ $س = 10\sqrt{3}$ جتا $60^\circ = 5\sqrt{3}$ ، $ص = 10\sqrt{3}$ جا $60^\circ = 15$ $\therefore أ = (5\sqrt{3} ، 15)$

٢ $س = 6\sqrt{2}$ جتا $135^\circ = -6$ ، $ص = 6\sqrt{2}$ جا $135^\circ = 6$ $\therefore أ = (-6 ، 6)$

٣ $س = 8$ جتا $\frac{4\pi}{3} = -4$ ، $ص = 8$ جا $\frac{4\pi}{3} = -4\sqrt{3}$ $\therefore أ = (-4 ، -4\sqrt{3})$

مثال ٢

إذا كان $\overrightarrow{و أ}$ متجه موضع النقطة أ بالنسبة لنقطة الأصل

أوجد الصورة القطبية للمتجه $\overrightarrow{و أ}$ فى كل من الحالتين الآتيتين :

١ $\overrightarrow{و أ} = (٤ ، ٤\sqrt{٣})$

٢ $\overrightarrow{و أ} = (٥\sqrt{٣} ، -٥)$

الحل

الربع الثانى	الربع الأول
س < ٠ ، ص > ٠	س > ٠ ، ص > ٠
(١٨٠° - θ)	θ
الربع الثالث	**الربع الرابع**
(١٨٠° + θ)	(٣٦٠° - θ)
س < ٠ ، ص < ٠	س > ٠ ، ص < ٠

١ ∵ $\overrightarrow{و أ} = (٤ ، ٤\sqrt{٣})$

∴ $\|\overrightarrow{و أ}\| = \sqrt{(٤)^٢ + (٤\sqrt{٣})^٢}$

= ٨ وحدة طول.

، $ظا θ = \frac{٤\sqrt{٣}}{٤} = \sqrt{٣}$

، ∵ قياس الزاوية الحادة التى ظلها $\sqrt{٣}$

هى : $ظا^{-١} (\sqrt{٣}) = ٦٠°$

، ∵ س > ٠ ، ص > ٠ ∴ θ = ٦٠° ∴ $\overrightarrow{و أ} = (٨ ، ٦٠°)$

٢ ∵ $\overrightarrow{و أ} = (٥\sqrt{٣} ، -٥)$ ∴ $\|\overrightarrow{و أ}\| = \sqrt{(٥\sqrt{٣})^٢ + (-٥)^٢} = ١٠$ وحدة طول.

، $ظا θ = \frac{-٥}{٥\sqrt{٣}} = \frac{-١}{\sqrt{٣}}$

، ∵ قياس الزاوية الحادة التى ظلها $\left(\frac{١}{\sqrt{٣}}\right)$ هى $ظا^{-١} \left(\frac{١}{\sqrt{٣}}\right) = ٣٠°$

، ∵ س > ٠ ، ص < ٠ ∴ θ = ٣٦٠° - ٣٠° = ٣٣٠° ∴ $\overrightarrow{و أ} = (١٠ ، ٣٣٠°)$

حاول بنفسك

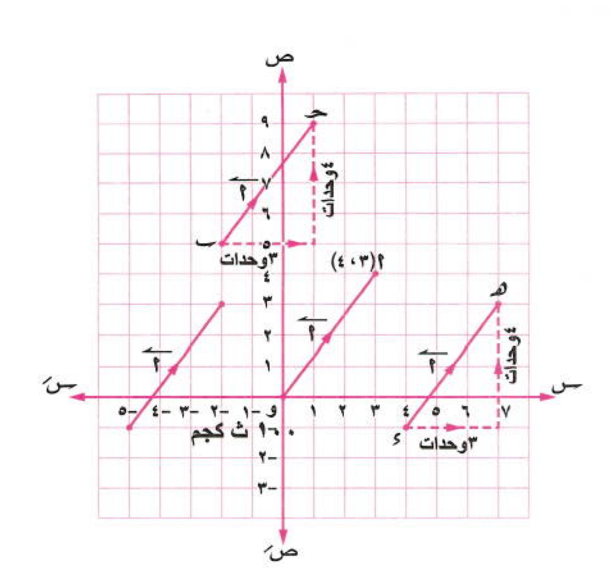
١ إذا كان متجه الموضع $\overrightarrow{و أ} = (٥\sqrt{٢} ، ٢٢٥°)$ فأوجد إحداثيى النقطة أ

٢ اكتب بالصورة القطبية متجه الموضع $\overrightarrow{و أ} = (-١٢\sqrt{٣} ، ١٢)$

المتجهات المتكافئة

كل متجه $\overrightarrow{أ}$ = (س ، ص) يمكن تمثيله هندسيًا بالعديد من القطع المستقيمة الموجهة المتكافئة والتى كل منها تكافئ متجه الموضع للنقطة أ = (س ، ص)

ففى الشكل المقابل



$\overrightarrow{أ}$ = (٣ ، ٤) هو متجه الموضع للنقطة أ

، $\overrightarrow{ب ح} = \overrightarrow{ء هـ} = \dots = \overrightarrow{و أ}$

لأن $\|\overrightarrow{ب ح}\| = \|\overrightarrow{ء هـ}\| = \dots = \|\overrightarrow{و أ}\|$

$= \sqrt{٣^٢ + ٤^٢}$ = ٥ وحدة طول

، $\overrightarrow{ب ح}$ ، $\overrightarrow{ء هـ}$ ، … ، $\overrightarrow{و أ}$ فى نفس الاتجاه

ولذلك يعتبر كلٌ من :

$\overrightarrow{ب ح}$ ، $\overrightarrow{ء هـ}$ ، … تمثيلًا هندسيًا للمتجه $\overrightarrow{أ}$

أى أن $\overrightarrow{ب ح} = \overrightarrow{ء هـ} = \dots = \overrightarrow{و أ}$ = (٣ ، ٤)

- **نلاحظ مما سبق :** ارتباط المتجهات بالأزواج المرتبة أى بعناصر ح × ح أى ($ح^٢$)

ولذلك يمكن استنتاج تعريف المتجهات بمفهومها الرياضى أو الجبرى كالآتى :

تعريف

عناصر المجموعة $ح^٢$ مع عمليتى الجمع والضرب فى عدد حقيقى المعرفتين عليها تسمى متجهات ويرمز لها بأحد الرموز : $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{ح}$ ، …

حيث إن المجموعة $ح^٢$ = مجموعة الأزواج المرتبة لحاصل الضرب الديكارتى ح × ح

= {(س ، ص) : س ∈ ح ، ص ∈ ح}

جمع متجهين جبريا

إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = ($س_١$ ، $ص_١$) ∈ $ح^٢$ ، $\overrightarrow{ب}$ = ($س_٢$ ، $ص_٢$) ∈ $ح^٢$

فإن : $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}$ = ($س_١ + س_٢$ ، $ص_١ + ص_٢$)

فمثلًا **إذا كان :** $\overrightarrow{أ}$ = (٣ ، ٥) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٢ ، ١) **فإن :** $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}$ = (٣ + ٢ ، ٥ + ١) = (٥ ، ٦)

خواص جمع المتجهات

١ **خاصية الانغلاق :** لكل $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ∈ $ح^٢$ **يكون :** $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}$ ∈ $ح^٢$

٢ **خاصية الإبدال :** لأى متجهين $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ **يكون :** $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{ب} + \overrightarrow{أ}$

[٣] **خاصية الدمج أو التجميع :** لأى ثلاثة متجهات $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{حـ}$ يكون :

$$\overrightarrow{أ} + (\overrightarrow{ب} + \overrightarrow{حـ}) = (\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}) + \overrightarrow{حـ} = \overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} + \overrightarrow{حـ}$$

[٤] **خاصية وجود العنصر المحايد :** لأى متجه $\overrightarrow{أ}$ يوجد متجه صفرى $\overrightarrow{و} = (٠ ، ٠)$

حيث : $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{و} = \overrightarrow{و} + \overrightarrow{أ} = \overrightarrow{أ}$

[٥] **خاصية توفر المعكوسات الجمعية :** لكل متجه $\overrightarrow{أ}$ (س ، ص) يوجد متجه $(-\overrightarrow{أ}) = (-س ، -ص)$

حيث : $\overrightarrow{أ} + (-\overrightarrow{أ}) = (-\overrightarrow{أ}) + \overrightarrow{أ} = \overrightarrow{و}$ (المتجه الصفرى) والمتجه $(-\overrightarrow{أ})$ يسمى المعكوس الجمعى للمتجه $\overrightarrow{أ}$

[٦] **خاصية الحذف :** لأى ثلاثة متجهات $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{حـ}$ **إذا كان :** $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{أ} + \overrightarrow{حـ}$ **فإن :** $\overrightarrow{ب} = \overrightarrow{حـ}$

ضرب متجه فى عدد حقيقى

إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (س ، ص) \in ح^٢$ ، ك $\in$ ح **فإن :** ك $\overrightarrow{أ}$ = ك (س ، ص) = (ك س ، ك ص)

فمثلًا **إذا كان :** $\overrightarrow{أ} = (٢ ، -٥)$ **فإن :** $٣ \overrightarrow{أ} = ٣ (٢ ، -٥) = (٦ ، -١٥)$

خواص ضرب المتجه فى عدد حقيقى

[١] **خاصية التوزيع :**

(أ) لأى متجهين $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، ك $\in$ ح **يكون :** ك $(\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب})$ = ك $\overrightarrow{أ}$ + ك $\overrightarrow{ب}$

(ب) لأى متجه $\overrightarrow{أ}$ ، $ك_١$ ، $ك_٢ \in$ ح **يكون :** $(ك_١ + ك_٢) \overrightarrow{أ} = ك_١ \overrightarrow{أ} + ك_٢ \overrightarrow{أ}$

[٢] **خاصية الدمج أو التجميع :** لأى متجه $\overrightarrow{أ}$ ، $ك_١$ ، $ك_٢ \in$ ح

يكون : $(ك_١ ك_٢) \overrightarrow{أ} = ك_١ (ك_٢ \overrightarrow{أ})$

[٣] **خاصية الحذف :** لأى متجهين $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، ك $\in$ ح* **إذا كان :** ك $\overrightarrow{أ}$ = ك $\overrightarrow{ب}$ **فإن :** $\overrightarrow{أ} = \overrightarrow{ب}$

مثال ٣

إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (٣ ، -١)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٢ ، ٥)$ ، $\overrightarrow{حـ} = (-٤ ، ٢)$

فأوجد كلاً من المتجهات الآتية :

[١] $٢ \overrightarrow{أ} - ٣ \overrightarrow{ب}$

[٢] $\frac{١}{٢} (٤ \overrightarrow{أ} + ٢ \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{حـ})$

[٣] $٢ \overrightarrow{و} - ٣ (\overrightarrow{حـ} + \overrightarrow{أ})$ حيث $\overrightarrow{و}$ المتجه الصفرى.

الحـــل

(١) $٢\vec{أ} - ٣\vec{ب} = ٢(٣، -١) - ٣(٢، ٥) = (٦، -٢) + (-٦، -١٥) = (٠، -١٧)$

(٢) $\frac{١}{٢}(٤\vec{أ} + ٢\vec{ب} - \vec{حـ}) = ٢\vec{أ} + \vec{ب} - \frac{١}{٢}\vec{حـ} = ٢(٣، -١) + (٢، ٥) - \frac{١}{٢}(-٤، ٢)$

$= (٦، -٢) + (٢، ٥) + (٢، -١) = (١٠، ٢)$

(٣) $٢\vec{و} - ٣(\vec{حـ} + \vec{أ}) = ٢(٠، ٠) - ٣[(-٤، ٢) + (٣، -١)]$

$= (٠، ٠) - ٣(-١، ١) = (٠، ٠) + (٣، -٣) = (٣، -٣)$

مثـــال ٤

إذا كان : $\vec{أ} = (٦، ١)$ ، $\vec{ب} = (١، ٢)$ فأوجد : $\|\vec{أ} - ٢\vec{ب}\|$

الحـــل

$\because \vec{أ} - ٢\vec{ب} = (٦، ١) - ٢(١، ٢) = (٦، ١) - (٢، ٤) = (٤، -٣)$

$\therefore \|\vec{أ} - ٢\vec{ب}\| = \sqrt{١٦ + ٩} = \sqrt{٢٥} = ٥$ وحدة طول.

حاول بنفسك

إذا كان : $\vec{أ} = (٣، -١)$ ، $\vec{ب} = (٢، -٥)$ ، $\vec{حـ} = (-٥، ٥)$

فاكتب على الصورة القطبية المتجه $\vec{م}$ حيث $\vec{م} = \vec{أ} - ٢\vec{ب} - \vec{حـ}$

تساوى متجهين

لأى متجهين $\vec{أ} = (س_١، ص_١)$ ، $\vec{ب} = (س_٢، ص_٢)$ يكون : $\vec{أ} = \vec{ب}$

إذا وفقط إذا كان : $س_١ = س_٢$ ، $ص_١ = ص_٢$

فمثلًا **إذا كان :** $\vec{أ} = (س، ٣)$ ، $\vec{ب} = (-٥، ص)$ **وكان :** $\vec{أ} = \vec{ب}$

فإن : $س = -٥$ ، $ص = ٣$

مثـــال ٥

إذا كان : $\vec{أ} = (٢، -٣)$ ، $\vec{ب} = (٣، ٥)$ عبر عن $\vec{حـ} = (١٢، ١)$ بدلالة : $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$

الحـــل

نفرض أن : $\vec{حـ} = ك\vec{أ} + ل\vec{ب}$ حيث : $ك، ل \in ح$

$\therefore \vec{حـ} = ك(٢، -٣) + ل(٣، ٥) = (٢ك، -٣ك) + (٣ل، ٥ل)$

$= (٢ك + ٣ل، -٣ك + ٥ل)$

∴ (٢ ك + ٣ ل ، −٣ ك + ٥ ل) = (١٢ ، ١)

∴ ٢ ك + ٣ ل = ١٢ وبضرب المعادلة × ٣ ∴ ٦ ك + ٩ ل = ٣٦ (١)

، −٣ ك + ٥ ل = ١ وبضرب المعادلة × ٢ ∴ −٦ ك + ١٠ ل = ٢ (٢)

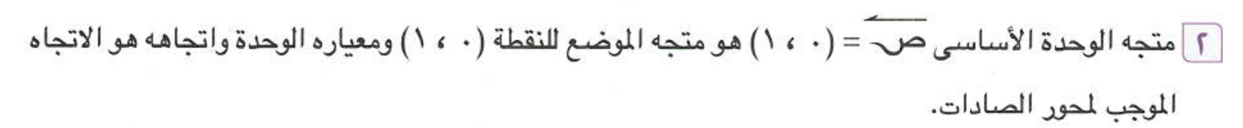
بجمع المعادلتين (١) ، (٢) : ∴ ١٩ ل = ٣٨ ∴ ل = ٢

وبالتعويض فى (١) : ∴ ٦ ك = ١٨ ومنها ك = ٣ ∴ $\overleftarrow{ح}$ = ٣ $\overleftarrow{أ}$ + ٢ $\overleftarrow{ب}$

متجها الوحدة الأساسيان $\overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ص}$

إذا كان لدينا نظام إحداثى متعامد فى المستوى ، (و) نقطة الأصل فإن :

١ متجه الوحدة الأساسى $\overleftarrow{س}$ = (١ ، ٠) هو متجه الموضع للنقطة (١ ، ٠) ومعياره الوحدة واتجاهه هو الاتجاه الموجب لمحور السينات.



٢ متجه الوحدة الأساسى $\overleftarrow{ص}$ = (٠ ، ١) هو متجه الموضع للنقطة (٠ ، ١) ومعياره الوحدة واتجاهه هو الاتجاه الموجب لمحور الصادات.

* **لاحظ أن** ‖$\overleftarrow{س}$‖ = ‖$\overleftarrow{ص}$‖ = ١

التعبير عن أى متجه بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين :

إذا كان : $\overleftarrow{أ}$ متجهًا فى المستوى حيث $\overleftarrow{أ}$ = (س ، ص)

فإنه يمكن التعبير عنه بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين كالتالى :

$\overleftarrow{أ}$ = (س ، ص) = (س ، ٠) + (٠ ، ص) (من تعريف الجمع)

= س (١ ، ٠) + ص (٠ ، ١) (من تعريف الضرب فى عدد حقيقى)

∴ $\overleftarrow{أ}$ = س $\overleftarrow{س}$ + ص $\overleftarrow{ص}$

وتستخدم هذه القاعدة مباشرة للتعبير عن الزوج المرتب الذى يمثل $\overleftarrow{أ}$ بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين $\overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ص}$

فمثلًا $\overleftarrow{أ}$ = (٢ ، ٣) = ٢ $\overleftarrow{س}$ + ٣ $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ب}$ = (−٥ ، ١) = −٥ $\overleftarrow{س}$ + $\overleftarrow{ص}$

مثال ٦

عبر عن كل من المتجهات التالية بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين ثم أوجد معياره :

١ $\overleftarrow{أ}$ = (−٨ ، ٦)

٢ $\overleftarrow{ل}$ = (٠ ، −٢)

٣ $\overleftarrow{م}$ = ($\frac{٣}{٢}$ ، ٠)

٤ $\overleftarrow{ح}$ = (٢ ، −٦)

الحل

١ $\overleftarrow{أ} = -٨\ \overleftarrow{س} + ٦\ \overleftarrow{ص}$ ∴ $\|\overleftarrow{أ}\| = \sqrt{(-٨)^٢ + (٦)^٢} = ١٠$ وحدة طول.

٢ $\overleftarrow{ل} = -٢\ \overleftarrow{ص}$ ∴ $\|\overleftarrow{ل}\| = \sqrt{(٠)^٢ + (-٢)^٢} = ٢$ وحدة طول.

٣ $\overleftarrow{م} = \frac{٣}{٢}\ \overleftarrow{س}$ ∴ $\|\overleftarrow{م}\| = \sqrt{\left(\frac{٣}{٢}\right)^٢ + (٠)^٢} = \frac{٣}{٢}$ وحدة طول.

٤ $\overleftarrow{ح} = ٢\ \overleftarrow{س} - ٦\ \overleftarrow{ص}$ ∴ $\|\overleftarrow{ح}\| = \sqrt{(٢)^٢ + (-٦)^٢} = ٢\sqrt{١٠}$ وحدة طول.

حاول بنفسك

عبر عن كل من المتجهات التالية بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين ثم أوجد معياره :

١ $\overleftarrow{أ} = (٧ ، -٢٤)$ ٢ $\overleftarrow{ء} = (-٦ ، ٠)$

٣ $\overleftarrow{ل} = (٠ ، -١٢)$ ٤ $\overleftarrow{هـ} = (-١٢ ، -١٦)$

مثال ٧

اكتب كلاً من المتجهات التالية بالصورة القطبية والإحداثية ثم عبر عنها بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين :

١ قوة مقدارها ١٢ نيوتن تؤثر فى اتجاه الشمال الشرقى.

٢ سرعة منتظمة لسيارة تقطع ٨ أمتار كل ثانية فى اتجاه ٣٠° شمال الغرب.

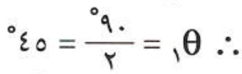
٣ إزاحة جسم مسافة ٢٤ مترًا فى اتجاه الشمال.

٤ قوة مقدارها ٤ ثقل كجم تؤثر فى اتجاه ٣٠° شرق الجنوب.

الحل

١ نفرض أن متجه الموضع للقوة = $\overleftarrow{أ}$

∵ اتجاه الشمال الشرقى ينصف الزاوية بين الشمال والشرق.

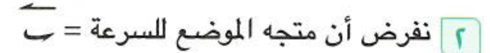


∴ $\theta_١ = \frac{٩٠°}{٢} = ٤٥°$

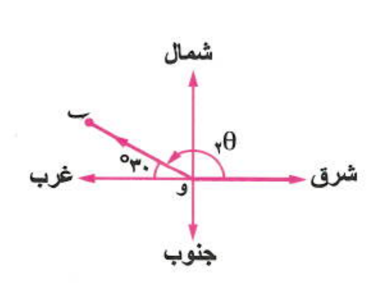
* الصورة القطبية $\overleftarrow{أ} = (١٢ ، ٤٥°)$

* الصورة الإحداثية $\overleftarrow{أ} = (١٢\ جتا\ ٤٥° ، ١٢\ جا\ ٤٥°) = (٦\sqrt{٢} ، ٦\sqrt{٢})$

* $\overleftarrow{أ} = ٦\sqrt{٢}\ \overleftarrow{س} + ٦\sqrt{٢}\ \overleftarrow{ص}$



٢ نفرض أن متجه الموضع للسرعة = $\overleftarrow{ب}$



$\theta_٢ = ١٨٠° - ٣٠° = ١٥٠°$

* الصورة القطبية $\overleftarrow{ب} = (٨ ، ١٥٠°)$

* الصورة الإحداثية $\overleftarrow{ب} = (٨\ جتا\ ١٥٠° ، ٨\ جا\ ١٥٠°) = (-٤\sqrt{٣} ، ٤)$

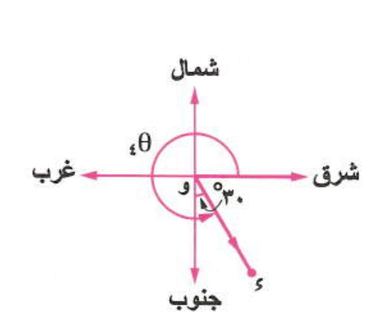
* $\overleftarrow{ب} = -٤\sqrt{٣}\ \overleftarrow{س} + ٤\ \overleftarrow{ص}$



٣ نفرض أن متجه الموضع للإزاحة = $\overleftarrow{حـ}$ $\therefore$ $\theta_٣ = ٩٠°$

* الصورة القطبية $\overleftarrow{حـ}$ = (٢٤ ، ٩٠°)
* الصورة الإحداثية $\overleftarrow{حـ}$ = (٢٤ حتا ٩٠° ، ٢٤ حا ٩٠°) = (صفر ، ٢٤)
* $\overleftarrow{حـ}$ = ٢٤ $\overleftarrow{ص}$

٤ نفرض أن متجه الموضع للقوة = $\overleftarrow{ء}$



$\therefore$ $\theta_٤ = ٢٧٠° + ٣٠° = ٣٠٠°$

* الصورة القطبية $\overleftarrow{ء}$ = (٤ ، ٣٠٠°)
* الصورة الإحداثية $\overleftarrow{ء}$ = (٤ حتا ٣٠٠° ، ٤ حا ٣٠٠°) = (٢ ، −٢ $\sqrt{٣}$)
* $\overleftarrow{ء}$ = ٢ $\overleftarrow{س}$ − ٢ $\sqrt{٣}$ $\overleftarrow{ص}$

حاول بنفسك

اكتب كلاً من المتجهات التالية بالصورة القطبية والإحداثية ثم عبر عنها بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين :

١ قوة مقدارها ٦٣ نيوتن تؤثر على الجسم فى اتجاه الشرق.

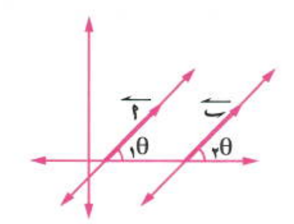
٢ إزاحة جسم مسافة ٣ أمتار فى اتجاه الجنوب.

٣ سرعة منتظمة لسيارة تقطع ٥٠ مترًا كل ثانية فى اتجاه الشمال الغربى.

توازى متجهين وتعامدهما

* لكل $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ متجهين غير صفريين حيث : $\overleftarrow{أ}$ = (س$_١$ ، ص$_١$) ، $\overleftarrow{ب}$ = (س$_٢$ ، ص$_٢$)

١ إذا كان : $\overleftarrow{أ}$ // $\overleftarrow{ب}$

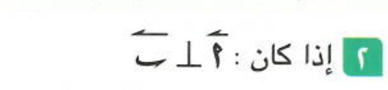


فإن : ظا $\theta_١$ = ظا $\theta_٢$

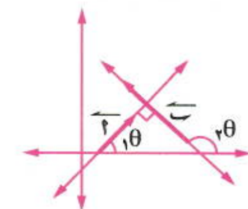
$\therefore$ $\frac{ص_١}{س_١} = \frac{ص_٢}{س_٢}$

$\therefore$ س$_١$ ص$_٢$ − س$_٢$ ص$_١$ = ٠

والعكس صحيح.



٢ إذا كان : $\overleftarrow{أ}$ ⊥ $\overleftarrow{ب}$



فإن : ظا $\theta_١$ × ظا $\theta_٢$ = −١

$\therefore$ $\frac{ص_١}{س_١} \times \frac{ص_٢}{س_٢} = -١$

$\therefore$ س$_١$ س$_٢$ + ص$_١$ ص$_٢$ = ٠

والعكس صحيح.

فمثلًا **إذا كان :** $\overrightarrow{أ}$ = (٣ ، ٤) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٨ ، −٦) ، $\overrightarrow{حـ}$ = (٩ ، ١٢)

فإن : $\overrightarrow{أ} \perp \overrightarrow{ب}$ **لأن :** [٣ × ٨ + ٤ × (−٦) = صفر]

، $\overrightarrow{أ} // \overrightarrow{حـ}$ **لأن :** [٣ × ١٢ − ٤ × ٩ = صفر]

* **لاحظ أن** ميل $\overrightarrow{أ}$ = $\frac{٤}{٣}$ ، ميل $\overrightarrow{ب}$ = $\frac{-٦}{٨}$ = $\frac{-٣}{٤}$

، ميل $\overrightarrow{حـ}$ = $\frac{١٢}{٩}$ = $\frac{٤}{٣}$ ∴ ميل $\overrightarrow{أ}$ = ميل $\overrightarrow{حـ}$

∴ $\overrightarrow{أ} // \overrightarrow{حـ}$ ، ميل $\overrightarrow{أ}$ × ميل $\overrightarrow{ب}$ = −١ ∴ $\overrightarrow{أ} \perp \overrightarrow{ب}$

ملاحظة

إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (س ، ص)

فإن : ميل $\overrightarrow{أ}$ = $\frac{ص}{س}$

مثال ٨

إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (−٢ ، ٣) ، $\overrightarrow{ب}$ = (−٤ ، م) أوجد قيمة م فى كل مما يأتى :

١ $\overrightarrow{أ} // \overrightarrow{ب}$ ٢ $\overrightarrow{أ} \perp \overrightarrow{ب}$

الحل

١ ∵ $\overrightarrow{أ} // \overrightarrow{ب}$ ∴ −٢ م −٣ (−٤) = ٠

∴ ٢ م = ١٢ ∴ م = ٦

٢ ∵ $\overrightarrow{أ} \perp \overrightarrow{ب}$ ∴ (−٢) (−٤) + ٣ × م = ٠

∴ ٣ م = −٨ ∴ م = $\frac{-٨}{٣}$

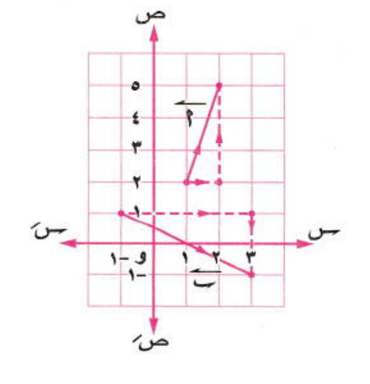
مثال ٩

أنشئ نظامًا للإحداثيات المتعامدة فى المستوى حيث (و) هى نقطة الأصل ثم مثل عليه كلاً مما يأتى :

١ المتجه $\overrightarrow{أ}$ = (١ ، ٣) بقطعة مستقيمة موجهة مبدؤها النقطة (١ ، ٢)

٢ المتجه $\overrightarrow{ب}$ = (٤ ، −٢) بقطعة مستقيمة موجهة مبدؤها النقطة (−١ ، ١) ثم أوجد إحداثيى نقطة النهاية فى كل حالة.

الحل



١ لتمثيل المتجه $\overrightarrow{أ}$ = (١ ، ٣)

* نبدأ من النقطة (١ ، ٢) ثم نتحرك يمينًا وحدة واحدة فى الاتجاه الموجب لمحور السينات.

* ثم نتحرك لأعلى ٣ وحدات فى الاتجاه الموجب لمحور الصادات

∴ نقطة النهاية = (٢ ، ٥)

٢ لتمثيل المتجه $\overrightarrow{ب}$ = (٤ ، −٢)

* نبدأ من النقطة (−١ ، ١) ثم نتحرك يمينًا ٤ وحدات فى الاتجاه الموجب لمحور السينات.

* ثم نتحرك لأسفل وحدتين فى الاتجاه السالب لمحور الصادات.

∴ نقطة النهاية = (٣ ، −١)

ملاحظة

إذا كان : $\overrightarrow{م}$ متجهًا غير صفرى ، ك ≠ ٠ فإن : $\overrightarrow{م}$ // ك $\overrightarrow{م}$ ويكون ‖ ك $\overrightarrow{م}$ ‖ = | ك | . ‖ $\overrightarrow{م}$ ‖

حيث اتجاه ك $\overrightarrow{م}$ هو نفس اتجاه $\overrightarrow{م}$ لكل ك > ٠ ، اتجاه ك $\overrightarrow{م}$ هو عكس اتجاه $\overrightarrow{م}$ لكل ك < ٠

فمثلًا • $\overrightarrow{م}$ ، ٢ $\overrightarrow{م}$ متوازيان وفى نفس الاتجاه.

• $\overrightarrow{م}$ ، −$\frac{1}{2}$ $\overrightarrow{م}$ متوازيان وفى اتجاهين متضادين.

مثال ١٠

إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ متجه غير صفرى أوجد قيمة ك فى كل من الحالتين الآتيتين :

١ ك ‖ $\overrightarrow{أ}$ ‖ = ‖ −٢ $\overrightarrow{أ}$ ‖ ٢ ‖ ٢ ك $\overrightarrow{أ}$ ‖ = ‖ −٣ $\overrightarrow{أ}$ ‖

الحل

١ ∵ ك ‖ $\overrightarrow{أ}$ ‖ = ‖ −٢ $\overrightarrow{أ}$ ‖ ∴ ك ‖ $\overrightarrow{أ}$ ‖ = ٢ ‖ $\overrightarrow{أ}$ ‖ ∴ ك = ٢

٢ ∵ ‖ ٢ ك $\overrightarrow{أ}$ ‖ = ‖ −٣ $\overrightarrow{أ}$ ‖ ∴ | ٢ ك | ‖ $\overrightarrow{أ}$ ‖ = ٣ ‖ $\overrightarrow{أ}$ ‖ ∴ ٢ | ك | = ٣

∴ | ك | = $\frac{3}{2}$ ∴ ك = ± $\frac{3}{2}$

مثال ١١

ارسم المتجه $\overrightarrow{م}$ = (١ ، ٢) ثم ارسم من النقط : ب (−٤ ، −٣) ، حـ (٢ ، ٠) ، ء (−١ ، ١) القطع المستقيمة الموجهة والتى تكافئ ٣ $\overrightarrow{م}$ ، −$\frac{3}{2}$ $\overrightarrow{م}$ ، − $\overrightarrow{م}$ على الترتيب.

الحل

١ نرسم المتجه $\overrightarrow{م}$ = (١ ، ٢) بداية من النقطة (٠ ، ٠)

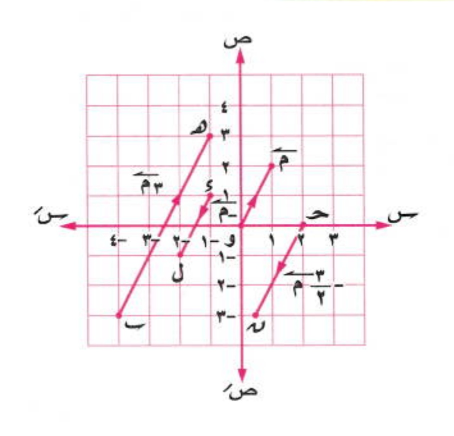
٢ نرسم المتجه ٣ $\overrightarrow{م}$ = ٣ (١ ، ٢) = (٣ ، ٦)

بداية من النقطة ب (−٤ ، −٣)

٣ نرسم المتجه −$\frac{3}{2}$ $\overrightarrow{م}$ = $\frac{-3}{2}$ (١ ، ٢) = ($\frac{-3}{2}$ ، −٣)

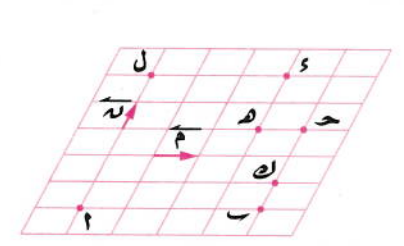
بداية من النقطة حـ (٢ ، ٠)

٤ نرسم المتجه − $\overrightarrow{م}$ = (−١ ، −٢) بداية من النقطة ء (−١ ، ١)



مثال ١٢

الشبكة المقابلة لمتوازيات أضلاع متطابقة ، عبر عن كل من القطع المستقيمة الموجهة التالية بدلالة المتجهين $\overrightarrow{م}$ ، $\overrightarrow{ن}$:



١ $\overrightarrow{أ ب}$	٢ $\overrightarrow{حـ ب}$	٣ $\overrightarrow{حـ هـ}$
٤ $\overrightarrow{ب حـ}$	٥ $\overrightarrow{ب أ}$	٦ $\overrightarrow{ك حـ}$
٧ $\overrightarrow{ء ل}$	٨ $\overrightarrow{ء هـ}$	٩ $\overrightarrow{ل أ}$

الحل

١ ٤ $\overrightarrow{م}$	٢ −٣ $\overrightarrow{ن}$	٣ − $\overrightarrow{م}$
٤ ٣ $\overrightarrow{ن}$	٥ −٤ $\overrightarrow{م}$	٦ ٢ $\overrightarrow{ن}$
٧ −٣ $\overrightarrow{م}$	٨ −٢ $\overrightarrow{ن}$	٩ −٥ $\overrightarrow{ن}$

ملاحظة

إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهين غير صفريين وكان $\overrightarrow{أ} = ك \overrightarrow{ب}$ ، ك ≠ صفر   فإن : $\overrightarrow{أ} // \overrightarrow{ب}$

فمثلًا إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (٣ ، ٢)$ ، $\overrightarrow{ب} = (١٥ ، ١٠)$

∴ $\overrightarrow{ب} = ٥ (٣ ، ٢) = ٥ \overrightarrow{أ}$ ∴ $\overrightarrow{أ} // \overrightarrow{ب}$

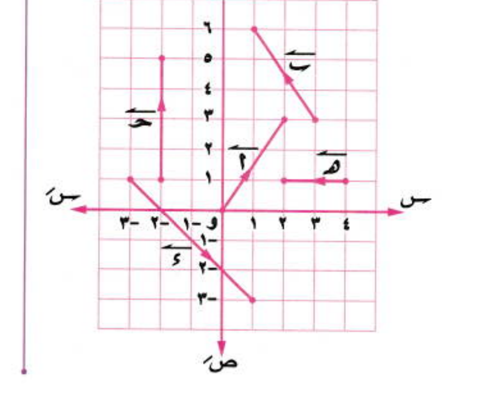
حاول بنفسك

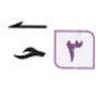
فى الشكل المقابل :

تمثيل لبعض المتجهات فى المستوى المتعامد

اكتب كلًا من المتجهات الآتية بدلالة متجهى

الوحدة الأساسيين :



١  $\overrightarrow{أ}$	٢ $\overrightarrow{ب}$	٣  $\overrightarrow{حـ}$
٤ $\overrightarrow{ء}$	٥ $\overrightarrow{هـ}$	



تمارين 2 على المتجهات

من أسئلة الكتاب المدرسى • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (٥ ، −١٢) فإن : $\|\overrightarrow{أ}\|$ = ...

(أ) ١٣ (ب) −٧ (جـ) ١٧ (د) ٧

(٢) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (١٢ ، ١٨) فإن : $\frac{٢}{٣}\overrightarrow{أ}$ = ...

(أ) (٨ ، ١٢) (ب) (١٢ ، ٨) (جـ) (٦ ، ٤) (د) (١٨ ، ٢٧)

(٣) كل المتجهات الآتية هى متجهات وحدة ما عدا ....

(أ) (١ ، ٠) (ب) (٠,٦ ، ٠,٨) (جـ) (٠ ، −١) (د) (١ ، ١)

(٤) إذا كان : (٦ ، ٤) ، (٣ ، م) متجهين متعامدين فإن : م = ...

(أ) ٢ (ب) −٢ (جـ) ٨ (د) −٤,٥

(٥) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (−٢ ، ١) ، $\overrightarrow{حـ}$ = (−٣ ، ك) متوازيين فإن : ك = ...

(أ) $-\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $-\frac{٣}{٢}$ (د) $\frac{٣}{٢}$

(٦) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (٤ ، ٥) ، $\overrightarrow{ب}$ = (−٢٠ ، ١٦) فإن : المتجهين $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ....

(أ) متعامدان. (ب) متوازيان. (جـ) متكافئان. (د) غير ذلك.

(٧) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (ك ، ٢) ، $\overrightarrow{ب}$ = ٢ $\overrightarrow{س}$ − $\overrightarrow{ص}$ وكان : $\overrightarrow{أ} \perp \overrightarrow{ب}$ فإن : ك = ...

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) ± ١ (د) صفر

(٨) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (٤ ، ٢) ، $\overrightarrow{ب}$ = (١ ، −٢) فإن : $\|\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب}\|$ = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٧

(٩) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (٣ ، ٥) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٤ ، ٦) فإن : $\|-٢\overrightarrow{أ} + ٣\overrightarrow{ب}\|$ = ...

(أ) ٦ (ب) ٨ (جـ) ١٠ (د) ١٤

(١٠) إذا كان : أ = (−٣ ، ٤) ، ب = (٢ ، ١) ، $\overrightarrow{حـ} = \overrightarrow{أ} + ٢\overrightarrow{ب}$ فإن : $\overrightarrow{حـ}$ = ...

(أ) (−١ ، ٥) (ب) (−٤ ، ٩) (جـ) (١ ، ٦) (د) (١ ، ٥)

(١١) إذا كان : $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}$ = (٨ ، ١٦) ، $\overrightarrow{أ}$ = (٥ ، ١٢) فإن : $\|\overrightarrow{ب}\|$ = ...

(أ) ٧ (ب) ٥ (جـ) ١٣ (د) $٨\sqrt{٥}$

(١٢) إذا كان : ٢ (٣ ، ص) + ٣ (س ، −٢) = (٣ ، ٢) فإن : س + ص = ……………

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

(١٣) إذا كان : $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (−٢ ، ٤) ، $\overrightarrow{\text{حـ}}$ = (٤ ، ٣) ، ٢ $\overrightarrow{\text{أ}}$ − ٣ $\overrightarrow{\text{ب}}$ = ٤ $\overrightarrow{\text{حـ}}$ فإن : ‖$\overrightarrow{\text{أ}}$‖ = ……………

(أ) ٥ (ب) ١٢ (جـ) ١٣ (د) ٧

(١٤) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٤ ، −٦) ، ٣ ($\overrightarrow{\text{أ}}$ − $\overrightarrow{\text{ب}}$) = ٧ $\overrightarrow{\text{ب}}$ − ٢ $\overrightarrow{\text{أ}}$ فإن : $\overrightarrow{\text{ب}}$ = ……………

(أ) (٢ ، −٣) (ب) (−٢ ، ٣) (جـ) (−٢ ، −٣) (د) (٢ ، ٣)

(١٥) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ + $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٦ ، ٨) ، −$\overrightarrow{\text{أ}}$ + $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (−٢ ، ٤) فإن : $\overrightarrow{\text{أ}}$ = ……………

(أ) (٢ ، −٤) (ب) (٢ ، ١) (جـ) (٤ ، ٢) (د) (١ ، ٣)

(١٦) إذا كان : ٧ $\overrightarrow{\text{أ}}$ + ٥ $\overrightarrow{\text{ب}}$ = $\overrightarrow{\text{س}}$ + ٣٣ $\overrightarrow{\text{ص}}$ ، ٣ $\overrightarrow{\text{أ}}$ − $\overrightarrow{\text{ب}}$ = −٩ $\overrightarrow{\text{س}}$ + ١١ $\overrightarrow{\text{ص}}$

فإن : ‖$\overrightarrow{\text{أ}}$‖ = ……………

(أ) √١٠ (ب) ٢ √٥ (جـ) √٣٤ (د) √٤٢

(١٧) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ = ٣ $\overrightarrow{\text{س}}$ + ك $\overrightarrow{\text{ص}}$ وكان : ‖$\overrightarrow{\text{أ}}$‖ = ٥ فإن : ك = ……………

(أ) ٤ فقط (ب) −٤ فقط (جـ) ± ٤ (د) ٢

(١٨) إذا كان : ‖٣ ك $\overrightarrow{\text{أ}}$‖ = ‖−١٥ $\overrightarrow{\text{أ}}$‖ فإن : ك = …………… حيث ‖$\overrightarrow{\text{أ}}$‖ ≠ ٠

(أ) ٥ فقط (ب) −٥ فقط (جـ) ± ٥ (د) ١٥

(١٩) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (ك ، ٢) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٢ ، م) ، $\overrightarrow{\text{أ}}$ = ٢ $\overrightarrow{\text{ب}}$ فإن : ك + م = ……………

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ١ (د) ٣

(٢٠) إذا كان : ك ‖٤ $\overrightarrow{\text{أ}}$‖ = ‖−٣ $\overrightarrow{\text{أ}}$‖ فإن : ك = ……………

(أ) $\frac{٣}{٤}$ (ب) $\frac{٤}{٣}$ (جـ) $\frac{-٣}{٤}$ (د) ± $\frac{٣}{٤}$

(٢١) إذا كان : ‖ك (٣ ، ٤)‖ = ١ فإن : ك = ……………

(أ) $\frac{١}{٧}$ (ب) $\frac{١}{٢٥}$ (جـ) ± $\frac{١}{٥}$ (د) ± ٥

(٢٢) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ = −٧ $\overrightarrow{\text{ب}}$ فإن : ……………

(أ) $\overrightarrow{\text{أ}}$ ⊥ $\overrightarrow{\text{ب}}$

(ب) $\overrightarrow{\text{أ}}$ // $\overrightarrow{\text{ب}}$ وفى اتجاهين متضادين.

(جـ) $\overrightarrow{\text{أ}}$ // $\overrightarrow{\text{ب}}$ وفى نفس الاتجاه.

(د) ‖$\overrightarrow{\text{أ}}$‖ = −٧ ‖$\overrightarrow{\text{ب}}$‖

(٢٣) إذا كان : ‖$\overrightarrow{\text{أ}}$‖ = ٣ ، −١ ≤ ك ≤ ٢ فإن : ‖ك $\overrightarrow{\text{أ}}$‖ ∈ ……………

(أ) [−٣ ، ٦] (ب) [٠ ، ٦] (جـ) [١ ، ٢] (د) [٣ ، ٦]

(٢٤) $\overrightarrow{\text{أ}}$ = ٢ $\overrightarrow{\text{س}}$ + ٣ $\overrightarrow{\text{ص}}$ يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها θ حيث ……………

(أ) ظا θ = $\frac{٢}{٣}$ (ب) ظا θ = $\frac{٣}{٢}$ (جـ) جا θ = $\frac{٢}{٣}$ (د) ظا θ = $\frac{-٢}{٣}$

(٢٥) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ = $\left(٦\sqrt{٢} ، \frac{٣\pi}{٤}\right)$ متجه موضع فى الصورة القطبية لنقطة أ فإن : أ = ...

(أ) (٦ ، −٦) (ب) (−٦ ، ٦) (جـ) (٦ ، ٦) (د) (−٦ ، −٦)

(٢٦) الصورة القطبية للمتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ = −٣ $\overrightarrow{\text{ص}}$ هى ....

(أ) $\left(-٣ ، \frac{\pi}{٢}\right)$ (ب) $\left(٣ ، \frac{\pi}{٢}\right)$ (جـ) $\left(-٣ ، \frac{٣\pi}{٢}\right)$ (د) $\left(٣ ، \frac{٣\pi}{٢}\right)$

(٢٧) الصورة القطبية للمتجه $\left(٦ ، ٦\sqrt{٣}\right)$ هى ....

(أ) $\left(١٢ ، \frac{\pi}{٣}\right)$ (ب) $\left(١٢ ، \frac{\pi}{٦}\right)$ (جـ) $\left(٦ ، \frac{\pi}{٣}\right)$ (د) $\left(٦ ، \frac{\pi}{٦}\right)$

(٢٨) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (١٠ ، θ) حيث جا θ = $\frac{٣}{٥}$ متجه موضع لنقطة أ فإن : أ = ...

(أ) (٦ ، ٨) أو (٦ ، −٨) (ب) (٨ ، ٦) أو (−٨ ، ٦)

(جـ) (٦ ، ٨) أو (٨ ، ٦) (د) (−٨ ، ٦) ، (٦ ، −٨)

(٢٩) فى الشكل المقابل :

‖$\overrightarrow{\text{أ}}$‖ = ٤ وحدة طول

فإن : $\overrightarrow{\text{أ}}$ = ... (بالصورة الإحداثية)

(أ) $\left(٢ ، ٢\sqrt{٣}\right)$ (ب) $\left(٢\sqrt{٣} ، ٢\right)$

(جـ) $\left(٤ ، \sqrt{٣}\right)$ (د) $\left(\sqrt{٣} ، ٢\right)$

(٣٠) إذا كان معيار المتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ يساوى ٧ فإن معيار المتجه − ٢ $\overrightarrow{\text{أ}}$ يساوى ....

(أ) ٧ (ب) −٢ (جـ) ١٤ (د) −١٤

(٣١) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ = $\left(٣ ، \frac{\pi}{٤}\right)$ فإن : ٢ $\overrightarrow{\text{أ}}$ = ...

(أ) $\left(٦ ، \frac{\pi}{٢}\right)$ (ب) $\left(٦ ، \frac{\pi}{٤}\right)$ (جـ) $\left(٣ ، \frac{\pi}{٢}\right)$ (د) $\left(٣ ، \frac{\pi}{٤}\right)$

(٣٢) إذا كان : $\overrightarrow{\text{ل}}$ = (٢ ، −٣) ، $\overrightarrow{\text{ك}}$ = (٣ ، ١ − س) متوازيين فإن : س = ...

(أ) ٤ (ب) $\frac{١١}{٢}$ (جـ) −١ (د) −٩

(٣٣) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (س ، ٤) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٢ ، ص) وكان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ // $\overrightarrow{\text{ب}}$ فإن : ....

(أ) س + ٢ ص = ٠ (ب) س = ٢ ص (جـ) س ص = ٨ (د) س ص = −٨

(٣٤) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (ك + ١ ، ١) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٢ ، ك) فإن قيم ك التى تجعل $\overrightarrow{\text{أ}}$ // $\overrightarrow{\text{ب}}$ هى ....

(أ) −٢ ، −١ (ب) ١ ، ٢ (جـ) −٢ ، ١ (د) −١ ، ٢

(٣٥) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٢ ، −١) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٣ ، ٤) ، $\overrightarrow{\text{حـ}}$ = (ك ، ١٥) والمتجهان $\overrightarrow{\text{حـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ − $\overrightarrow{\text{أ}}$ متوازيين

فإن : ك = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٣٦) إذا كان المتجهان $\overrightarrow{أ}$ = (ى ، ١) ، $\overrightarrow{ب}$ = ى $\overrightarrow{س}$ − ٤ $\overrightarrow{ص}$ متعامدين فإن : ى = ...

(أ) ٢ (ب) −٢ (جـ) ± ٢ (د) −٤

(٣٧) أى أزواج المتجهات الآتية تكون متعامدة ؟

(أ) (٣ ، ٠) ، (٢ ، −١) (ب) (−٢ ، ٥) ، (٤ ، −١٠)

(جـ) (٢ ، ٠) ، (٠ ، ٢) (د) (١ ، −٤) ، (٢ ، −٨)

(٣٨) أى من أزواج المتجهات الآتية ليسا متضادين ؟

(أ) $\overrightarrow{أ}$ = (−٢ ، ٠) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٥ ، ٠) (ب) $\overrightarrow{أ}$ = (−٤ ، ٢) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٢ ، −١)

(جـ) $\overrightarrow{أ}$ = (٥ ، −٣) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٣ ، −٥) (د) $\overrightarrow{أ}$ = (٠ ، ٤) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٠ ، −١)

(٣٩) إذا كان $\overrightarrow{أ}$ متجه غير صفرى ، ك ∈ ح* وكان : ‖ك $\overrightarrow{أ}$‖ = ١ فإن : ك = ...

(أ) ‖$\overrightarrow{أ}$‖ (ب) ١ (جـ) ± $\frac{١}{‖\overrightarrow{أ}‖}$ (د) $\frac{١}{‖\overrightarrow{أ}‖}$

(٤٠) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = ك $\overrightarrow{حـ}$ حيث $\overrightarrow{حـ}$ متجه وحدة فى اتجاه $\overrightarrow{أ}$ فإن : ك = ...

(أ) ± ١ (ب) ‖$\overrightarrow{أ}$‖ (جـ) ± ‖$\overrightarrow{أ}$‖ (د) $\frac{\overrightarrow{أ}}{‖\overrightarrow{أ}‖}$

(٤١) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (−٢ ، ١) ، $\overrightarrow{ب}$ = (ك ، ٣) ، $\overrightarrow{حـ}$ = (م ، −٤)

وكان $\overrightarrow{أ}$ // $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{أ}$ ⊥ $\overrightarrow{حـ}$ فإن : $\frac{ك}{م}$ = ...

(أ) −٦ (ب) −٢ (جـ) ٣ (د) −٣

(٤٢) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = ٣ $\overrightarrow{س}$ − ٤ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ب}$ = $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{حـ}$ = (٥ ، $\frac{\pi}{١٨}$)

فإن : ‖$\overrightarrow{أ}$‖ + ‖$\overrightarrow{ب}$‖ + ‖$\overrightarrow{حـ}$‖ = ...

(أ) ٩ (ب) ١٠ (جـ) ١١ (د) ١٢

(٤٣) المتجه الذى يعبر عن إزاحة جسم مسافة ٤٠ سم فى اتجاه الجنوب الشرقى هو ....

(أ) ٢٠ $\sqrt{٢}$ $\overrightarrow{س}$ + ٢٠ $\sqrt{٢}$ $\overrightarrow{ص}$ (ب) −٢٠ $\sqrt{٢}$ $\overrightarrow{س}$ + ٢٠ $\sqrt{٢}$ $\overrightarrow{ص}$

(جـ) −٢٠ $\sqrt{٢}$ $\overrightarrow{س}$ − ٢٠ $\sqrt{٢}$ $\overrightarrow{ص}$ (د) ٢٠ $\sqrt{٢}$ $\overrightarrow{س}$ − ٢٠ $\sqrt{٢}$ $\overrightarrow{ص}$

(٤٤) إذا كان معيار القوة $\overrightarrow{ق}$ = ١٠ نيوتن وتعمل فى اتجاه ٣٠° شمال الشرق فإن : $\overrightarrow{ق}$ = ...

(أ) ٥ $\sqrt{٣}$ $\overrightarrow{س}$ − ٥ $\overrightarrow{ص}$ (ب) ٥ $\overrightarrow{س}$ + ٥ $\sqrt{٣}$ $\overrightarrow{ص}$

(جـ) ٥ $\sqrt{٣}$ $\overrightarrow{س}$ + ٥ $\overrightarrow{ص}$ (د) −٥ $\sqrt{٣}$ $\overrightarrow{س}$ + ٥ $\overrightarrow{ص}$

(٤٥) سفينة تقطع مسافة ١٠ $\sqrt{٣}$ كم شمالًا ثم ١٠ كم غربًا فإن الإزاحة = ... فى الصورة القطبية.

(أ) (٢٠ ، $\frac{\pi}{٦}$) (ب) (٢٠ ، $\frac{٢\pi}{٣}$) (جـ) (٢٠ ، $\frac{٥\pi}{٦}$) (د) (٢٠ ، $\frac{٧\pi}{٦}$)

(٤٦) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (ك ، ك + ٣) ، $\|\overrightarrow{أ}\|$ = ٣ $\sqrt{٥}$ وحدة طولية فإن إحدى قيم ك هى ....

(أ) −٣ (ب) صفر (جـ) ٣ (د) ٦

(٤٧) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (س$_١$ ، ص$_١$) ، $\overrightarrow{ب}$ = (س$_٢$ ، ص$_٢$)

فإن المتجهين $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متعامدان إذا كان : ....

(أ) س$_١$ ص$_٢$ − س$_٢$ ص$_١$ = ٠ (ب) س$_١$ س$_٢$ − ص$_١$ ص$_٢$ = ٠

(جـ) $\frac{س_١ س_٢}{ص_١ ص_٢}$ = −١ (د) $\frac{س_١ ص_٢}{س_٢ ص_١}$ = ١

(٤٨) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (س$_١$ ، ص$_١$) ، $\overrightarrow{ب}$ = (س$_٢$ ، ص$_٢$) ، $\overrightarrow{جـ}$ = (س$_٣$ ، ص$_٣$)

وكان : س$_١$ س$_٢$ + ص$_١$ ص$_٢$ = س$_١$ س$_٣$ + ص$_١$ ص$_٣$ = صفر فإن : س$_٢$ ص$_٣$ = ...

(أ) صفر (ب) س$_٣$ ص$_٢$ (جـ) ص$_٣$ س$_٢$ (د) س$_٢$ ص$_٣$

(٤٩) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (−١ ، ٢) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٣ ، ٧) ، $\overrightarrow{جـ}$ = (٧ ، ١٢) فإن : $\overrightarrow{جـ}$ = ...

(أ) ٢ $\overrightarrow{أ}$ − $\overrightarrow{ب}$ (ب) $\overrightarrow{أ}$ + ٢ $\overrightarrow{ب}$ (جـ) ٢ $\overrightarrow{ب}$ − $\overrightarrow{أ}$ (د) ٣ $\overrightarrow{أ}$ + ٢ $\overrightarrow{ب}$

(٥٠) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (٢ $\sqrt{٢}$ ، $\frac{\pi}{٤}$) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٢ $\sqrt{٢}$ ، $\frac{٣}{٤}\pi$) فإن : $\overrightarrow{أ}$ + $\overrightarrow{ب}$ = ...

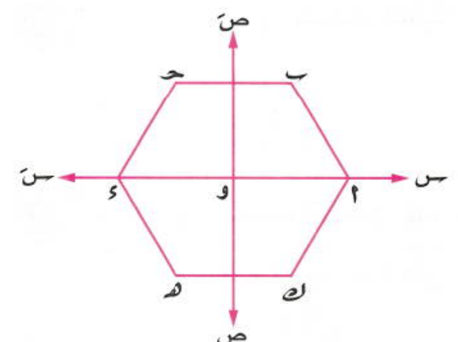
(أ) (٤ $\sqrt{٢}$ ، π) (ب) (٤ ، ٤) (جـ) (٤ ، ٠) (د) (٤ ، $\frac{\pi}{٢}$)

(٥١) المتجهان (٤ $\sqrt{٣}$ ، $\frac{\pi}{٦}$) ، (٤ $\sqrt{٣}$ ، $\frac{٥\pi}{٣}$) يكونان ....

(أ) متكافئان. (ب) متوازيان.

(جـ) متعامدان. (د) متساويان فى المقدار ومتضادان فى الاتجاه.

(٥٢) فى الشكل المقابل :



أ ب جـ ء هـ ل سداسى منتظم مركزه نقطة الأصل

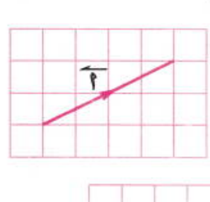
وطول ضلعه ٥ وحدات طولية

فإن : $\overrightarrow{و هـ}$ = ...

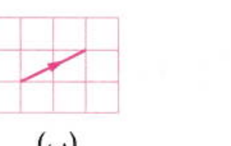
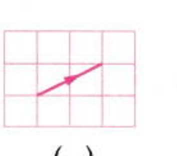
(أ) (−٥ ، $\frac{\pi}{٣}$) (ب) (−٥ ، $\frac{٤}{٣}\pi$)

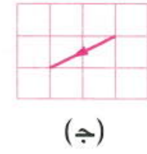
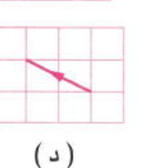
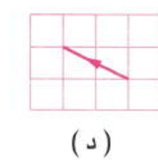
(جـ) (٥ ، $\frac{٤}{٣}\pi$) (د) (٥ ، $\frac{\pi}{٣}$)

(٥٣) إذا كان الشكل المقابل يمثل $\overrightarrow{أ}$



أى الأشكال الآتية يمثل المتجه −$\frac{١}{٢}$ $\overrightarrow{أ}$ ؟

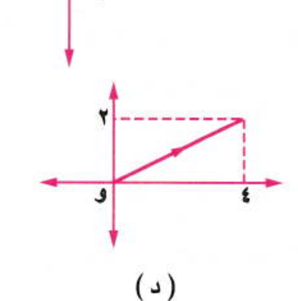
(أ) (ب) (جـ) (د)

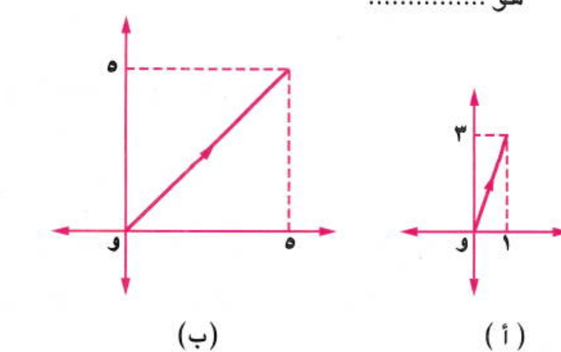
(٥٤) فى الشكل المقابل :

أ = (١ ، ٣) ، ب = (٥ ، ٥)

فإن الشكل الذى يمثل $\overrightarrow{\text{أب}}$

هو ....





(أ) (ب) (جـ) (د)

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ = ٣ $\overrightarrow{\text{س}}$ − ٢ $\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = − $\overrightarrow{\text{س}}$ − ٤ $\overrightarrow{\text{ص}}$ أوجد :

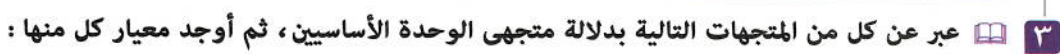
(١) $\overrightarrow{\text{أ}}$ + $\overrightarrow{\text{ب}}$ | (٢) $\overrightarrow{\text{أ}}$ − $\overrightarrow{\text{ب}}$ | (٣) ‖ $\overrightarrow{\text{أ}}$ + $\overrightarrow{\text{ب}}$ ‖

(٤) ٢ $\overrightarrow{\text{أ}}$ + ٣ $\overrightarrow{\text{ب}}$ | (٥) $\overrightarrow{\text{أ}}$ − ٣ $\overrightarrow{\text{ب}}$ | (٦) −٣ $\overrightarrow{\text{أ}}$

٢ إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٣ ، −٢) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (−٢ ، ٤) ، $\overrightarrow{\text{جـ}}$ = (٧ ، ١) فأوجد :

(١) ‖ $\overrightarrow{\text{أ}}$ + ٢ $\overrightarrow{\text{جـ}}$ ‖ «١٧» | (٢) ‖ ٥ $\overrightarrow{\text{ب}}$ + ٣ $\overrightarrow{\text{أ}}$ ‖ «√١٩٧»

(٣) ‖ $\overrightarrow{\text{أ}}$ − $\frac{١}{٢}$ $\overrightarrow{\text{ب}}$ ‖ «٤ √٢» | (٤) ‖ $\overrightarrow{\text{أ}}$ + $\overrightarrow{\text{ب}}$ − ٢ $\overrightarrow{\text{جـ}}$ ‖ «١٣»



٣ عبر عن كل من المتجهات التالية بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين ، ثم أوجد معيار كل منها :

(١) $\overrightarrow{\text{م}}$ = (−٤ ، −٣) | (٢) $\overrightarrow{\text{ن}}$ = (٨ ، −٦) | (٣) $\overrightarrow{\text{و}}$ = (−٥ ، −١٢)

(٤) $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٠ ، ٢ √٢) | (٥) $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (−٣ √٣ ، ٠) | (٦) $\overrightarrow{\text{جـ}}$ = (√٢ ، −٣ √٢)

٤ أوجد الصورة القطبية لكل من المتجهات الآتية :

(١) $\overrightarrow{\text{م}}$ = ٨ √٣ $\overrightarrow{\text{س}}$ + ٨ $\overrightarrow{\text{ص}}$ | (٢) $\overrightarrow{\text{ن}}$ = ٣ √٢ $\overrightarrow{\text{س}}$ + ٣ √٢ $\overrightarrow{\text{ص}}$

(٣) $\overrightarrow{\text{وأ}}$ = (٥ ، ٥ √٣) | (٤) $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٧ √٣ ، −٧)

(٥) $\overrightarrow{\text{جـ}}$ = −٤ $\overrightarrow{\text{س}}$ − ٤ $\overrightarrow{\text{ص}}$

٥ إذا كان $\overrightarrow{\text{وأ}}$ متجه موضع النقطة أ بالنسبة لنقطة الأصل فى الصورة القطبية فأوجد إحداثيى النقطة أ فى كل مما يأتى :

(١) $\overrightarrow{\text{وأ}}$ = (١٢ √٣ ، ٦٠°) | (٢) $\overrightarrow{\text{وأ}}$ = (٥ √٢ ، $\frac{٣\pi}{٤}$)

(٣) $\overrightarrow{\text{وأ}}$ = (٢٤ ، ١٥٠°) | (٤) $\overrightarrow{\text{وأ}}$ = (٦ ، $\frac{٥\pi}{٣}$)

٦ **أوجد قيم س ، ص فى كل مما يأتى :**

(١) س (–٦ ، ص) = (٣ ، ٥)

(٢) (س ، –٣) – (٥ ، ٠) = (٢ ، ص)

(٣) (٣ ، ص) + س (١ ، –٢) – (–٤ ، ١) = $\overrightarrow{٠}$

(٤) س (٢ ، ٣) + ص (–٣ ، ١) = (–٤ ، ٥)

---

٧ إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (٤ ، –٦) ، $\overrightarrow{ب}$ = (–٦ ، ٩) ، $\overrightarrow{حـ}$ = (–٣ ، –٢)

(١) **أثبت أن :** $\overrightarrow{أ}$ // $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ⊥ $\overrightarrow{حـ}$ ، $\overrightarrow{حـ}$ ⊥ $\overrightarrow{أ}$

(٢) **أوجد :** ٢ $\overrightarrow{أ}$ + $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{ب}$ – ٢ $\overrightarrow{حـ}$ ، $\frac{١}{٢}$ $\overrightarrow{أ}$ + $\overrightarrow{ب}$ – ٣ $\overrightarrow{حـ}$

---

٨ إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (–٢ $\sqrt{٣}$ ، –٣) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٢ ، $\sqrt{٣}$)

اذكر العلاقة بين المتجهين : $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ مع ذكر السبب.

---

٩ إذا كان : $\overrightarrow{م}$ = ٢ $\overrightarrow{س}$ + ٣ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ن}$ = –٨ $\overrightarrow{س}$ – ١٢ $\overrightarrow{ص}$

، $\overrightarrow{ل}$ = أ $\overrightarrow{س}$ + ١٥ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق}$ = ٦ $\overrightarrow{س}$ + ب $\overrightarrow{ص}$

(١) **أثبت أن :** $\overrightarrow{م}$ // $\overrightarrow{ن}$

(٢) **أوجد :** أ ∈ ح إذا كان : $\overrightarrow{ن}$ // $\overrightarrow{ل}$

(٣) **أوجد قيمة :** ٤ $\overrightarrow{م}$ + $\overrightarrow{ن}$ ، ٤ ($\overrightarrow{م}$ + $\overrightarrow{ن}$)

(٤) **أوجد :** ب ∈ ح إذا كان : $\overrightarrow{ق}$ ⊥ $\overrightarrow{ن}$

(٥) **هل :** $\overrightarrow{ق}$ ⊥ $\overrightarrow{م}$ ؟ فسر إجابتك.

---

١٠ إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (٣ ، –٢) ، $\overrightarrow{ب}$ = (–٢ ، ٥) ، $\overrightarrow{حـ}$ = (٠ ، ١١)

(١) **اكتب كلًا من المتجهات التالية بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين :**

٢ $\overrightarrow{ب}$ ، ٣ $\overrightarrow{حـ}$ ، $\overrightarrow{أ}$ + $\overrightarrow{ب}$ – $\overrightarrow{حـ}$ ، $\frac{١}{٢}$ ($\overrightarrow{ب}$ + $\overrightarrow{حـ}$)

(٢) **عبر عن** $\overrightarrow{حـ}$ **بدلالة :** $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$

---

١١ إذا كان : $\overrightarrow{حـ}$ = (٤ ، –١) ، $\overrightarrow{ء}$ = (–٣ ، ٢) ، $\overrightarrow{هـ}$ = (–٥ ، ١)

أوجد المتجه $\overrightarrow{أ}$ **الذى يحقق المعادلة :** ٢ $\overrightarrow{أ}$ = ٢ $\overrightarrow{حـ}$ – ٣ $\overrightarrow{ء}$ + ٢ $\overrightarrow{هـ}$ «($\frac{٧}{٢}$ ، –٣)»

---

١٢ إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (٧ ، –٣) ، $\overrightarrow{ب}$ = (–٢ ، ٥) ، $\overrightarrow{حـ}$ = ٢ $\overrightarrow{س}$ + ٣ $\overrightarrow{ص}$

(١) **أثبت أن :** المتجه $\overrightarrow{ل}$ = ٢ $\overrightarrow{حـ}$ + ٣ $\overrightarrow{ب}$ – $\overrightarrow{أ}$ يوازى المتجه $\overrightarrow{م}$ = ٣ $\overrightarrow{س}$ – ٨ $\overrightarrow{ص}$

(٢) إذا كان : $\overrightarrow{ل}$ = ك $\overrightarrow{م}$ أوجد : ك «–٣»

---

١٣ فى مستوى إحداثى متعامد ، إذا كان : $\overrightarrow{ل}$ = ٥ $\overrightarrow{س}$ – ٣ $\sqrt{٣}$ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{م}$ = – $\overrightarrow{س}$ – ٢ $\sqrt{٣}$ $\overrightarrow{ص}$

، $\overrightarrow{ن}$ = –٢ $\overrightarrow{س}$ + $\sqrt{٣}$ $\overrightarrow{ص}$ أوجد $\overrightarrow{حـ}$ فى الصورة القطبية حيث : $\overrightarrow{حـ}$ = $\overrightarrow{ل}$ + $\overrightarrow{م}$ + ٣ $\overrightarrow{ن}$ «(٤ ، ٢٤٠°)»

---

١٤ **أوجد بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين المتجه الذى يعبر عن :**

(١) قوة مقدارها ٣٧ نيوتن تؤثر على جسم وتعمل فى اتجاه الشمال.

(٢) 📖 سرعة منتظمة مقدارها ٦٠ كم/س فى اتجاه الغرب.

(٣) إزاحة جسم مسافة ٢٥ مترًا فى اتجاه الجنوب.

(٤) متجه معياره ٦ وحدات ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{٤}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

(٥) 📖 إزاحة جسم مسافة ٥٠ سم فى اتجاه ٣٠° شمال الغرب.

(٦) 📖 قوة مقدارها ٢٠ ث كجم تؤثر على جسم فى اتجاه ٣٠° جنوب الشرق.

(٧) 📖 إزاحة جسم مسافة ٤٠ سم فى اتجاه الشمال الغربى.

---

١٥ أ ، ب ، حـ ، ء أربع نقط على استقامة واحدة مرتبه من اليمين إلى اليسار حيث أب : بحـ : حـء = ٢ : ٣ : ٥

ضع العدد المناسب مكان النقط فيما يلى علمًا بأن الرمز « = » يعنى تكافؤ :

(١) $\overrightarrow{\text{أب}}$ = ... $\overrightarrow{\text{بحـ}}$

(٢) $\overrightarrow{\text{حـب}}$ = ... $\overrightarrow{\text{أب}}$

(٣) $\overrightarrow{\text{حـء}}$ = ... $\overrightarrow{\text{أب}}$

(٤) $\overrightarrow{\text{أحـ}}$ = ... $\overrightarrow{\text{ءحـ}}$

(٥) $\overrightarrow{\text{بحـ}}$ = ... $\overrightarrow{\text{حـء}}$

(٦) $\overrightarrow{\text{حـء}}$ = ... $\overrightarrow{\text{أحـ}}$

(٧) $\overrightarrow{\text{بء}}$ = ... $\overrightarrow{\text{بأ}}$

(٨) $\overrightarrow{\text{حـء}}$ = ... $\overrightarrow{\text{حـب}}$

(٩) $\overrightarrow{\text{أء}}$ = ... $\overrightarrow{\text{حـأ}}$

---

١٦ إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ = ٢ $\overrightarrow{\text{س}}$ + $\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = $\overrightarrow{\text{س}}$ + ٣ $\overrightarrow{\text{ص}}$ أوجد :

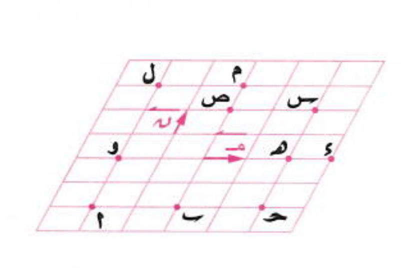
(١) قيمة ك التى تجعل المتجه ($\overrightarrow{\text{أ}}$ + ك $\overrightarrow{\text{ب}}$) يوازى المتجه $\overrightarrow{\text{س}}$

(٢) قيمة ل التى تجعل المتجه (ل $\overrightarrow{\text{أ}}$ + $\overrightarrow{\text{ب}}$) يوازى المتجه $\overrightarrow{\text{ص}}$ «$-\frac{١}{٢}$ ، $-\frac{١}{٢}$»

---

١٧ 📖 الشبكة المقابلة لمتوازيات أضلاع متطابقة.

عبر عن كل من القطع المستقيمة الموجهة التالية بدلالة المتجهين $\overrightarrow{\text{م}}$ ، $\overrightarrow{\text{ن}}$:



(١) $\overrightarrow{\text{أب}}$

(٢) $\overrightarrow{\text{بص}}$

(٣) $\overrightarrow{\text{هـحـ}}$

(٤) $\overrightarrow{\text{ءهـ}}$

(٥) $\overrightarrow{\text{سهـ}}$

(٦) $\overrightarrow{\text{سص}}$

(٧) $\overrightarrow{\text{صم}}$

(٨) $\overrightarrow{\text{لم}}$

(٩) $\overrightarrow{\text{بم}}$

(١٠) $\overrightarrow{\text{هـو}}$

(١١) $\overrightarrow{\text{ول}}$

(١٢) $\overrightarrow{\text{وء}}$

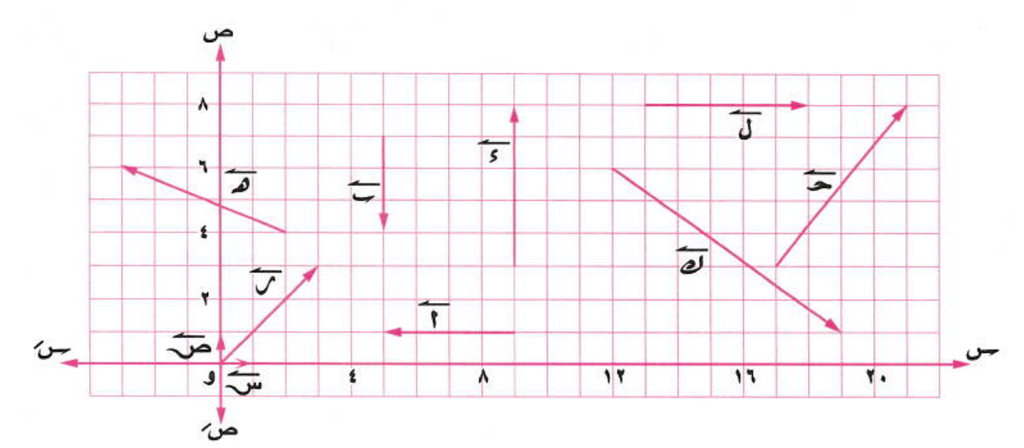
---

١٨ أنشئ نظامًا للإحداثيات المتعامدة فى المستوى حيث (و) هى نقطة الأصل وعيِّن عليه متجه الموضع الممثل للمتجه $\overrightarrow{\text{م}}$ = (٢ ، ٣) ثم ارسم :

(١) قطعة مستقيمة موجهة مبدؤها النقطة أ = (−٣ ، −٢) تمثل المتجه ٢ $\overrightarrow{\text{م}}$ وأوجد إحداثيى نقطة النهاية.

(٢) قطعة مستقيمة موجهة مبدؤها النقطة ب = (٤ ، ٥) تمثل المتجه − $\overrightarrow{\text{م}}$ وأوجد إحداثيى نقطة النهاية.

١٩ يبين الشكل تمثيلًا لبعض المتجهات فى المستوى الإحداثى المتعامد :



اكتب كل متجه بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين.

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ متجه وكان $\|\overrightarrow{أ}\| = ٤$ فأى من المتجهات الآتية يكون متجه وحدة ؟

(أ) $\frac{١}{٢}\overrightarrow{أ}$ (ب) $-\overrightarrow{أ}$ (جـ) $-\frac{١}{٤}\overrightarrow{أ}$ (د) $\frac{٣}{٤}\overrightarrow{أ}$

(٢) إذا كان : $\overrightarrow{أ} = ٣\,\overrightarrow{س} + ٤\,\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ب} = ٧\,\overrightarrow{س} + ٢٤\,\overrightarrow{ص}$

فإن : المتجه الذى له نفس معيار $\overrightarrow{ب}$ ويوازى المتجه $\overrightarrow{أ}$ هو ....

(أ) $٥\,\overrightarrow{س} + ٢٠\,\overrightarrow{ص}$ (ب) $١٥\,\overrightarrow{س} + ١٠\,\overrightarrow{ص}$

(جـ) $٢٠\,\overrightarrow{س} + ١٥\,\overrightarrow{ص}$ (د) $١٥\,\overrightarrow{س} + ٢٠\,\overrightarrow{ص}$

(٣) إذا كان : $\overrightarrow{أ} = ٢\,\overrightarrow{س} - \overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ب} = \overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{جـ} = \overrightarrow{س} + ٣\,\overrightarrow{ص}$

وكان $\overrightarrow{أ} \perp (ك\,\overrightarrow{ب} + \overrightarrow{جـ})$ فإن : ك = ...

(أ) -١ (ب) ١ (جـ) ٣ (د) ٤

(٤) أى الجمل الآتية غير صحيح ؟

(أ) إذا كان : $\overrightarrow{أ} = \overrightarrow{ب}$ فإن : $\|\overrightarrow{أ}\| = \|\overrightarrow{ب}\|$ (ب) إذا كان : $\|\overrightarrow{أ}\| = \|\overrightarrow{ب}\|$ فإن : $\overrightarrow{أ} = \overrightarrow{ب}$

(جـ) إذا كان : $\overrightarrow{أ} // \overrightarrow{ب}$ فإن : $\overrightarrow{أ} = ك\,\overrightarrow{ب}$ (د) إذا كان : $\overrightarrow{أ} = ك\,\overrightarrow{ب}$ فإن : $\overrightarrow{أ} // \overrightarrow{ب}$

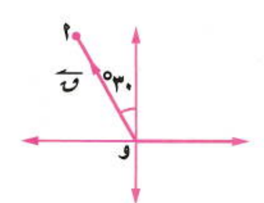
(٥) قياس الزاوية بين المتجهين : $\overrightarrow{أ} = ٦\,\overrightarrow{س} - ٢\,\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ب} = \overrightarrow{س} + ٣\,\overrightarrow{ص}$ هو ....

(أ) صفر (ب) ٣٠° (جـ) ٦٠° (د) ٩٠°

(٦) قياس الزاوية بين المتجهين $\overrightarrow{أ}$ = ٣ $\overrightarrow{س}$ + $\sqrt{٣}$ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ب}$ = -٤ $\overrightarrow{س}$ يساوى ....

(أ) ٤٥° (ب) ٦٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٥٠°

(٧) فى الشكل المقابل :



إذا كان : $\overrightarrow{و أ}$ يمثل القوة $\overrightarrow{ق}$ ، $\|\overrightarrow{ق}\|$ = ١٢ وحدة

فأى العبارات الآتية لا تمثل متجه القوة $\overrightarrow{ق}$ ؟

(أ) القوة $\overrightarrow{ق}$ معيارها ١٢ وحدة قوة وتعمل فى اتجاه ٦٠° شمال الغرب

(ب) $\overrightarrow{ق}$ = (١٢ وحدة قوة ، ١٢٠°)

(جـ) $\overrightarrow{ق}$ = - ٦ $\overrightarrow{س}$ + ٦ $\sqrt{٣}$ $\overrightarrow{ص}$

(د) القوة $\overrightarrow{ق}$ معيارها ١٢ وحدة قوة وتعمل فى اتجاة يصنع ٣٠° مع الشمال

(٨) إذا كانت الصورة القطبية للمتجه $\overrightarrow{أ}$ هى $\left(١٢ ، \frac{٢\pi}{٣}\right)$ فإن الصورة القطبية للمتجه $-\overrightarrow{أ}$ هى ....

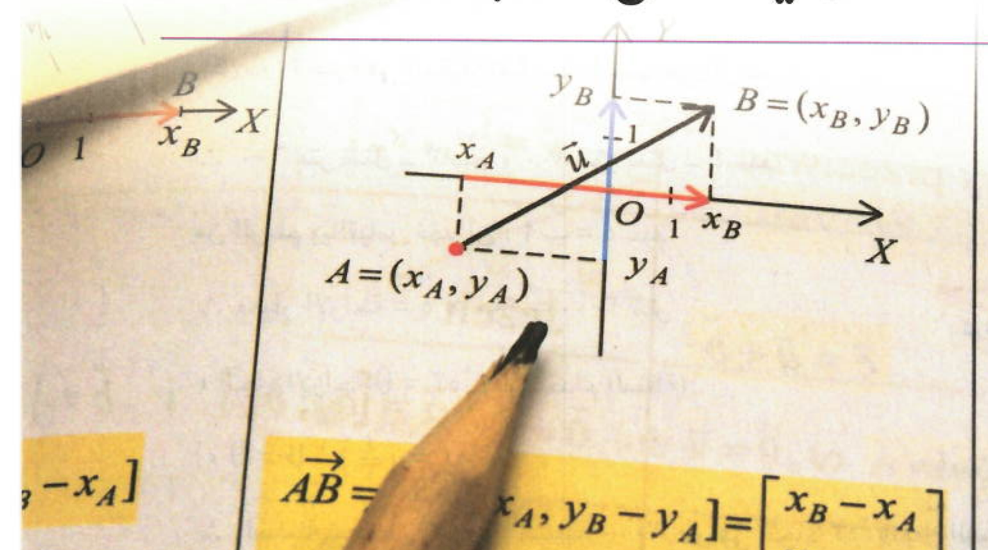
(أ) $\left(١٢ ، \frac{\pi}{٦}\right)$ (ب) $\left(١٢ ، \frac{٢\pi}{٣}\right)$ (جـ) $\left(٦ ، \frac{٤\pi}{٣}\right)$ (د) $\left(١٢ ، \frac{٥\pi}{٣}\right)$

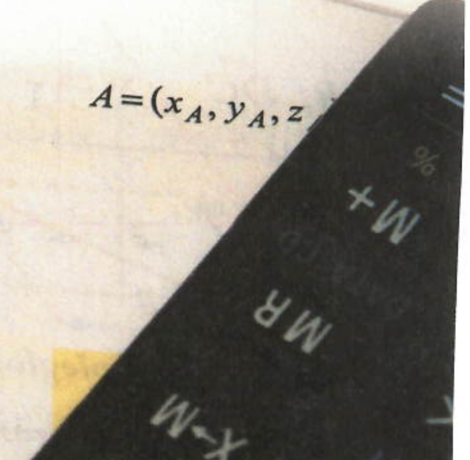
(٩) إذا دار متجه الموضع $\overrightarrow{أ}$ = $\left(\sqrt{٣} ، ١\right)$ حول نقطة الأصل بزاوية قياسها ٤٥° فى عكس اتجاه دوران عقارب الساعة فإن الصورة القطبية للمتجه $\overrightarrow{أ}$ بعد دورانه هى ....

(أ) (٢ ، ٣٠°) (ب) (٢ ، ٤٥°) (جـ) (٢ ، ٧٥°) (د) (٤ ، ٧٥°)



العمليات على المتجهـات





أولًا جمع المتجهات هندسيًا

الطريقة الأولى (قاعدة المثلث «علاقة شال») :

إذا كان $\overleftarrow{\text{أب}}$ تمثل المتجه $\overleftarrow{\text{م}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$ تمثل المتجه $\overleftarrow{\text{ن}}$

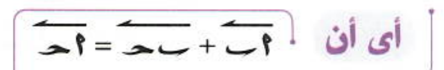
حيث إن نقطة النهاية (ب) للمتجه الأول $\overleftarrow{\text{م}}$ هي

نفسها نقطة البداية للمتجه الثانى $\overleftarrow{\text{ن}}$

فإن $\overleftarrow{\text{أحـ}}$ تمثل المتجه $\overleftarrow{\text{م}} + \overleftarrow{\text{ن}}$

أى أن $\overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{ب حـ}} = \overleftarrow{\text{أحـ}}$

أى أن الإزاحة $\overleftarrow{\text{أب}}$ متبوعة بإزاحة أخرى $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$ تكافئ إزاحة وحيدة $\overleftarrow{\text{أحـ}}$



إذا تحركت سفينة من الموقع (أ) فى الاتجاهات المعطاة حتى وصلت إلى الموقع (ب) ارسم مسار الرحلة بمقياس رسم مناسب مستخدمًا أدواتك الهندسية ثم أوجد من الرسم مقدار واتجاه إزاحة السفينة ($\overleftarrow{\text{أب}}$)

إذا كانت الاتجاهات هى :

١ مسافة ٦٠٠ متر شرقًا ثم مسافة ٨٠٠ متر شمالاً.

٢ مسافة ٢٠ كم غربًا ثم مسافة ٣٠ كم فى اتجاه ٦٠° شمال الغرب.

الحـــل

١ نفرض أن مقياس الرسم هو :

كل «٢٠٠ متر» فى الحقيقة تمثل بـ «١ سم» فى الرسم

∴ ٦٠٠ متر تمثل بـ ٣ سم ، ٨٠٠ متر تمثل بـ ٤ سم

من الرسم وبالقياس نجد أن : أب = ٥ سم

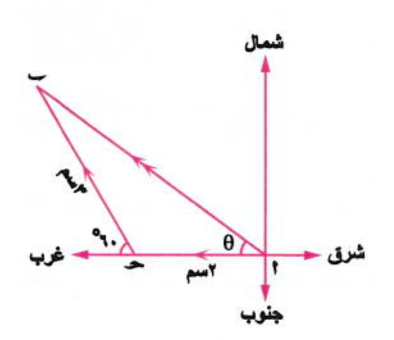
∴ معيار الإزاحة = ٥ × ٢٠٠ = ١٠٠٠ متر

، اتجاه الإزاحة θ = ٥٣° (باستخدام المنقلة)

أ، θ = ظا$^{-1}$ $\left(\frac{٤}{٣}\right)$ ≈ ٥٣°

∴ السفينة تبعد عن الموقع أ مسافة ١٠٠٠ متر فى اتجاه ٥٣° شمال الشرق.

٢ نفرض أن مقياس الرسم هو :



كل «١٠ كم» فى الحقيقة تمثل بـ «١ سم» فى الرسم

∴ ٢٠ كم تمثل بـ ٢ سم ، ٣٠ كم تمثل بـ ٣ سم

ومن الرسم وبالقياس نجد أن : أب ≈ ٤,٤ سم

∴ معيار الإزاحة = ٤,٤ × ١٠ = ٤٤ كم

، اتجاه الإزاحة θ ≈ ٣٧° (باستخدام المنقلة)

∴ السفينة تبعد عن الموقع أ مسافة ٤٤ كم

فى اتجاه ٣٧° شمال الغرب.

حاول بنفسك

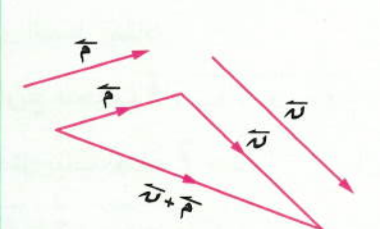
إذا تحركت سيارة من الموقع (أ) فى الاتجاهات المعطاة حتى وصلت إلى الموقع (ب) ارسم مسار الرحلة بمقياس رسم مناسب مستخدمًا أدواتك الهندسية ثم أوجد من الرسم مقدار واتجاه إزاحة السيارة ($\overrightarrow{أب}$) إذا كانت الاتجاهات هى :

١ مسافة ١٢٠٠ متر شرقًا ثم مسافة ١٦٠٠ متر شمالاً.

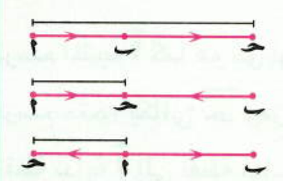
٢ مسافة ٢٥ كم شرقًا ثم ٣٠ كم فى اتجاه ٦٠° شمال الشرق.

٣ مسافة ٥٠ كم غربًا ثم مسافة ٤٠ كم فى اتجاه الشمال الغربى.

ملاحظات هامة



١ أى متجهين $\overleftarrow{م}$ ، $\overleftarrow{ن}$ يمكن جمعهما (إيجاد محصلتهما) بإنشاء متجهين متتاليين ومكافئين للمتجهين $\overleftarrow{م}$ ، $\overleftarrow{ن}$ كما فى الشكل المقابل.



٢ قاعدة شال لجمع متجهين صحيحة إذا كانت النقط أ ، ب ، ح تنتمى إلى مستقيم واحد.

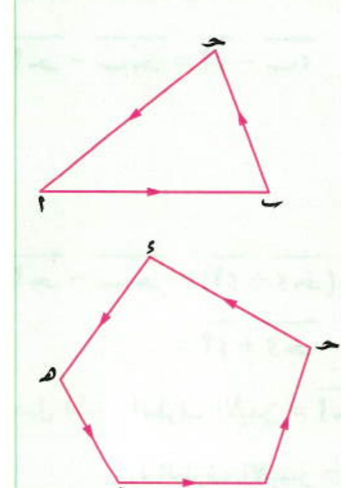
ففى الأشكال الثلاثة المقابلة يكون :

$\overleftarrow{أب} + \overleftarrow{بح} = \overleftarrow{أح}$

٣ $\overleftarrow{أب} = - \overleftarrow{بأ}$ **حيث إن :** $\overleftarrow{أب} + \overleftarrow{بأ} = \overleftarrow{و}$ «المتجه الصفرى»



٤ **فى أى مثلث أ ب ح يكون :** $\overleftarrow{أب} + \overleftarrow{بح} + \overleftarrow{حأ} = \overleftarrow{و}$



لأن : $(\overleftarrow{أب} + \overleftarrow{بح}) + \overleftarrow{حأ} = \overleftarrow{أح} + \overleftarrow{حأ} = \overleftarrow{و}$

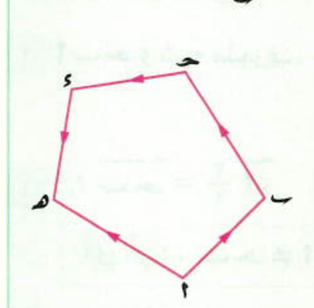
ويمكن تعميم ذلك بالنسبة لأى مضلع :

فمثلًا فى الشكل الخماسى أ ب ح ء هـ يكون :

$\overleftarrow{أب} + \overleftarrow{بح} + \overleftarrow{حء} + \overleftarrow{ءهـ} + \overleftarrow{هـأ} = \overleftarrow{و}$

٥ فى أى شكل رباعى يكون :

$\overleftarrow{أب} + \overleftarrow{بح} + \overleftarrow{حء} = \overleftarrow{أء}$



لأن $(\overleftarrow{أب} + \overleftarrow{بح}) + \overleftarrow{حء}$

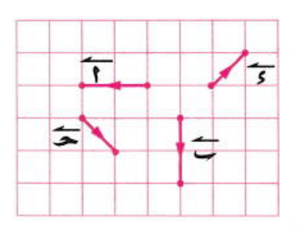
$= \overleftarrow{أح} + \overleftarrow{حء} = \overleftarrow{أء}$

ويمكن تعميم ذلك بالنسبة لأى مضلع :

فمثلًا فى الشكل الخماسى أ ب ح ء هـ يكون :

$\overleftarrow{أب} + \overleftarrow{بح} + \overleftarrow{حء} + \overleftarrow{ءهـ} = \overleftarrow{أهـ}$

مثال ٢



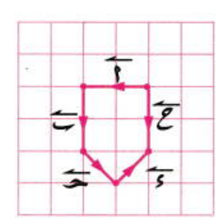
في الشكل المقابل :

أربع متجهات $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{حـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ء}}$

مثل بيانيًا المتجه $\overrightarrow{\text{ح}}$ حيث

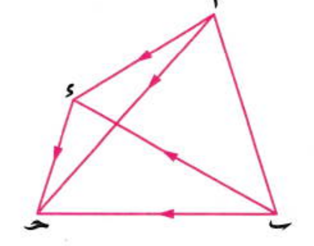
$\overrightarrow{\text{ح}} = \overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{حـ}} + \overrightarrow{\text{ء}}$

الحـل



نرسم المتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ كما هو موجود ثم من نهايته نرسم متجه يكافئ $\overrightarrow{\text{ب}}$ ومن نهايته نرسم متجه يكافئ $\overrightarrow{\text{حـ}}$ ومن نهايته نرسم متجه يكافئ $\overrightarrow{\text{ء}}$ ثم نرسم متجه من نقطة بداية $\overrightarrow{\text{أ}}$ إلى نقطة نهاية $\overrightarrow{\text{ء}}$ فيكون المتجه $\overrightarrow{\text{ح}}$ هو محصلة المتجهات .

مثال ٣



في أى شكل رباعى أ ب حـ ء أثبت أن :

$\overrightarrow{\text{أحـ}} - \overrightarrow{\text{ب حـ}} = \overrightarrow{\text{أء}} - \overrightarrow{\text{ب ء}}$

الحـل

$\overrightarrow{\text{أحـ}} - \overrightarrow{\text{ب حـ}} = (\overrightarrow{\text{أء}} + \overrightarrow{\text{ءحـ}}) - (\overrightarrow{\text{ب ء}} + \overrightarrow{\text{ءحـ}})$

$= \overrightarrow{\text{أء}} + \overrightarrow{\text{ءحـ}} - \overrightarrow{\text{ب ء}} - \overrightarrow{\text{ءحـ}} = \overrightarrow{\text{أء}} - \overrightarrow{\text{ب ء}}$

حل آخر: الطرف الأيمن $= \overrightarrow{\text{أحـ}} - \overrightarrow{\text{ب حـ}} = \overrightarrow{\text{أحـ}} + \overrightarrow{\text{حـ ب}} = \overrightarrow{\text{أب}}$ (١)

، الطرف الأيسر $= \overrightarrow{\text{أء}} - \overrightarrow{\text{ب ء}} = \overrightarrow{\text{أء}} + \overrightarrow{\text{ء ب}} = \overrightarrow{\text{أب}}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ الطرفان متساويان.



مثال ٤

أ ب حـ ء شكل رباعى فيه : $2\,\overrightarrow{\text{ب حـ}} = 3\,\overrightarrow{\text{أء}}$ أثبت أن :

١ أ ب حـ ء شبه منحرف.

٢ $\overrightarrow{\text{أحـ}} + \overrightarrow{\text{ب ء}} = \frac{5}{2}\,\overrightarrow{\text{أء}}$

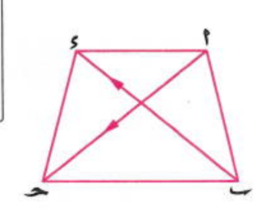
الحـل

١ ∵ $\overrightarrow{\text{ب حـ}} = \frac{3}{2}\,\overrightarrow{\text{أء}}$ ∴ $\overline{\text{ب حـ}} \parallel \overline{\text{أء}}$ ، ب حـ $= \frac{3}{2}$ أء

أى أن ب حـ ≠ أء

∴ الشكل أ ب حـ ء شبه منحرف.

> **تذكر أن**
> لإثبات أن الشكل الرباعى شبه منحرف نثبت أن فيه ضلعين متقابلين متوازيان وغير متساويين فى الطول.



٢ في Δ أءح : $\overleftarrow{\text{أح}} = \overleftarrow{\text{أء}} + \overleftarrow{\text{ءح}}$ (١)

، في Δ ءبح : $\overleftarrow{\text{بء}} = \overleftarrow{\text{بح}} + \overleftarrow{\text{حء}}$ (٢)

بجمع (١) ، (٢) :

$\therefore$ $\overleftarrow{\text{أح}} + \overleftarrow{\text{بء}} = \overleftarrow{\text{أء}} + \overleftarrow{\text{بح}} + \overleftarrow{\text{ءح}} + \overleftarrow{\text{حء}}$

$= \overleftarrow{\text{أء}} + \overleftarrow{\text{بح}} + \overleftarrow{\text{ءح}} - \overleftarrow{\text{ءح}}$

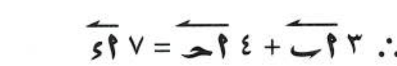
$= \overleftarrow{\text{أء}} + \overleftarrow{\text{بح}} = \overleftarrow{\text{أء}} + \frac{٣}{٢}\, \overleftarrow{\text{أء}}$

$= \frac{٥}{٢}\, \overleftarrow{\text{أء}}$

مثال ٥

أبح مثلث ، ء $\in$ $\overline{\text{بح}}$ بحيث ٣ $\overleftarrow{\text{بء}}$ = ٤ $\overleftarrow{\text{ءح}}$ أثبت أن : ٣ $\overleftarrow{\text{أب}}$ + ٤ $\overleftarrow{\text{أح}}$ = ٧ $\overleftarrow{\text{أء}}$

الحل



$\because$ $\overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{بء}} = \overleftarrow{\text{أء}}$ $\quad\therefore$ ٣ $\overleftarrow{\text{أب}}$ + ٣ $\overleftarrow{\text{بء}}$ = ٣ $\overleftarrow{\text{أء}}$ (١)

، $\because$ $\overleftarrow{\text{أح}} + \overleftarrow{\text{حء}} = \overleftarrow{\text{أء}}$ $\quad\therefore$ ٤ $\overleftarrow{\text{أح}}$ + ٤ $\overleftarrow{\text{حء}}$ = ٤ $\overleftarrow{\text{أء}}$ (٢)

وبجمع (١) ، (٢) :

$\therefore$ ٣ $\overleftarrow{\text{أب}}$ + ٤ $\overleftarrow{\text{أح}}$ + ٣ $\overleftarrow{\text{بء}}$ + ٤ $\overleftarrow{\text{حء}}$ = ٧ $\overleftarrow{\text{أء}}$

$\therefore$ ٣ $\overleftarrow{\text{أب}}$ + ٤ $\overleftarrow{\text{أح}}$ + ٣ $\overleftarrow{\text{بء}}$ − ٤ $\overleftarrow{\text{ءح}}$ = ٧ $\overleftarrow{\text{أء}}$

لكن : ٣ $\overleftarrow{\text{بء}}$ = ٤ $\overleftarrow{\text{ءح}}$ $\quad\therefore$ ٣ $\overleftarrow{\text{أب}}$ + ٤ $\overleftarrow{\text{أح}}$ = ٧ $\overleftarrow{\text{أء}}$

مثال ٦

إذا كان : ٤ $\overleftarrow{\text{م}}$ − ٣ $\overleftarrow{\text{س ص}}$ = ٤ $\overleftarrow{\text{ع ص}}$ + ٧ $\overleftarrow{\text{ص س}}$ أثبت أن : $\overleftarrow{\text{م}}$ = $\overleftarrow{\text{ع س}}$

الحل

٤ $\overleftarrow{\text{م}}$ = ٤ $\overleftarrow{\text{ع ص}}$ + ٧ $\overleftarrow{\text{ص س}}$ + ٣ $\overleftarrow{\text{س ص}}$ = ٤ $\overleftarrow{\text{ع ص}}$ + ٧ $\overleftarrow{\text{ص س}}$ − ٣ $\overleftarrow{\text{ص س}}$

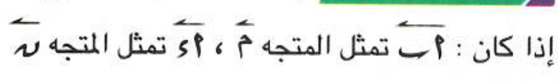
= ٤ $\overleftarrow{\text{ع ص}}$ + ٤ $\overleftarrow{\text{ص س}}$ = ٤ ($\overleftarrow{\text{ع ص}}$ + $\overleftarrow{\text{ص س}}$) = ٤ $\overleftarrow{\text{ع س}}$

$\therefore$ $\overleftarrow{\text{م}}$ = $\overleftarrow{\text{ع س}}$

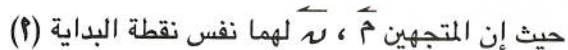
حاول بنفسك

١ أبحء شكل رباعي فإذا كان : $\overleftarrow{\text{أب}}$ = $\frac{٥}{٣}$ $\overleftarrow{\text{ءح}}$ أثبت أن : $\overleftarrow{\text{أء}}$ − $\overleftarrow{\text{بح}}$ = $\frac{٢}{٣}$ $\overleftarrow{\text{ءح}}$

٢ إذا كان : ٥ $\overleftarrow{\text{ن}}$ − ٤ $\overleftarrow{\text{بأ}}$ = ٩ $\overleftarrow{\text{أب}}$ + ٥ $\overleftarrow{\text{بح}}$ أثبت أن : $\overleftarrow{\text{ن}}$ = $\overleftarrow{\text{أح}}$

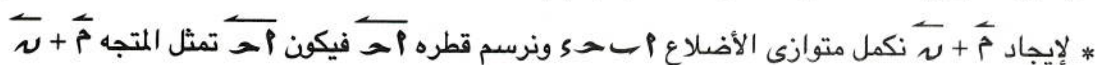


الطريقة الثانية (قاعدة متوازى الأضلاع) :



إذا كان : $\overrightarrow{\text{أب}}$ تمثل المتجه $\overrightarrow{\text{م}}$ ، $\overrightarrow{\text{أء}}$ تمثل المتجه $\overrightarrow{\text{ن}}$

حيث إن المتجهين $\overrightarrow{\text{م}}$ ، $\overrightarrow{\text{ن}}$ لهما نفس نقطة البداية (أ)

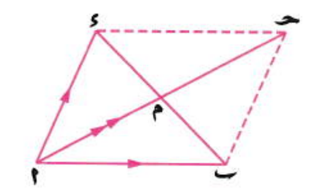


* لإيجاد $\overrightarrow{\text{م}} + \overrightarrow{\text{ن}}$ نكمل متوازى الأضلاع أ ب حـ ء ونرسم قطره $\overrightarrow{\text{أحـ}}$ فيكون $\overrightarrow{\text{أحـ}}$ تمثل المتجه $\overrightarrow{\text{م}} + \overrightarrow{\text{ن}}$

أى أن $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{أء}} = \overrightarrow{\text{أحـ}}$

وذلك لأن $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{أء}} = \overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{ب حـ}} = \overrightarrow{\text{أحـ}}$ (**لاحظ أن :** $\overrightarrow{\text{أء}}$ يكافئ $\overrightarrow{\text{ب حـ}}$)

* **فى الشكل المقابل :**



إذا كانت : م هى نقطة تقاطع قطرى متوازى الأضلاع فإن : $\overrightarrow{\text{أحـ}} = ٢ \overrightarrow{\text{أم}}$

وبالتالى يكون : $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{أء}} = ٢ \overrightarrow{\text{أم}}$

ويمكننا أن نصل إلى نفس هذه النتيجة إذا لاحظنا أن :

$\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{ب م}} = \overrightarrow{\text{أم}}$ ، $\overrightarrow{\text{أء}} + \overrightarrow{\text{ء م}} = \overrightarrow{\text{أم}}$

وبالجمع نجد أن : $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{أء}} + \overrightarrow{\text{ب م}} + \overrightarrow{\text{ء م}} = ٢ \overrightarrow{\text{أم}}$

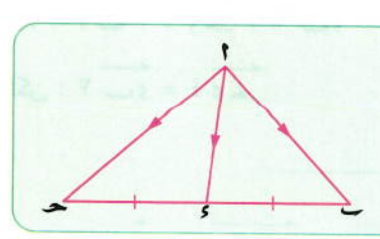
، $\because \overrightarrow{\text{ب م}} = \overrightarrow{\text{م ء}} = -\overrightarrow{\text{ء م}}$ $\therefore \overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{أء}} - \overrightarrow{\text{ء م}} + \overrightarrow{\text{ء م}} = ٢ \overrightarrow{\text{أم}}$ $\therefore \overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{أء}} = ٢ \overrightarrow{\text{أم}}$

وبالتالى يمكننا استنتاج الملاحظة التالية :



ملاحظة

فى الشكل المقابل :



إذا كان : $\overline{\text{أء}}$ متوسطًا فى Δ أ ب حـ

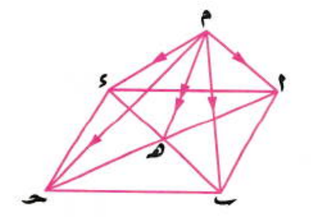
فإن : $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{أحـ}} = ٢ \overrightarrow{\text{أء}}$

مثال ٧

أ ب حـ ء متوازى أضلاع ، م نقطة ما فى مستويه ، هـ نقطة تقاطع قطريه $\overline{\text{أحـ}}$ ، $\overline{\text{ب ء}}$

أثبت أن : $\overrightarrow{\text{م أ}} + \overrightarrow{\text{م ب}} + \overrightarrow{\text{م حـ}} + \overrightarrow{\text{م ء}} = ٤ \overrightarrow{\text{م هـ}}$

الحل



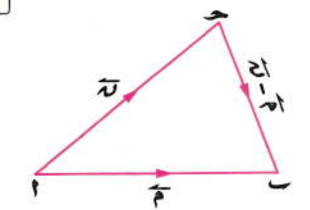
$\overrightarrow{\text{م أ}} + \overrightarrow{\text{م ب}} + \overrightarrow{\text{م حـ}} + \overrightarrow{\text{م ء}} = (\overrightarrow{\text{م أ}} + \overrightarrow{\text{م حـ}}) + (\overrightarrow{\text{م ب}} + \overrightarrow{\text{م ء}})$

ولكن $\overrightarrow{\text{م أ}} + \overrightarrow{\text{م حـ}} = ٢ \overrightarrow{\text{م هـ}}$ حيث هـ منتصف $\overline{\text{أحـ}}$

، $\overrightarrow{\text{م ب}} + \overrightarrow{\text{م ء}} = ٢ \overrightarrow{\text{م هـ}}$ حيث هـ منتصف $\overline{\text{ب ء}}$

$\therefore \overrightarrow{\text{م أ}} + \overrightarrow{\text{م ب}} + \overrightarrow{\text{م حـ}} + \overrightarrow{\text{م ء}} = ٢ \overrightarrow{\text{م هـ}} + ٢ \overrightarrow{\text{م هـ}} = ٤ \overrightarrow{\text{م هـ}}$

ثانيًا طرح متجهين هندسيًا



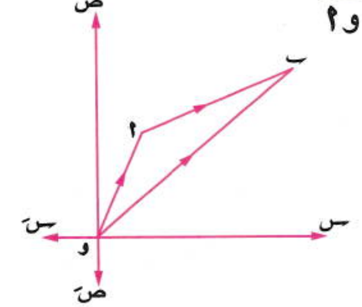
إذا كان : $\overrightarrow{أب}$ تمثل المتجه $\overrightarrow{م}$ ، $\overrightarrow{أحـ}$ تمثل المتجه $\overrightarrow{ن}$

فإن : $\overrightarrow{حـب}$ تمثل المتجه $\overrightarrow{م} - \overrightarrow{ن}$

أى أن $\overrightarrow{أب} - \overrightarrow{أحـ} = \overrightarrow{حـب}$

وذلك لأن $\overrightarrow{أب} - \overrightarrow{أحـ} = \overrightarrow{أب} + \overrightarrow{حـأ} = \overrightarrow{حـأ} + \overrightarrow{أب} = \overrightarrow{حـب}$

التعبير عن القطعة المستقيمة الموجهة $\overrightarrow{أب}$ بدلالة متجهى الموضع لطرفيها



إذا كانت : أ $(س_١ ، ص_١)$ ، ب $(س_٢ ، ص_٢)$ **فإن :** $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{وب} - \overrightarrow{وأ}$

حيث $\overrightarrow{وب}$ ، $\overrightarrow{وأ}$ متجها موضع للنقطتين ب ، أ على الترتيب.

∴ $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ}$

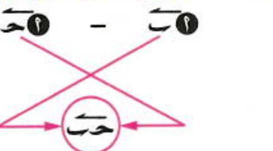
فمثلًا إذا كانت : أ (٥ ، ٣) ، ب (−٢ ، ٤)

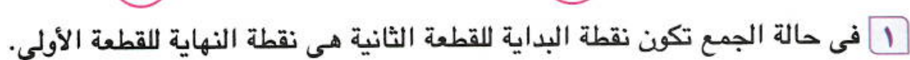
فإن : $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ}$ = (−٢ ، ٤) − (٥ ، ٣) = (−٧ ، ١)

تذكر أن

◂ عند تطبيق قاعدتى الجمع والطرح السابقتين على قطعتين مستقيمتين موجهتين يجب مراعاة :

$\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{بحـ}$ → $\overrightarrow{أحـ}$ $\qquad$ $\overrightarrow{أب} - \overrightarrow{أحـ}$ → $\overrightarrow{حـب}$





١ فى حالة الجمع تكون نقطة البداية للقطعة الثانية هى نقطة النهاية للقطعة الأولى.

٢ فى حالة الطرح يكون للقطعتين نفس نقطة البداية.



مثال ٨

أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : أ (٢ ، −٢) ، ب (٤ ، −٢) ، حـ (٢ ، ٣) أوجد إحداثيى النقطة ء



الحل

∵ أ ب حـ ء متوازى أضلاع. ∴ $\overrightarrow{أء} = \overrightarrow{بحـ}$ ∴ $\overrightarrow{ء} - \overrightarrow{أ} = \overrightarrow{حـ} - \overrightarrow{ب}$

∴ $\overrightarrow{ء} = \overrightarrow{أ} + \overrightarrow{حـ} - \overrightarrow{ب}$ = (٢ ، −٢) + (٢ ، ٣) − (٤ ، −٢) = (٠ ، ٣) ∴ النقطة ء هى (٠ ، ٣)

حاول بنفسك

إذا كان : أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : أ = (س ، ١) ، ب = (٥ ، ٢)

، حـ = (−٣ ، −٤) ، ء = (٢ ، ص) **أوجد قيمتى :** س ، ص

مثال ٩

أ ب حـ ء شبه منحرف فيه: أ(−١ ، ١) ، ب(٣ ، ٣) ، حـ(٥ ، −١) ، ء(−٥ ، ك)

١ إذا كان: $\overrightarrow{\text{أب}}$ // $\overrightarrow{\text{ءحـ}}$ فأوجد قيمة: ك   ٢ أثبت أن: $\overrightarrow{\text{حـب}}$ ⊥ $\overrightarrow{\text{أب}}$

٣ أوجد: مساحة شبه المنحرف أ ب حـ ء

الحل

∵ $\overrightarrow{\text{أب}}$ = $\vec{\text{ب}}$ − $\vec{\text{أ}}$ = (٣ ، ٣) − (−١ ، ١) = (٤ ، ٢)

، $\overrightarrow{\text{ءحـ}}$ = $\vec{\text{حـ}}$ − $\vec{\text{ء}}$ = (٥ ، −١) − (−٥ ، ك) = (١٠ ، −١ − ك)

، ∵ $\overrightarrow{\text{أب}}$ // $\overrightarrow{\text{ءحـ}}$ ∴ ٤ (−١ − ك) − ٢ × ١٠ = ٠

∴ −٤ − ٤ك = ٢٠   ∴ −٤ك = ٢٤   ∴ ك = −٦   (المطلوب أولاً)

، ∵ $\overrightarrow{\text{حـب}}$ = $\vec{\text{ب}}$ − $\vec{\text{حـ}}$ = (٣ ، ٣) − (٥ ، −١) = (−٢ ، ٤) ، $\overrightarrow{\text{أب}}$ = (٤ ، ٢)

∴ $\overrightarrow{\text{حـب}}$ ⊥ $\overrightarrow{\text{أب}}$ لأن: (−٢) × ٤ + ٤ × ٢ = ٠   (المطلوب ثانياً)

∵ ‖$\overrightarrow{\text{أب}}$‖ = √(١٦ + ٤) = √٢٠ = ٢√٥ وحدة طول.

، ∵ ك = −٦   ∴ $\overrightarrow{\text{ءحـ}}$ = (١٠ ، ٥)

∴ ‖$\overrightarrow{\text{ءحـ}}$‖ = √(١٠٠ + ٢٥) = ٥√٥ وحدة طول.

∵ ‖$\overrightarrow{\text{حـب}}$‖ = √(٤ + ١٦) = ٢√٥ وحدة طول.

∴ مساحة شبه المنحرف أ ب حـ ء = (‖$\overrightarrow{\text{أب}}$‖ + ‖$\overrightarrow{\text{ءحـ}}$‖) / ٢ × ‖$\overrightarrow{\text{حـب}}$‖

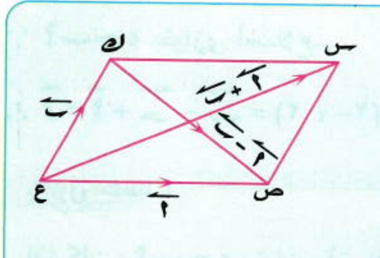
= (٢√٥ + ٥√٥) / ٢ × ٢√٥ = ٣٥ وحدة مربعة.   (المطلوب ثالثاً)

حاول بنفسك

أ ب حـ مثلث فيه: أ(٣ ، ٢) ، ب(٢ ، −١) ، حـ(−٤ ، ١)

١ أثبت أن: $\overrightarrow{\text{أب}}$ ⊥ $\overrightarrow{\text{ب حـ}}$ ٢ أوجد: مساحة Δ أ ب حـ

ملاحظة



في الشكل المقابل:

إذا كان: $\vec{\text{أ}}$ ، $\vec{\text{ب}}$ يمثلان ضلعان متجاوران

في متوازي الإضلاع فإن: ($\vec{\text{أ}}$ + $\vec{\text{ب}}$) ، ($\vec{\text{أ}}$ − $\vec{\text{ب}}$)

يمثلان قطري متوازي الأضلاع وبالتالي يكون

‖$\vec{\text{أ}}$ + $\vec{\text{ب}}$‖ = ‖$\vec{\text{أ}}$ − $\vec{\text{ب}}$‖ إذا كان الشكل مستطيل أي أن $\vec{\text{أ}}$ ⊥ $\vec{\text{ب}}$

تمارين 3

على العمليات على المتجهات

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسي • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (٣ ، −٢) ، $\overrightarrow{ب}$ = (١ ، ٢) فإن : $\overrightarrow{أب}$ = ……………

(أ) (٣ ، −٤) (ب) (−٢ ، ٤) (جـ) (٤ ، ٠) (د) (٢ ، −٤)

(٢) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (−١ ، ٥) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٢ ، ١) فإن : ‖$\overrightarrow{أب}$‖ = ……………

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(٣) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (٤ ، −٢) ، $\overrightarrow{أب}$ = (٣ ، ٥) فإن : $\overrightarrow{ب}$ = ……………

(أ) (١ ، −٧) (ب) (٧ ، ٣) (جـ) (−١ ، ٧) (د) (٣ ، ٧)

(٤) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = ٥ $\overrightarrow{س}$ − ٦ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ب}$ = (١ ، ٢) فإن : $\overrightarrow{ب أ}$ = ……………

(أ) ٤ $\overrightarrow{س}$ − ٨ $\overrightarrow{ص}$ (ب) −٤ $\overrightarrow{س}$ + ٨ $\overrightarrow{ص}$

(جـ) ٥ $\overrightarrow{س}$ − ٤ $\overrightarrow{ص}$ (د) ٨ $\overrightarrow{س}$ − ٤ $\overrightarrow{ص}$

(٥) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (٧ ، ٠) ، $\overrightarrow{ب}$ = $\left(٥\sqrt{٢} ، \frac{٣\pi}{٤}\right)$ فإن : ‖$\overrightarrow{أب}$‖ = ……………

(أ) ١٢ (ب) ١٣ (جـ) ١٤ (د) $\sqrt{٢٩}$

(٦) $\overrightarrow{أب}$ − $\overrightarrow{ب أ}$ = ……………

(أ) صفر (ب) ٢ $\overrightarrow{أب}$ (جـ) ٢ $\overrightarrow{ب أ}$ (د) $\overrightarrow{و}$

(٧) إذا كان : $\overrightarrow{أب}$ = ٣ $\overrightarrow{س}$ + ٣ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ب حـ}$ = $\overrightarrow{ص}$ فإن : ‖$\overrightarrow{أحـ}$‖ = ……………

(أ) ٦ (ب) ٣$\sqrt{٢}$ (جـ) ١ (د) ٥

(٨) إذا كان : $\overrightarrow{أب}$ = (٢ ، ٣) ، $\overrightarrow{حـ ب}$ = (−٣ ، ٥) فإن : $\overrightarrow{أحـ}$ = ……………

(أ) (٥ ، −٢) (ب) (−٨ ، ١) (جـ) (−٢ ، ٥) (د) (٢ ، ٥)

(٩) إذا كان : أ (٢ ، ٣) ، ب (٥ ، ٦) فإن نقطة حـ حيث ٢ $\overrightarrow{أحـ}$ = $\overrightarrow{حـ ب}$ هي ……………

(أ) (−٣ ، ٤) (ب) (−٣ ، −٤) (جـ) (٣ ، −٤) (د) (٣ ، ٤)

(١٠) إذا كان : ٣ $\overrightarrow{أ}$ + $\overrightarrow{ب}$ = (٥ ، −٢) ، $\overrightarrow{أب}$ = (−٣ ، ١٠) فإن : $\overrightarrow{أ}$ = ……………

(أ) (٢ ، −١) (ب) (−١ ، ٢) (جـ) (٢ ، −٣) (د) (−٢ ، ٣)

(١١) إذا كان : أ = (٣ ، −٥) ، ب = (−١ ، ٥) وكان : م = (٦ ، ك) وكان $\overrightarrow{أب}$ // $\overrightarrow{م}$

فإن : ك = ...

(أ) −١٥ (ب) −١٠ (جـ) −٥ (د) ٥

(١٢) إذا كان : $\overrightarrow{أب}$ = (٢ ، ٦) ، $\overrightarrow{أحـ}$ = (−٢ ، ٩) فإن : ‖$\overrightarrow{بحـ}$‖ = ...

(أ) ١٥ (ب) ١٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(١٣) إذا كانت : م منتصف $\overline{سص}$ فإن : $\overrightarrow{سم}$ + $\overrightarrow{صم}$ = ...

(أ) ٢ $\overrightarrow{سم}$ (ب) $\overrightarrow{سص}$ (جـ) $\vec{و}$ (د) $\overrightarrow{صس}$

(١٤) إذا كان : أ ب حـ مثلثًا فإن : $\overrightarrow{أب}$ + $\overrightarrow{بحـ}$ + $\overrightarrow{حـأ}$ = ...

(أ) $\vec{و}$ (ب) ٢ $\overrightarrow{أحـ}$ (جـ) ٢ $\overrightarrow{حـأ}$ (د) $\overrightarrow{أحـ}$

(١٥) إذا كان : أ ب حـ مثلثًا فإن : $\overrightarrow{أب}$ + $\overrightarrow{بحـ}$ + $\overrightarrow{أحـ}$ = ...

(أ) $\vec{و}$ (ب) ٢ $\overrightarrow{أحـ}$ (جـ) ٢ $\overrightarrow{حـأ}$ (د) $\overrightarrow{أحـ}$

(١٦) إذا كان : أ ب حـ ء شكلًا رباعيًا فإن : $\overrightarrow{أب}$ + $\overrightarrow{بحـ}$ + $\overrightarrow{حـء}$ = ...

(أ) $\overrightarrow{أحـ}$ (ب) $\overrightarrow{أء}$ (جـ) $\vec{و}$ (د) ٢ $\overrightarrow{أء}$

(١٧) إذا كان : أ ب حـ مثلثًا فإن : $\overrightarrow{بأ}$ − $\overrightarrow{بحـ}$ = ...

(أ) $\overrightarrow{بحـ}$ (ب) $\overrightarrow{حـب}$ (جـ) $\overrightarrow{حـأ}$ (د) $\overrightarrow{أحـ}$

(١٨) إذا كان : أ ب حـ ء متوازى أضلاع فإن : $\overrightarrow{أب}$ − $\overrightarrow{حـء}$ = ...

(أ) $\overrightarrow{حـء}$ (ب) $\vec{و}$ (جـ) −٢ $\overrightarrow{أب}$ (د) ٢ $\overrightarrow{أب}$

(١٩) أى مما يأتى يكافئ المتجه الصفرى ؟

(أ) $\overrightarrow{أب}$ + $\overrightarrow{حـء}$ + $\overrightarrow{بحـ}$ (ب) $\overrightarrow{حـء}$ − $\overrightarrow{ءك}$ − $\overrightarrow{كحـ}$

(جـ) $\overrightarrow{كى}$ − $\overrightarrow{كء}$ − $\overrightarrow{ءى}$ (د) $\overrightarrow{أحـ}$ − $\overrightarrow{أن}$ − $\overrightarrow{حـن}$

(٢٠) أ ب حـ ء متوازى أضلاع ، $\overline{أحـ}$ ∩ $\overline{بء}$ = {م} فإن : $\overrightarrow{أب}$ + $\overrightarrow{أء}$ = ...

(أ) $\overrightarrow{حـأ}$ (ب) $\overrightarrow{بء}$ (جـ) ٢ $\overrightarrow{محـ}$ (د) ٢ $\overrightarrow{ءم}$

(٢١) في الشكل المقابل :

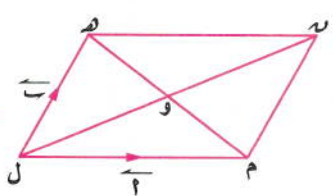
جميع العبارات التالية تعبر عن $\overrightarrow{أحـ}$ عدا العبارة ....

(أ) ٢ $\overrightarrow{أم}$ (ب) $\overrightarrow{أء}$ + $\overrightarrow{ءحـ}$

(جـ) $\overrightarrow{أب}$ + $\overrightarrow{بء}$ (د) $\overrightarrow{بحـ}$ + $\overrightarrow{ءحـ}$

(٢٢) فى المثلث أ ب حـ : إذا كانت ء منتصف $\overline{بحـ}$ فإن : $\overrightarrow{بأ}$ + $\overrightarrow{حـأ}$ + $\overrightarrow{أء}$ = ...

(أ) $\overrightarrow{بحـ}$ (ب) $\overrightarrow{ءأ}$ (جـ) ٢ $\overrightarrow{ءأ}$ (د) $\overrightarrow{حـب}$



(٢٣) في متوازي الأضلاع المرسوم أمامك

$\overrightarrow{وم} + \overrightarrow{ون} =$ ....

(أ) $\overrightarrow{أ}$ (ب) $\overrightarrow{ب}$

(جـ) $\frac{1}{2}(\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب})$ (د) $\frac{1}{2}(\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب})$

(٢٤) إذا كان : أ ب حـ ء مستطيل فإن : $\overrightarrow{أحـ} + \overrightarrow{بء} =$ ....

(أ) $\overrightarrow{حـء}$ (ب) ٢ $\overrightarrow{بأ}$ (جـ) $\overrightarrow{بحـ}$ (د) ٢ $\overrightarrow{بحـ}$

(٢٥) إذا كان : $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{حـء}$ حيث $\overrightarrow{أب} =$ (٦ ، ٤) ، $\overrightarrow{حـ} =$ (−١ ، ٣) فإن : $\overrightarrow{ء} =$ ....

(أ) (٥ ، ٧) (ب) (−٥ ، −٧) (جـ) (−٥ ، ٧) (د) (٧ ، ٧)

(٢٦) أ ب حـ ء متوازي أضلاع فيه : أ = (٧ ، −٢) ، ب = (١٥ ، ٤) ، حـ = (٩ ، ٦)

فإن نقطة ء = ...

(أ) (١ ، ٠) (ب) (٠ ، ١) (جـ) (−١ ، ٠) (د) (٠ ، −١)

(٢٧) إذا كان : أ ب حـ ء هـ شكل خماسي فإن : $\overrightarrow{ءهـ} + \overrightarrow{هـأ} - \overrightarrow{بأ} =$ ....

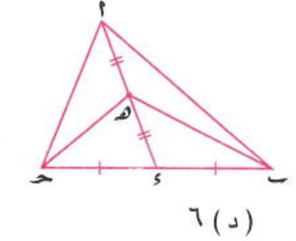
(أ) $\overrightarrow{ءب}$ (ب) $\overrightarrow{أء}$ (جـ) $\overrightarrow{حـهـ}$ (د) $\overrightarrow{بء}$

(٢٨) إذا كان : $\overrightarrow{أب} = ٢\,\overrightarrow{أحـ}$ فإن : ....

(أ) Δ أ ب حـ قائم الزاوية. (ب) ب منتصف $\overline{أحـ}$

(جـ) $\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{أحـ} = ٢\,\overrightarrow{حـب}$ (د) حـ منتصف $\overline{أب}$

(٢٩) في الشكل المقابل :

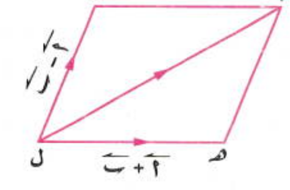


أ ب حـ مثلث ، إذا كانت ء منتصف $\overline{بحـ}$ ، هـ منتصف $\overline{أء}$

فإن : $\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{أحـ} =$ .... $\overrightarrow{أهـ}$

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ٦

(٣٠) في الشكل المقابل :



أ ب حـ ء مستطيل ، هـ منتصف $\overline{أء}$

، $\overrightarrow{هـب} + \overrightarrow{بأ} - \overrightarrow{ءحـ} =$ ....

(أ) $\overrightarrow{هـب}$ (ب) $\overrightarrow{بهـ}$

(جـ) $\overrightarrow{هـحـ}$ (د) $\overrightarrow{حـهـ}$

(٣١) في الشكل المقابل :



$\overrightarrow{لم}$ متجه يمثل ....

(أ) ٢ $\overrightarrow{أ}$ (ب) ٢ $\overrightarrow{ب}$

(جـ) ٢ $\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب}$ (د) ٢ $\overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ}$

(٣٢) في الشكل المقابل :

أب جـ ء مستطيل فيه : هـ منتصف $\overline{\text{جـ ء}}$ فإن :

أولًا : $\overrightarrow{\text{أهـ}} + \overrightarrow{\text{ءهـ}} =$ ....

(أ) $\overrightarrow{\text{أب}}$ (ب) $\overrightarrow{\text{أجـ}}$

(جـ) $٢ \overrightarrow{\text{أء}}$ (د) $\overrightarrow{\text{جـ أ}}$

ثانيًا : $\overrightarrow{\text{أء}} - ٢ \overrightarrow{\text{أهـ}} + \overrightarrow{\text{أب}} =$ ....

(أ) $\overrightarrow{\text{أء}}$ (ب) $٢ \overrightarrow{\text{جـ ب}}$ (جـ) $\overrightarrow{\text{جـ ب}}$ (د) $٢ \overrightarrow{\text{أء}}$

(٣٣) أب جـ مثلث فيه : ء $\in \overline{\text{ب جـ}}$ فإذا كان : $\overrightarrow{\text{أجـ}} + \overrightarrow{\text{أء}} + \overrightarrow{\text{جـ ب}} + \overrightarrow{\text{ء ب}} = \text{ك} \overrightarrow{\text{أب}}$

فإن : ك = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٣٤) في $\triangle$ أب جـ إذا كان : ء ، هـ منتصفي $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{أجـ}}$ على الترتيب وكان $\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{م}}$ ، $\overrightarrow{\text{أجـ}} = \overrightarrow{\text{ن}}$

فإن : $\overrightarrow{\text{ءهـ}} =$ ....

(أ) $\overrightarrow{\text{م}} + \overrightarrow{\text{ن}}$ (ب) $\overrightarrow{\text{م}} - \overrightarrow{\text{ن}}$

(جـ) $\frac{١}{٢} (\overrightarrow{\text{م}} - \overrightarrow{\text{ن}})$ (د) $-\frac{١}{٢} (\overrightarrow{\text{م}} - \overrightarrow{\text{ن}})$

(٣٥) أب جـ ء هـ و شكل سداسي منتظم ، $\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{م}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب جـ}} = \overrightarrow{\text{ن}}$ ، $\overrightarrow{\text{جـ ء}} = \overrightarrow{\text{ك}}$

فإن : $\overrightarrow{\text{أهـ}} =$ .... (بدلالة $\overrightarrow{\text{م}}$ ، $\overrightarrow{\text{ن}}$ ، $\overrightarrow{\text{ك}}$)

(أ) $\overrightarrow{\text{م}} + \overrightarrow{\text{ن}} + \overrightarrow{\text{ك}}$ (ب) $\overrightarrow{\text{م}} - \overrightarrow{\text{ن}} + \overrightarrow{\text{ك}}$ (جـ) $\overrightarrow{\text{ن}} + \overrightarrow{\text{ك}}$ (د) $\overrightarrow{\text{ك}} - \overrightarrow{\text{م}}$

(٣٦) في الشكل المقابل :

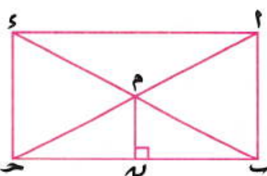
أب جـ ء هـ و سداسي منتظم فإن :

$(\overrightarrow{\text{أب}} - \overrightarrow{\text{جـ ب}}) + \overrightarrow{\text{أو}} + \overrightarrow{\text{ءهـ}} =$ ....

(أ) $\overrightarrow{\text{وهـ}}$ (ب) $\overrightarrow{\text{أهـ}}$

(جـ) $\overrightarrow{\text{أء}}$ (د) $\overrightarrow{\text{أجـ}}$

(٣٧) في الشكل المقابل :



إذا كان أب جـ ء مستطيل ، $\overline{\text{م ن}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$

فإن : $\overrightarrow{\text{أجـ}} + \overrightarrow{\text{ء ب}} =$ ....

(أ) $٢ \overrightarrow{\text{ب أ}}$ (ب) $٢ \overrightarrow{\text{أء}}$

(جـ) $٤ \overrightarrow{\text{م ن}}$ (د) $\overrightarrow{\text{صفر}}$

(٣٨) **فى الشكل المقابل :**

أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : و منتصف $\overline{\text{أب}}$

، وكان : $\overleftrightarrow{\text{ءو}} \cap \overleftrightarrow{\text{حـب}} = \{\text{هـ}\}$

فإن : $\overrightarrow{\text{ءأ}} + \overrightarrow{\text{ءب}} = \text{..............}$

(أ) $\overrightarrow{\text{ءو}}$ (ب) $\overrightarrow{\text{أو}} + \overrightarrow{\text{بو}}$ (جـ) ٢ $\overrightarrow{\text{وهـ}}$ (د) ٢ $\overrightarrow{\text{بهـ}}$

(٣٩) **فى الشكل المقابل :**

أ ب حـ ء شبه منحرف

إذا كان : $\overrightarrow{\text{أء}} + \overrightarrow{\text{بحـ}} = \text{ك}\ \overrightarrow{\text{صس}}$

فإن قيمة : ك = ... حيث ك ∈ ح

(أ) -٢ (ب) -١ (جـ) ١ (د) ٢

(٤٠) إذا كان : أ = (٢ ، ٢) ، ب = (٤ ، -٢) ، حـ = (-٢ ، ٠) ، ء = (١ ، ك)

وكان : $\overrightarrow{\text{ءأ}} \perp \overrightarrow{\text{حـب}}$ فإن : ك = ...

(أ) ١ (ب) -١ (جـ) $\frac{٧}{٢}$ (د) ٢

(٤١) إذا كان أ ب حـ ء متوازى أضلاع ، أ (١ ، ٢) ، ب (س ، -٣) ، حـ (-٣ ، ٥) ، ء (-٧ ، ص)

فإن : $\overrightarrow{\text{بء}}$ = ...

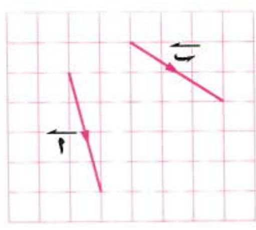
(أ) (-٢ ، ٧) (ب) (-١٢ ، -١٣) (جـ) (٤ ، -٣) (د) (-١٢ ، ١٣)

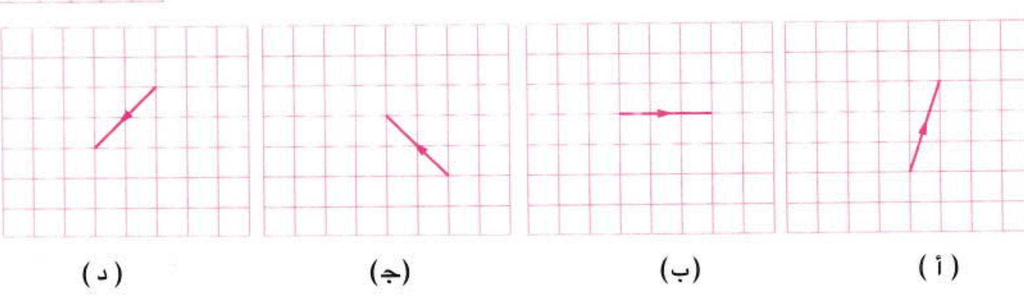
(٤٢) إذا كانت : أ = (٣ ، ٥) ، ب = (-١ ، م) ، $\|\overrightarrow{\text{أب}}\|$ = ٤ وحدة طول فإن : م = ...

(أ) صفر (ب) ٥ (جـ) -١ (د) -٥

(٤٣) الشكل المقابل يمثل متجهين $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$

أى الأشكال الآتية يمثل المتجه $\overrightarrow{\text{أ}} - \overrightarrow{\text{ب}}$ ؟





(أ) (ب) (جـ) (د)

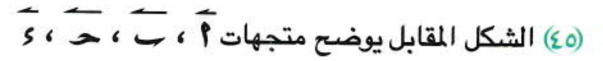
(٤٤) في الشكل المقابل :

$\|\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{جـ}}\|$ = ...

(حيث طول كل ضلع في شبكة المربعات يمثل وحدة الأطوال)

(أ) ١ (ب) ٢

(جـ) ٥ (د) ٤



(٤٥) الشكل المقابل يوضح متجهات $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{جـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ء}}$

أي مما يأتي صحيح ؟

(أ) $\overrightarrow{\text{ب}} = -\overrightarrow{\text{جـ}}$ (ب) $\overrightarrow{\text{أ}} = \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{جـ}}$

(جـ) $\overrightarrow{\text{ء}} = \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{جـ}}$ (د) $\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ء}} = ٢\,\overrightarrow{\text{ب}}$

(٤٦) في الشكل المقابل ستة متوازيات أضلاع متطابقة :

إذا كان : $\overrightarrow{\text{و س}} = \overrightarrow{\text{م}}$ ، $\overrightarrow{\text{و ء}} = \overrightarrow{\text{ن}}$

فإن : $\overrightarrow{\text{ء ع}}$ = ... (بدلالة $\overrightarrow{\text{م}}$ ، $\overrightarrow{\text{ن}}$)

(أ) $\overrightarrow{\text{م}} + \overrightarrow{\text{ن}}$ (ب) $٢\,\overrightarrow{\text{م}} + ٢\,\overrightarrow{\text{ن}}$

(جـ) $٢\,\overrightarrow{\text{م}} - ٢\,\overrightarrow{\text{ن}}$ (د) $٢\,\overrightarrow{\text{ن}} - ٢\,\overrightarrow{\text{م}}$

(٤٧) في الشكل المقابل :

أ ب جـ ء متوازي أضلاع ، س منتصف $\overline{\text{أ ب}}$

فإن : $\overrightarrow{\text{هـ س}}$ = ...

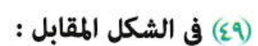
(أ) $\frac{١}{٣}(\overrightarrow{\text{ن}} + ٢\,\overrightarrow{\text{ص}})$ (ب) $\frac{١}{٣}(٢\,\overrightarrow{\text{ن}} - \overrightarrow{\text{ص}})$

(جـ) $\frac{١}{٣}(\overrightarrow{\text{ص}} + \frac{١}{٢}\,\overrightarrow{\text{ن}})$ (د) $\frac{٢}{٣}(\overrightarrow{\text{ن}} - ٢\,\overrightarrow{\text{ص}})$

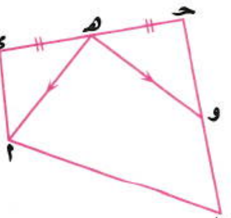
(٤٨) إذا كان $\overline{\text{أ ء}}$ متوسط في Δ أ ب جـ حيث أ (٩ ، ٦) ، ء (−١ ، ٠)

فإن : $\|\overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{أ جـ}}\|$ = ... وحدة طول.

(أ) $٢\sqrt{٣٤}$ (ب) $٤\sqrt{٣٤}$ (جـ) $٨\sqrt{١٧}$ (د) $١٠\sqrt{١٧}$



(٤٩) في الشكل المقابل :



إذا كانت هـ منتصف $\overline{\text{جـ ء}}$

فإن : $\overrightarrow{\text{هـ أ}} + \overrightarrow{\text{هـ و}}$ = ...

(أ) $\overrightarrow{\text{ء أ}} + \overrightarrow{\text{جـ ب}}$ (ب) $\overrightarrow{\text{و ب}} + \overrightarrow{\text{ب أ}}$

(جـ) $\overrightarrow{\text{ء أ}} + \overrightarrow{\text{جـ و}}$ (د) $\overrightarrow{\text{جـ ء}} + \overrightarrow{\text{ب أ}}$

(٥٠) إذا كان أ ب حـ ء مستطيل تقاطع قطراه فى م فإن : $\overleftarrow{\text{م حـ}}$ + $\overleftarrow{\text{م ب}}$ = ...

(أ) $\overleftarrow{\text{حـ ء}}$ (ب) $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ (جـ) $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ (د) $\overleftarrow{\text{حـ ب}}$

(٥١) فى الشكل المقابل :

إذا كان م نقطة تقاطع متوسطات Δ أ ب حـ

فإن : $\overleftarrow{\text{م أ}}$ + ٢ $\overleftarrow{\text{م ب}}$ = ...

(أ) $\overleftarrow{\text{أ حـ}}$ (ب) $\overleftarrow{\text{أ ب}}$

(جـ) $\overleftarrow{\text{صفر}}$ (د) $\overleftarrow{\text{حـ ب}}$

(٥٢) فى الشكل المقابل :

إذا كان و أ ب حـ مستطيل

فإن : $\| \overleftarrow{\text{ب ء}} + \overleftarrow{\text{ء هـ}} \|$ = ...

(أ) $\sqrt{١٧}$ (ب) $\sqrt{٢٦}$

(جـ) $\sqrt{٣٤}$ (د) $\sqrt{٤١}$

(٥٣) فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء متوازى أضلاع

فإذا كان : $\overleftarrow{\text{حـ أ}}$ = (٧ ، ٣) ، $\overleftarrow{\text{ء ب}}$ = (٣ ، −٣)

فإن : $\overleftarrow{\text{حـ ء}}$ = ...

(أ) (٥ ، ٠) (ب) (٢ ، ٣) (جـ) (١٠ ، ٠) (د) (٣ ، ٧)

(٥٤) فى الشكل المقابل :

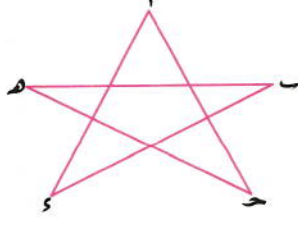
أ ب حـ ء معين تقاطع قطراه فى م

فإذا كان : $\overleftarrow{\text{أ هـ}}$ + $\overleftarrow{\text{أ و}}$ = ك ($\overleftarrow{\text{أ ب}}$ + $\overleftarrow{\text{أ ء}}$)

فإن : ك = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $-\frac{١}{٢}$ (جـ) ١ (د) ٢

(٥٥) فى الشكل المقابل :



$\overleftarrow{\text{ء أ}}$ + $\overleftarrow{\text{حـ هـ}}$ + $\overleftarrow{\text{ء ب}}$ + $\overleftarrow{\text{أ حـ}}$ + $\overleftarrow{\text{هـ ب}}$ = ...

(أ) ٢ $\overleftarrow{\text{ء أ}}$ (ب) ٢ $\overleftarrow{\text{ء ب}}$

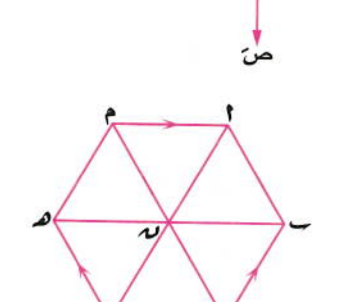
(جـ) ٢ $\overleftarrow{\text{حـ هـ}}$ (د) ٢ $\overleftarrow{\text{هـ ب}}$

(٥٦) في الشكل المقابل :

إذا كانت مساحة المربع الكبير = ٤٩ وحدة مساحة

، مساحة المربع الصغير = ٢٥ وحدة مساحة

فإن : $\overrightarrow{أب}$ = ...



(أ) (–١٢ ، ٢)　　(ب) (–١٢ ، –١٢)

(جـ) (–١٢ ، –٢)　　(د) (١٢ ، –٢)

(٥٧) في الشكل المقابل :

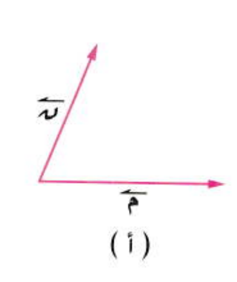
أ ب حـ ء هـ م سداسي منتظم طول ضلعه ٢ وحدة طولية

فإن : $\| \overrightarrow{مأ} + \overrightarrow{حب} + \overrightarrow{ءهـ} \|$ = ... وحدة طول.

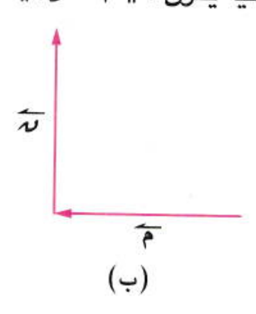
(أ) ٢　　(ب) $٢\sqrt{٣}$

(جـ) $٣\sqrt{٣}$　　(د) ٤

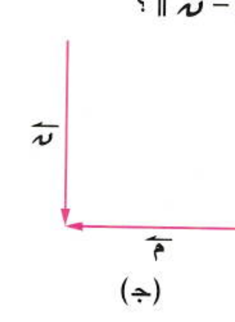
(٥٨) في أي من الحالات الآتية يكون : $\| \overrightarrow{م} + \overrightarrow{ن} \| < \| \overrightarrow{م} - \overrightarrow{ن} \|$ ؟



(أ)



(ب)



(جـ)

(د)

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أ ب حـ ء متوازي أضلاع حيث : أ = (٣ ، ٠) ، ب = (٠ ، ٤) ، ء = (–٢ ، –١)

أوجد : إحداثيي النقطة حـ

«(–٥ ، ٣)»

٢ أ ب حـ ء متوازي أضلاع فيه : أ = (س ، ٢) ، ب = (٣ ، ٨) ، حـ = (٩ ، ١) ، ء = (٧ ، ص)

أوجد قيم : س ، ص ثم أوجد : $\| \overrightarrow{أب} \|$ ، $\| \overrightarrow{أء} \|$

«١ ، –٥ ، $٢\sqrt{١٠}$ ، $\sqrt{٨٥}$»

٣ في مستوى إحداثي متعامد إذا كان : أ = (–١ ، –٤) ، ب = (١ ، ١) ، حـ = (٦ ، –١)

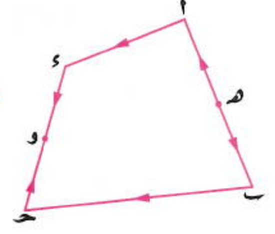
أوجد كلًا من : $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{بحـ}$ بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين ثم أثبت أن : $\overrightarrow{أب} \perp \overrightarrow{بحـ}$.

٤ إذا كان : ٢ $\overrightarrow{م}$ + ٣ $\overrightarrow{أب}$ = ٢ $\overrightarrow{حب}$ – $\overrightarrow{بأ}$ أثبت أن : $\overrightarrow{م}$ = $\overrightarrow{حأ}$

٥ في أي مثلث س ص ع أثبت أن : $\overrightarrow{سص} + \overrightarrow{صع} + \overrightarrow{عس} = \overrightarrow{٠}$



٦ في الشكل المقابل :



أ ب ﺟ ء شكل رباعى

، هـ ∈ $\overline{أب}$ ، و ∈ $\overline{ﺟء}$

أثبت أن : $\overrightarrow{هـب} + \overrightarrow{بﺟ} + \overrightarrow{ﺟو} = \overrightarrow{هـأ} + \overrightarrow{أء} + \overrightarrow{ءو}$

٧ في الشكل الرباعى أ ب ﺟ ء أثبت أن :

(١) $\overrightarrow{أﺟ} + \overrightarrow{بء} = \overrightarrow{بﺟ} + \overrightarrow{أء}$

(٢) $\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{ﺟء} - \overrightarrow{ﺟب} - \overrightarrow{أء} = \overrightarrow{و}$

٨ أ ب ﺟ ء شبه منحرف فيه : $\overline{أء} // \overline{بﺟ}$ ، هـ منتصف $\overline{أب}$ ، و منتصف $\overline{ءﺟ}$

أثبت أن : $\overrightarrow{أء} + \overrightarrow{بﺟ} = ٢ \overrightarrow{هـو}$

٩ أ ب ﺟ ء شكل رباعى فيه : $\overrightarrow{بﺟ} = ٣ \overrightarrow{أء}$

أثبت أن : (١) أ ب ﺟ ء شبه منحرف.

(٢) $\overrightarrow{أﺟ} + \overrightarrow{بء} = ٤ \overrightarrow{أء}$

١٠ أ ب ﺟ ء شبه منحرف فيه : $\overline{أء} // \overline{بﺟ}$ ، $\frac{أء}{بﺟ} = \frac{٢}{٣}$ أثبت أن : $\overrightarrow{أﺟ} + \overrightarrow{بء} = \frac{٥}{٢} \overrightarrow{أء}$

١١ أ ب ﺟ ء شكل رباعى فيه : $٢ \overrightarrow{بﺟ} = ٥ \overrightarrow{أء}$

أثبت أن : (١) $٢ \overrightarrow{أﺟ} + ٢ \overrightarrow{بء} = ٧ \overrightarrow{أء}$

(٢) $٢ \overrightarrow{أب} - ٢ \overrightarrow{ءﺟ} = ٣ \overrightarrow{ءأ}$

١٢ أ ب ﺟ ء متوازى أضلاع تقاطع قطراه فى م ، ن نقطة خارجة عنه

أثبت أن : (١) $\overrightarrow{أﺟ} + \overrightarrow{ءب} = ٢ \overrightarrow{أب}$

(٢) $\overrightarrow{أﺟ} - \overrightarrow{ءب} = ٢ \overrightarrow{بﺟ}$

(٣) $\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{أء} + ٢ \overrightarrow{ﺟم} = \overrightarrow{٠}$

(٤) $\overrightarrow{نأ} + \overrightarrow{نﺟ} = \overrightarrow{نب} + \overrightarrow{نء}$

(٥) $\overrightarrow{نأ} + \overrightarrow{نب} + \overrightarrow{نﺟ} + \overrightarrow{نء} = ٤ \overrightarrow{نم}$

(٦) $\overrightarrow{أن} + \overrightarrow{نب} + \overrightarrow{نء} + \overrightarrow{نﺟ} = ٢ \overrightarrow{أء}$

١٣ أ ب ﺟ ء متوازى أضلاع فيه : هـ منتصف $\overline{بﺟ}$ أثبت أن : $\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{أء} + \overrightarrow{ءﺟ} = ٢ \overrightarrow{أهـ}$

١٤ أ ب ﺟ ء شكل رباعى فيه : س منتصف $\overline{أﺟ}$ ، ص منتصف $\overline{بء}$

أثبت أن : $\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{أء} + \overrightarrow{ﺟب} + \overrightarrow{ﺟء} = ٤ \overrightarrow{سص}$

١٥ س ص ع مثلث ، ل ∈ $\overline{صع}$ بحيث ص ل : ل ع = ٥ : ٣ أثبت أن : $٥ \overrightarrow{سع} + ٣ \overrightarrow{سص} = ٨ \overrightarrow{سل}$

١٦ إذا كانت م نقطة تقاطع متوسطات المثلث أ ب ﺟ ، ط نقطة خارج المثلث

أثبت أن : $\overrightarrow{طأ} + \overrightarrow{طب} + \overrightarrow{طﺟ} = ٣ \overrightarrow{طم}$

١٧ أ ب حـ مثلث ، ء منتصف ب حـ ، هـ منتصف أ حـ ، و منتصف أ ب

أثبت أن : (١) أو + أهـ = أء   (٢) أو − أهـ = $\frac{1}{2}$ حـ ب   (٣) حـ و + هـ ب = ٣ هـ و

---

١٨ أ ب حـ مثلث فيه : ء ، هـ ، و منتصفات الأضلاع أ ب ، ب حـ ، حـ أ على الترتيب ، م هي نقطة تقاطع متوسطاته

أثبت أن : (١) أهـ + ب و = ء حـ   (٢) م أ + م ب + م حـ = م ء + م هـ + م و

---

١٩ أ ب حـ مثلث فيه : ء منتصف أ ب ، هـ منتصف أ حـ أثبت أن : أهـ + حـ ء = هـ ب + ء أ

---

٢٠ أ ب حـ مثلث ، ء ∈ ب حـ ، هـ ∈ ب حـ بحيث : ب ء = حـ هـ أثبت أن : أ ب + أ حـ = أ ء + أ هـ

---

٢١ إذا كان : أ = (٣ ، ١) ، ب = (١ ، ٤) ، حـ = (−١ ، −٥) أوجد : ن

بحيث : ن أ + ن ب + ن حـ = و

«(١ ، ٠)»

---

٢٢ أ ب حـ ء شكل رباعي إذا كان : أ ب = (٢ ، ١) ، ب حـ = (−٣ ، ٤) ، ء حـ = (٥ ، −١)

أوجد المتجه الذي تمثله أ ء وإذا كانت : ب = (−١ ، ٣) أوجد إحداثيات : أ ، حـ ، ء

---

٢٣ إذا كان : أ ب = (١ ، −٤) ، أ = (٢ ، ٣) ، حـ = (−١ ، ١٥)

أوجد قيمتي : ل ، م إذا كان : ل أ − م ب = حـ

«٤ ، ٣»

---

٢٤ إذا كان : أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في ب حيث : أ = (٢ ، ٠) ، ب = (٣ ، ٢)

، حـ = (−٥ ، ٥ − س) أوجد قيمة : س

«−١»

---

٢٥ إذا كان : أ ب حـ ء مستطيل فيه : أ = (٥ ، ١) ، ب = (٢ ، −٢) ، حـ = (−٣ ، ك)

فأوجد قيمة ك ، ثم أوجد إحداثيي النقطة ء

«٣ ، (٠ ، ٦)»

---

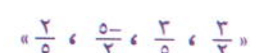
٢٦ في الشكل المقابل :

إذا كان : ء هـ // ب حـ

أوجد قيم ك ، ل ، م ، ن العددية إذا كان :

(١) ب ء = ك ء أ   (٢) حـ هـ = ل حـ أ

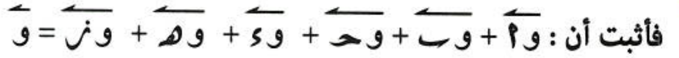
(٣) ب حـ = م هـ ء   (٤) أ ء + ء هـ = ن أ حـ



«$\frac{3}{2}$ ، $\frac{3}{5}$ ، $\frac{-5}{2}$ ، $\frac{2}{5}$»

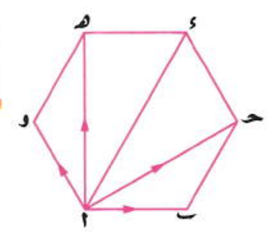
---

٢٧ إذا كان : أ ب حـ ء هـ ز مسدس منتظم مركزه و ،



فأثبت أن : و أ + و ب + و حـ + و ء + و هـ + و ز = و

٢٨ في الشكل المقابل :



$أ ب حـ ء هـ و$ سداسي منتظم

أثبت أن :

$\overrightarrow{أ ب} + \overrightarrow{أ حـ} + \overrightarrow{أ هـ} + \overrightarrow{أ و} = ٢ \overrightarrow{أ ء}$

---

٢٩ في مستوى إحداثي متعامد $\overrightarrow{أ ب} = (-٢ ، ٣)$ ، $\overrightarrow{حـ ب} = (-٦ ، -٤)$ ، $٢ \overrightarrow{ب} + \overrightarrow{أ حـ} = (٦ ، ١١)$

أوجد : (١) إحداثيي كل من النقط : أ ، ب ، حـ

(٢) مساحة سطح المثلث أ ب حـ باستخدام المتجهات. «١٣»

---

٣٠ أ ب حـ ء شبه منحرف فيه :

$أ = (-٢ ، -٣)$ ، $ب = (٤ ، -١)$ ، $حـ = (٢ ، ٥)$ ، $ء = (-١ ، ك)$

(١) إذا كان : $\overrightarrow{أ ب} \parallel \overrightarrow{ء حـ}$ أوجد قيمة : ك (٢) **أثبت أن :** $\overrightarrow{حـ ب} \perp \overrightarrow{أ ب}$

(٣) **أوجد :** مساحة شبه المنحرف أ ب حـ ء «٤ ، ٣٠»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ **اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

(١) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهين غير صفريين فإن : $\|\overrightarrow{أ}\| + \|\overrightarrow{ب}\|$ .... $\|\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}\|$

(أ) $<$ (ب) $>$ (جـ) $\leq$ (د) $\geq$

(٢) إذا كان : $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{حـ}$ ، $\|\overrightarrow{أ}\| + \|\overrightarrow{ب}\| = \|\overrightarrow{حـ}\|$ فإن : ....

(أ) $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متعامدان. (ب) $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متكافئان.

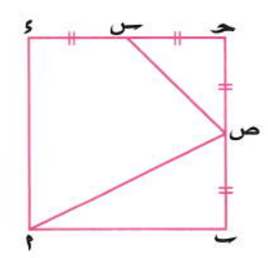
(جـ) $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متوازيان. (د) $\overrightarrow{حـ}$ عمودي على كل من $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$

(٣) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهين غير صفريين وكان $\|\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}\| = \|\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب}\|$ فإن : ....

(أ) $\overrightarrow{أ} = -\overrightarrow{ب}$ (ب) $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متكافئان.

(جـ) $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متوازيان. (د) $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متعامدان.

(٤) في الشكل المقابل :

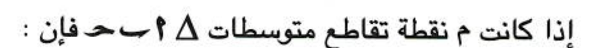


أ ب حـ ء مربع وكان : $\overrightarrow{أ ص} + \overrightarrow{س ص} = ك \overrightarrow{س حـ}$

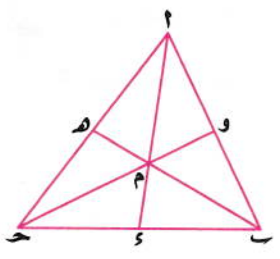
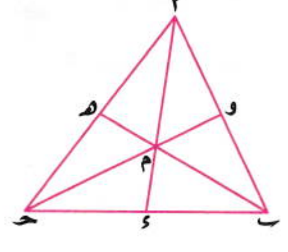
فإن : ك = ...

(أ) ١ (ب) ٢

(جـ) ٣ (د) ٤



(٥) فى الشكل المقابل :

إذا كانت م نقطة تقاطع متوسطات Δ أ ب حـ فإن :

أولًا : $\overleftarrow{\text{أء}} + \overleftarrow{\text{ب هـ}} + \overleftarrow{\text{حـ و}} =$ ....

(أ) $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$ (ب) $\overleftarrow{\text{صفر}}$

(جـ) ٢ $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$ (د) $\overleftarrow{\text{أ ب}} + \overleftarrow{\text{أ حـ}}$

ثانيًا : $\overleftarrow{\text{م أ}} + \overleftarrow{\text{م ب}} + \overleftarrow{\text{م حـ}} =$ ....

(أ) $\overleftarrow{\text{م ء}} + \overleftarrow{\text{م هـ}}$ (ب) ٣ $\overleftarrow{\text{م أ}}$

(جـ) $\overleftarrow{\text{أ ب}} + \overleftarrow{\text{ب حـ}} + \overleftarrow{\text{حـ أ}}$ (د) $\frac{١}{٣}$ $(\overleftarrow{\text{أ ب}} + \overleftarrow{\text{أ حـ}})$

ثالثًا : إذا كان : $\overleftarrow{\text{أ ب}} + \overleftarrow{\text{أ حـ}} =$ ك $\overleftarrow{\text{أ م}}$ فإن : ك = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٦) إذا كان : أ ب حـ ء هـ و شكل سداسى منتظم مركزه (م) وكان : $\overleftarrow{\text{ء ب}} + \overleftarrow{\text{ء أ}} + \overleftarrow{\text{ء و}} =$ ك $\overleftarrow{\text{ء م}}$

فإن : ك = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(٧) إذا كان مجموع متجهى وحدة $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ هو أيضًا متجه وحدة $\overleftarrow{\text{حـ}}$ أى $\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}} = \overleftarrow{\text{حـ}}$

فإن معيار الفرق بينهما $\| \overleftarrow{\text{أ}} - \overleftarrow{\text{ب}} \| =$ ....

(أ) صفر (ب) $\sqrt{٢}$ (جـ) $\sqrt{٣}$ (د) ٢

(٨) فى الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث ، ء $\in \overline{\text{أ ب}}$ ، إذا كان : أ ء = ٣ ء ب

وكان : $\overleftarrow{\text{حـ ء}} =$ ك $\overleftarrow{\text{أ حـ}} +$ م $\overleftarrow{\text{حـ ب}}$

فإن : ك + م = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) ٢ (د) ٣

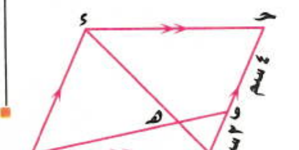
(٩) فى الشكل المقابل :

$\overleftarrow{\text{أء}}$ ينصف $\angle$ ب أ حـ وكان أ ب = ٢ أ حـ

فإن : $\overleftarrow{\text{أء}} =$ ....

(أ) $\frac{١}{٢}$ $(\overleftarrow{\text{أ ب}} + \overleftarrow{\text{أ حـ}})$ (ب) $\frac{١}{٣}$ $(\overleftarrow{\text{أ حـ}} + ٢ \overleftarrow{\text{أ ب}})$

(جـ) $\frac{١}{٢}$ $(٣ \overleftarrow{\text{أ حـ}} + ٢ \overleftarrow{\text{أ ب}})$ (د) $\frac{١}{٣}$ $(٢ \overleftarrow{\text{أ حـ}} + \overleftarrow{\text{أ ب}})$



(١٠) فى الشكل المقابل :

إذا كان أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه :

ب و = ٢ سم ، و حـ = ٤ سم فإن : $\overleftarrow{\text{أهـ}}$ = ...

(أ) $\frac{1}{2}\,\overleftarrow{\text{أب}} + \frac{1}{3}\,\overleftarrow{\text{أء}}$ (ب) $\frac{1}{4}\,\overleftarrow{\text{أب}} + \frac{3}{4}\,\overleftarrow{\text{أء}}$

(جـ) $\frac{2}{3}\,\overleftarrow{\text{أب}} + \frac{1}{3}\,\overleftarrow{\text{أء}}$ (د) $\frac{3}{4}\,\overleftarrow{\text{أب}} + \frac{1}{4}\,\overleftarrow{\text{أء}}$

(١١) فى الشكل المقابل :

إذا كان أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب ، أ حـ = ٢٤ سم

وكانت م هى نقطة تلاقى متوسطات المثلث أ ب حـ

فإن : $\|\overleftarrow{\text{م ب}} + \overleftarrow{\text{م ء}} + \overleftarrow{\text{م هـ}}\|$ = ... سم

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٦

(١٢) فى الشكل المقابل :

إذا كانت : م هى نقطة تلاقى متوسطات Δ أ ب حـ

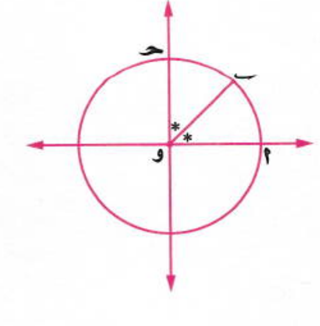
فإن : $\overleftarrow{\text{م س}} + \overleftarrow{\text{م ص}} + \overleftarrow{\text{م ع}}$ = ...

(أ) ٣ $\overleftarrow{\text{ع ب}}$ (ب) ٢ $\overleftarrow{\text{ص حـ}}$

(جـ) $\overleftarrow{\text{و}}$ (د) ٥ $\overleftarrow{\text{أ س}}$



(١٣) فى الشكل المقابل :



دائرة مركزها «و» ، إذا كان $\overleftarrow{\text{و ب}}$ ينصف ∠ أ و حـ

فإن : $\overleftarrow{\text{و أ}} + \overleftarrow{\text{و ب}} + \overleftarrow{\text{و حـ}}$ = ...

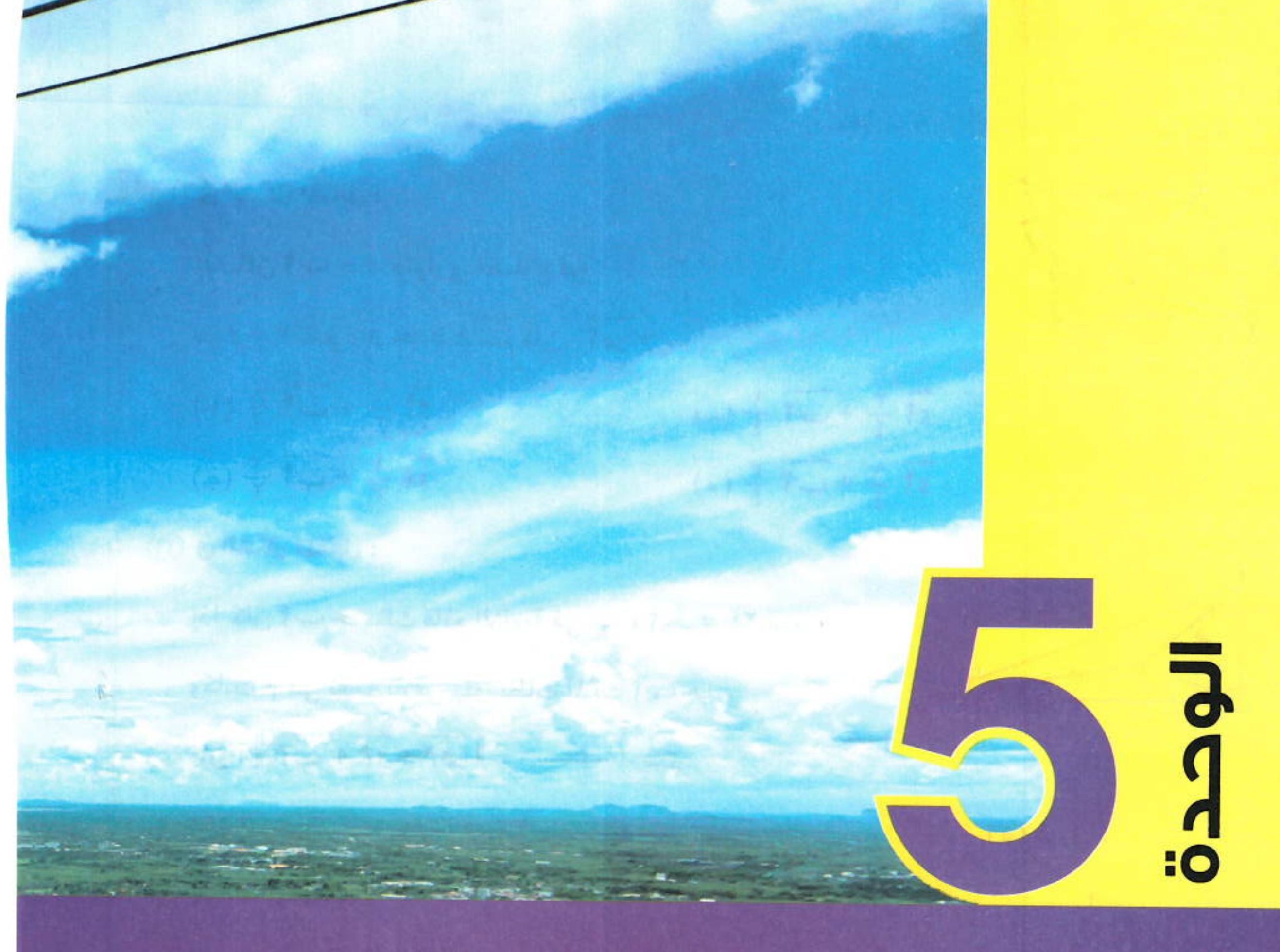
(أ) $\sqrt{2}$ $\overleftarrow{\text{و ب}}$ (ب) ٢ $\overleftarrow{\text{و ب}}$

(جـ) $(\sqrt{2} + 1)$ $\overleftarrow{\text{و ب}}$ (د) ٣ $\overleftarrow{\text{و ب}}$

---

٢ أ ب حـ ء شكل رباعى ، س ، ص ، ع ، ن منتصفات $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{حـ ء}}$ ، $\overline{\text{ء أ}}$ على الترتيب.

أثبت أن : $\overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{ء حـ}} + \overleftarrow{\text{حـ ب}} + \overleftarrow{\text{ء أ}} = 2\,(\overleftarrow{\text{ع س}} + \overleftarrow{\text{ن ص}})$



الوحدة 5

الخط المستقيم

دروس الوحدة



نـواتــج الـتـعـلًـم

فى نهاية هذه الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن :

- يوجد إحداثيى نقطة تقسيم قطعة مستقيمة من الداخل أو الخارج إذا علمت نسبة التقسيم.
- يوجد النسبة التى تنقسم بها قطعة مستقيمة من الداخل أو من الخارج إذا علم إحداثيا نقطة التقسيم.
- يتعرف الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم.
- يوجد المعادلة المتجهة، والمعادلات البارامترية ، والمعادلة الكارتيزية للخط المستقيم.
- يوجد الصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم.
- يوجد معادلة الخط المستقيم بدلالة الأجزاء المقطوعة من محورى الإحداثيات.
- يوجد قياس الزاوية الحادة بين مستقيمين.
- يوجد طول العمود المرسوم من نقطة إلى خط مستقيم.



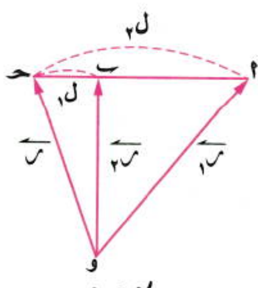




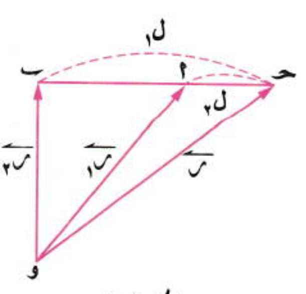
• إذا كانت : $\overline{\text{أب}}$ قطعة مستقيمة موجهة $\subset \overleftrightarrow{\text{أب}}$ فإن أى نقطة حـ $\in \overleftrightarrow{\text{أب}}$ تقسم $\overline{\text{أب}}$ إلى قطعتين مستقيمتين موجهتين $\overline{\text{أحـ}}$ ، $\overline{\text{حـب}}$ بحيث $\overline{\text{أب}} = \overline{\text{أحـ}} + \overline{\text{حـب}}$

وإذا كانت النقطة حـ تقسم $\overline{\text{أب}}$ بنسبة معلومة $ل_2 : ل_1$ وكانت $\overrightarrow{ر_1}$ ، $\overrightarrow{ر_2}$ ، $\overrightarrow{ر}$ هى المتجهات الممثلة بالقطع المستقيمة الموجهة $\overline{\text{وأ}}$ ، $\overline{\text{وب}}$ ، $\overline{\text{وحـ}}$ حيث (و) هى نقطة الأصل.

شكل(١)



شكل(٢)



شكل(٣)

فإن : $\frac{\text{أحـ}}{\text{حـب}} = \frac{ل_2}{ل_1}$

$\therefore$ $ل_1 (\overrightarrow{\text{حـ}} - \overrightarrow{\text{أ}}) = ل_2 (\overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{حـ}})$

$\therefore$ $ل_1 \overrightarrow{ر} - ل_1 \overrightarrow{ر_1} = ل_2 \overrightarrow{ر_2} - ل_2 \overrightarrow{ر}$

$\therefore$ $\overrightarrow{ر} (ل_1 + ل_2) = ل_1 \overrightarrow{ر_1} + ل_2 \overrightarrow{ر_2}$

$\therefore$ $ل_1 . \overline{\text{أحـ}} = ل_2 . \overline{\text{حـب}}$

$\therefore$ $ل_1 (\overrightarrow{ر} - \overrightarrow{ر_1}) = ل_2 (\overrightarrow{ر_2} - \overrightarrow{ر})$

$\therefore$ $ل_1 \overrightarrow{ر} + ل_2 \overrightarrow{ر} = ل_1 \overrightarrow{ر_1} + ل_2 \overrightarrow{ر_2}$

$\therefore$ $\boxed{\overrightarrow{ر} = \frac{ل_1 \overrightarrow{ر_1} + ل_2 \overrightarrow{ر_2}}{ل_1 + ل_2}}$ وتسمى بالصورة المتجهة.

ملاحظـات

1) إذا كانت : $ح \in \overline{أب}$ فإن «ح تقسم $\overleftarrow{أب}$ من الداخل»

ويكون $\overleftarrow{أح}$ ، $\overleftarrow{حب}$ لهما نفس الاتجاه وتكون القيمتان $ل_1$ ، $ل_2$ موجبتين

أى أن $\frac{ل_2}{ل_1} > 0$ [شكل(1)]

2) إذا كانت : $ح \in \overleftrightarrow{أب}$ ، $ح \notin \overline{أب}$ فإن «ح تقسم $\overleftarrow{أب}$ من الخارج» ويكون $\overleftarrow{أح}$ ، $\overleftarrow{حب}$ لهما اتجاهان متضادان وتكون إحدى القيمتين $ل_1$ ، $ل_2$ موجبة والأخرى سالبة

أى أن $\frac{ل_2}{ل_1} < 0$ وفى هذه الحالة يكون لدينا احتمالان :

أولًا : $|ل_2| > |ل_1|$ تكون $ح \in \overleftarrow{أب}$ ، $ح \notin \overline{أب}$ [شكل(2)]

ثانيًا : $|ل_2| < |ل_1|$ تكون $ح \in \overleftarrow{بأ}$ ، $ح \notin \overline{أب}$ [شكل(3)]

3) $\frac{\|\overleftarrow{أح}\|}{\|\overleftarrow{حب}\|} = \left|\frac{ل_2}{ل_1}\right|$

أى أن $\frac{أح}{حب} = \left|\frac{ل_2}{ل_1}\right|$

- إذا فرضنا أن $أ = (س_1 ، ص_1)$ ، $ب = (س_2 ، ص_2)$ ، $ح = (س ، ص)$

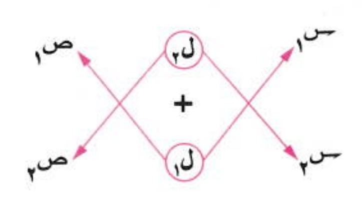
$$\because \overleftarrow{ر} = \frac{ل_1 \overleftarrow{ر_1} + ل_2 \overleftarrow{ر_2}}{ل_1 + ل_2}$$

$$\therefore (س ، ص) = \frac{ل_1 (س_1 ، ص_1) + ل_2 (س_2 ، ص_2)}{ل_1 + ل_2} = \frac{(ل_1 س_1 + ل_2 س_2 ، ل_1 ص_1 + ل_2 ص_2)}{ل_1 + ل_2}$$

$$\therefore (س ، ص) = \left(\frac{ل_1 س_1 + ل_2 س_2}{ل_1 + ل_2} ، \frac{ل_1 ص_1 + ل_2 ص_2}{ل_1 + ل_2}\right)$$

وتسمى بالصورة الإحداثية.

- يمكن الاستعانة بالشكل المجاور لتبسيط إيجاد الصورة الإحداثية.



مثـال ١

إذا كانت : أ = (١ ، −٤) ، ب = (٦ ، ٦) أوجد إحداثيي النقطة حـ التي تقسم $\overrightarrow{أب}$ من الداخل بنسبة ٣ : ٢

الحـل

∵ حـ تقسم $\overrightarrow{أب}$ من الداخل

∴ $\frac{ل_٢}{ل_١} = \frac{٣}{٢}$

، ∵ $\overrightarrow{ر} = \frac{ل_١ \overrightarrow{ر_١} + ل_٢ \overrightarrow{ر_٢}}{ل_١ + ل_٢}$

∴ $\overrightarrow{ر} = \frac{٢ (١ ، −٤) + ٣ (٦ ، ٦)}{٢ + ٣} = \left(\frac{٢ × ١ + ٣ × ٦}{٥} ، \frac{٢ × −٤ + ٣ × ٦}{٥}\right) = (٤ ، ٢)$

∴ حـ = (٤ ، ٢)

لاحظ أن

حـ تقسم $\overrightarrow{أب}$

∴ $\overrightarrow{ر_١}$ = أ (١ ، −٤)

، $\overrightarrow{ر_٢}$ = ب (٦ ، ٦)

حل آخر باستخدام المتجهات :

∵ حـ تقسم $\overrightarrow{أب}$ من الداخل بنسبة ٣ : ٢

∴ $\frac{أحـ}{حـب} = \frac{٣}{٢}$ ∴ ٢ $\overrightarrow{أحـ}$ = ٣ $\overrightarrow{حـب}$

∴ ٢ (س − ١ ، ص + ٤) = ٣ (٦ − س ، ٦ − ص)

∴ (٢ س − ٢ ، ٢ ص + ٨) = (١٨ − ٣ س ، ١٨ − ٣ ص)

∴ ٢ س − ٢ = ١٨ − ٣ س ومنها س = ٤

، ٢ ص + ٨ = ١٨ − ٣ ص ومنها ص = ٢

∴ حـ = (٤ ، ٢)

مثـال ٢

إذا كانت : أ = (٢ ، −٣) ، ب = (١ ، −١) أوجد إحداثيي النقطة حـ التي تقسم $\overrightarrow{بأ}$ من الخارج بنسبة ٤ : ٣

الحـل

∵ حـ تقسم $\overrightarrow{بأ}$ من الخارج

∴ $\frac{ل_٢}{ل_١} = \frac{−٤}{٣}$

، ∵ $\overrightarrow{ر} = \frac{ل_١ \overrightarrow{ر_١} + ل_٢ \overrightarrow{ر_٢}}{ل_١ + ل_٢}$

∴ $\overrightarrow{ر} = \frac{٣ (١ ، −١) + (−٤) (٢ ، −٣)}{٣ + (−٤)} = \left(\frac{٣ × ١ − ٤ × ٢}{−١} ، \frac{٣ × −١ − ٤ × −٣}{−١}\right) = (٥ ، −٩)$

∴ حـ = (٥ ، −٩)

لاحظ أن

حـ تقسم $\overrightarrow{بأ}$

∴ $\overrightarrow{ر_١}$ = ب (١ ، −١)

، $\overrightarrow{ر_٢}$ = أ (٢ ، −٣)

* لاحظ أننا اعتبرنا نسبة التقسيم $ل_٢ : ل_١$ = −٤ : ٣ ولو اعتبرناها ٤ : −٣ فسوف نحصل على نفس النتيجة.

$\overrightarrow{ر} = \frac{−٣ (١ ، −١) + ٤ (٢ ، −٣)}{−٣ + ٤} = (٥ ، −٩)$



حل آخر باستخدام المتجهات :

∵ حـ تقسم $\overleftarrow{بـأ}$ من الخارج بنسبة ٤ : ٣

∴ $\frac{بـحـ}{أحـ} = \frac{٤}{٣}$ ∴ ٣ $\overleftarrow{بـحـ}$ = ٤ $\overleftarrow{أحـ}$

∴ ٣ (س − ١ ، ص + ١) = ٤ (س − ٢ ، ص + ٣)

∴ (٣ س − ٣ ، ٣ ص + ٣) = (٤ س − ٨ ، ٤ ص + ١٢)

∴ ٣ س − ٣ = ٤ س − ٨ ومنها س = ٥

، ٣ ص + ٣ = ٤ ص + ١٢ ومنها ص = −٩ ∴ حـ = (٥ ، −٩)

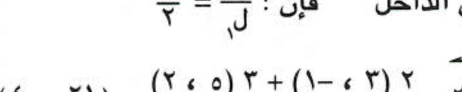
مثال ٣

إذا كانت : أ = (٣ ، −١) ، ب = (٥ ، ٢) وكانت : حـ ∈ $\overleftrightarrow{أب}$ بحيث : ٢ أحـ = ٣ حـب

فأوجد إحداثيي حـ إذا كان : ١ التقسيم من الداخل. ٢ التقسيم من الخارج.

الحل

∵ ٢ أحـ = ٣ حـب ∴ $\frac{أحـ}{حـب} = \frac{٣}{٢}$ ∴ $\left|\frac{ل_٢}{ل_١}\right| = \frac{٣}{٢}$



١ إذا كان التقسيم من الداخل فإن : $\frac{ل_٢}{ل_١} = \frac{٣}{٢}$

$$\vec{ر} = \frac{ل_١ \vec{ر_١} + ل_٢ \vec{ر_٢}}{ل_١ + ل_٢} = \frac{٢ (٣ ، −١) + ٣ (٥ ، ٢)}{٢ + ٣} = \left(\frac{٢١}{٥} ، \frac{٤}{٥}\right)$$

∴ حـ = $\left(\frac{٢١}{٥} ، \frac{٤}{٥}\right)$

٢ إذا كان التقسيم من الخارج فإن : $\frac{ل_٢}{ل_١} = -\frac{٣}{٢} = \frac{٣}{-٢}$

$$\vec{ر} = \frac{ل_١ \vec{ر_١} + ل_٢ \vec{ر_٢}}{ل_١ + ل_٢} = \frac{-٢ (٣ ، −١) + ٣ (٥ ، ٢)}{-٢ + ٣} = (٩ ، ٨)$$

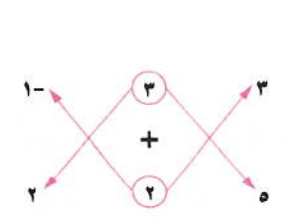
∴ حـ = (٩ ، ٨)

• لاحظ أن : $|ل_٢| > |ل_١|$ وعلى ذلك فإن : حـ ∈ $\overleftrightarrow{أب}$ ، حـ ∉ $\overline{أب}$

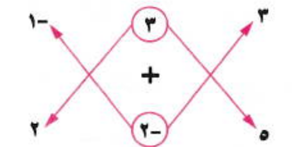
حل آخر باستخدام الصورة الإحداثية لنقطة التقسيم :

$$حـ = \left(\frac{ل_١ س_١ + ل_٢ س_٢}{ل_١ + ل_٢} ، \frac{ل_١ ص_١ + ل_٢ ص_٢}{ل_١ + ل_٢}\right)$$

١ أ = (٣ ، −١) ، ب = (٥ ، ٢) ، $ل_٢ : ل_١ = ٣ : ٢$



$$∴ حـ = \left(\frac{٢ × ٣ + ٣ × ٥}{٢ + ٣} ، \frac{٢ × (−١) + ٣ × ٢}{٢ + ٣}\right) = \left(\frac{٢١}{٥} ، \frac{٤}{٥}\right)$$



٢ أ = (٣ ، −١) ، ب = (٥ ، ٢) ، $ل_٢ : ل_١$ = ٣ : −٢

∴ حـ = $\left(\frac{-٢ \times ٥ + ٣ \times ٣}{-٢ + ٣} ، \frac{-٢ \times (-١) + ٣ \times ٢}{-٢ + ٣}\right)$ = (٩ ، ٨)

حاول بنفسك

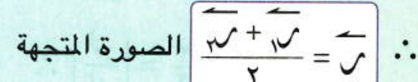
أ = (١ ، ٢) ، ب = (٨ ، −٥) أوجد إحداثيي النقطة حـ التي تقسم $\overleftarrow{أب}$ بنسبة ٤ : ٣ إذا كان :

١ التقسيم من الداخل. ٢ التقسيم من الخارج.

ملاحظة

إذا كانت : حـ منتصف $\overline{أب}$ حيث : أ ($س_١$ ، $ص_١$) ، ب ($س_٢$ ، $ص_٢$)

فإن : $ل_١ = ل_٢ = ل$



∴ $\overleftarrow{ر} = \frac{ل\,\overleftarrow{ر_١} + ل\,\overleftarrow{ر_٢}}{ل + ل} = \frac{ل\,(\overleftarrow{ر_١} + \overleftarrow{ر_٢})}{٢\,ل}$

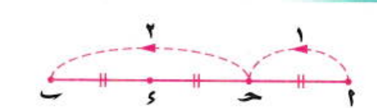
∴ $\overleftarrow{ر} = \frac{\overleftarrow{ر_١} + \overleftarrow{ر_٢}}{٢}$ الصورة المتجهة

، (س ، ص) = $\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}\right)$ الصورة الإحداثية.

مثال ٤

إذا كانت : أ = (−١ ، ٤) ، ب = (٥ ، −٢) فأوجد إحداثيات النقطتين حـ ، ء اللتين تقسمان $\overline{أب}$ إلى ثلاثة أجزاء متساوية الطول.

الحل



∵ حـ تقسم $\overleftarrow{أب}$ من الداخل بنسبة $\frac{ل_٢}{ل_١} = \frac{١}{٢}$

∴ $\overleftarrow{ر} = \frac{٢\,(-١ ، ٤) + (٥ ، -٢)}{٢ + ١}$ = (١ ، ٢) ∴ حـ = (١ ، ٢)

، ∵ ء منتصف $\overleftarrow{حـب}$ ∴ $\overleftarrow{ر} = \frac{\overleftarrow{ر_١} + \overleftarrow{ر_٢}}{٢} = \frac{(١ ، ٢) + (٥ ، -٢)}{٢}$ = (٣ ، ٠)

∴ ء = (٣ ، ٠) ويمكن إيجاد ء باعتبار أنها تقسم $\overleftarrow{أب}$ من الداخل بنسبة $ل_٢ : ل_١$ = ٢ : ١

مثال ٥

أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : أ = (٥ ، ٢) ، ب = (٠ ، ٣) ، حـ = (−٢ ، −١)

أوجد إحداثيي الرأس ء

الحـل

نفرض أن : ء = (س ، ص)

، ∵ القطران ينصف كل منهما الآخر فى متوازى الأضلاع.

∴ نقطة منتصف $\overline{أحـ}$ = نقطة منتصف $\overline{بء}$

∴ $\frac{٥ - ٢}{٢} = \frac{٠ + س}{٢}$ ∴ س = ٣

، $\frac{٢ - ١}{٢} = \frac{٣ + ص}{٢}$

∴ ص = -٢ ∴ ء = (٣ ، -٢)

ملاحظات

* لإثبات أن النقط أ ، ب ، حـ تقع على استقامة واحدة فإننا نثبت :

إما $\overrightarrow{أب}$ = ك $\overrightarrow{أحـ}$ ، ك ≠ ٠ (باستخدام المتجهات)

أو ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ميل $\overleftrightarrow{أحـ}$ (باستخدام الميل)

أو أب = ب حـ + أ حـ (باستخدام البُعد بين نقطتين حيث أب الطول الأكبر)

* إذا كانت حـ تقسم $\overline{أب}$ بنسبة $ل_٢$: $ل_١$ فيكون التقسيم :

[١] من الداخل إذا كان $\frac{ل_٢}{ل_١}$ موجبة. [٢] من الخارج إذا كانت $\frac{ل_٢}{ل_١}$ سالبة.

مثـال ٦

أثبت أن النقط : أ = (١ ، -٣) ، ب = (-٢ ، -٩) ، حـ = (٥ ، ٥) تقع على استقامة واحدة ثم أوجد :

[١] النسبة التى تقسم بها حـ القطعة $\overline{أب}$ [٢] النسبة التى تقسم بها أ القطعة $\overline{بحـ}$

الحـل

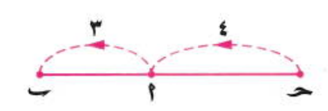
∵ $\overrightarrow{أب}$ = $\overrightarrow{ب}$ - $\overrightarrow{أ}$ = (-٢ ، -٩) - (١ ، -٣) = (-٣ ، -٦) = -٣ (١ ، ٢)

، $\overrightarrow{أحـ}$ = $\overrightarrow{حـ}$ - $\overrightarrow{أ}$ = (٥ ، ٥) - (١ ، -٣) = (٤ ، ٨) = ٤ (١ ، ٢)

∴ $\overrightarrow{أحـ}$ = $-\frac{٤}{٣}$ $\overrightarrow{أب}$

∴ أ ، ب ، حـ تقع على استقامة واحدة ، ب ، حـ فى جهتين مختلفتين من أ

، $\frac{\|\overrightarrow{أحـ}\|}{\|\overrightarrow{أب}\|} = \frac{٤}{٣}$ **وينتج أن :**



[١] حـ تقسم $\overline{أب}$ بنسبة ٤ : ٧ من الخارج.

[٢] أ تقسم $\overline{بحـ}$ بنسبة ٣ : ٤ من الداخل.

حـل آخر باستخدام الميل :

∵ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{-٩ + ٣}{-٢ - ١}$ = ٢ ، ميل $\overleftrightarrow{أحـ}$ = $\frac{٥ + ٣}{٥ - ١}$ = ٢

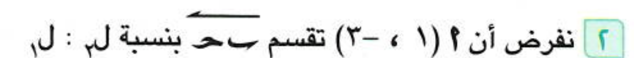
∴ أ ، ب ، حـ تقع على استقامة واحدة.

١ نفرض أن حـ (٥ ، ٥) تقسم $\overleftarrow{أب}$ بنسبة $ل_٢ : ل_١$

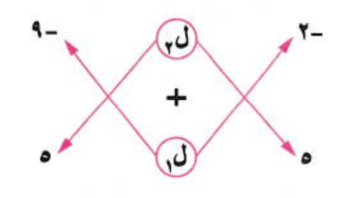
∴ $\frac{ل_١ - ٢ ل_٢}{ل_١ + ل_٢}$ = ٥ ∴ $ل_١ - ٢ ل_٢ = ٥ ل_١ + ٥ ل_٢$

∴ ٤ $ل_١$ = -٧ $ل_٢$ ∴ $\frac{ل_٢}{ل_١}$ = $-\frac{٤}{٧}$ (سالبة)

∴ حـ تقسم $\overleftarrow{أب}$ بنسبة ٤ : ٧ من الخارج.



٢ نفرض أن أ (١ ، -٣) تقسم $\overleftarrow{بحـ}$ بنسبة $ل_٢ : ل_١$



∴ $\frac{-٢ ل_١ + ٥ ل_٢}{ل_١ + ل_٢}$ = ١ ∴ $-٢ ل_١ + ٥ ل_٢ = ل_١ + ل_٢$

∴ ٣ $ل_١$ = ٤ $ل_٢$ ∴ $\frac{ل_٢}{ل_١}$ = $\frac{٣}{٤}$ (موجبة)

∴ أ تقسم $\overleftarrow{بحـ}$ بنسبة ٣ : ٤ من الداخل.

حـل ثالث باستخدام البُعد بين نقطتين :

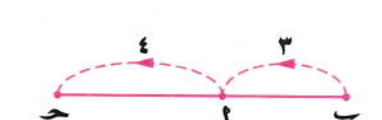
∵ أب = $\sqrt{(١ + ٢)^٢ + (-٣ + ٩)^٢}$ = ٣ $\sqrt{٥}$ وحدة طول.

، بحـ = $\sqrt{(-٢ - ٥)^٢ + (-٩ - ٥)^٢}$ = ٧ $\sqrt{٥}$ وحدة طول.

حـ أ = $\sqrt{(١ - ٥)^٢ + (-٣ - ٥)^٢}$ = ٤ $\sqrt{٥}$ وحدة طول. ∴ بحـ = أب + حـ أ

∴ أ ، ب ، حـ تقع على استقامة واحدة ، حـ ∉ $\overline{أب}$

، $\frac{أب}{أحـ}$ = $\frac{٣\sqrt{٥}}{٤\sqrt{٥}}$ = $\frac{٣}{٤}$



∴ حـ تقسم $\overleftarrow{أب}$ بنسبة ٤ : ٧ من الخارج ، أ تقسم $\overleftarrow{بحـ}$ بنسبة ٣ : ٤ من الداخل.

مثـال ٧

أوجد النسبة التى تنقسم بها $\overleftarrow{أب}$ بكل من نقطتى تقاطعها مع محورى الإحداثيات

إذا كانت : أ = (٤ ، -٣) ، ب = (-٣ ، ٥) ثم أوجد إحداثيات نقطتى التقسيم.

الحـل

أولًا : بفرض أن حـ = (ـس ، ٠) هى

نقطة تقاطع $\overline{\text{أب}}$ مع محور السينات

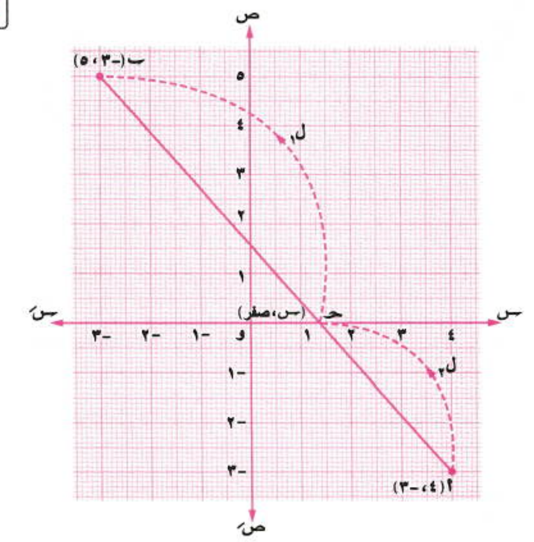
$$\therefore\ ٠ = \frac{\text{ل}_٢ \times ٥ + \text{ل}_١ \times (-٣)}{\text{ل}_٢ + \text{ل}_١}$$

$$\therefore\ ٠ = ٥\ \text{ل}_٢ - ٣\ \text{ل}_١$$

$$\therefore\ ٥\ \text{ل}_٢ = ٣\ \text{ل}_١ \qquad \therefore\ \frac{\text{ل}_٢}{\text{ل}_١} = \frac{٣}{٥}$$

∴ $\overline{\text{أب}}$ تنقسم بنقطة تقاطعها مع محور السينات

بنسبة ٣ : ٥ من الداخل.



$$،\ \because\ \text{س} = \frac{\text{ل}_١ \text{س}_١ + \text{ل}_٢ \text{س}_٢}{\text{ل}_١ + \text{ل}_٢} \qquad \therefore\ \text{س} = \frac{٥ \times ٤ + ٣ \times -٣}{٣ + ٥} = \frac{١١}{٨}$$

∴ حـ (نقطة التقسيم) = $\left(\frac{١١}{٨} ،\ ٠\right)$

ثانيًا : بفرض أن ء = (٠ ، ص) هى

نقطة تقاطع $\overline{\text{أب}}$ مع محور الصادات

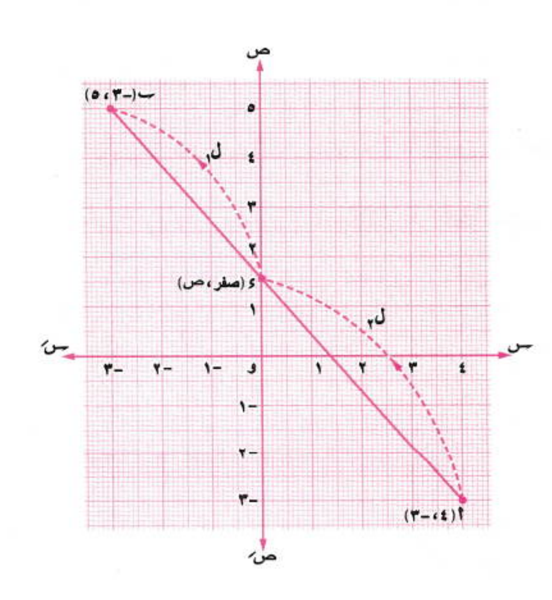
$$\therefore\ ٠ = \frac{\text{ل}_٢ \times (-٣) + \text{ل}_١ \times ٤}{\text{ل}_٢ + \text{ل}_١}$$

$$\therefore\ ٠ = -٣\ \text{ل}_٢ + ٤\ \text{ل}_١$$

$$\therefore\ ٣\ \text{ل}_٢ = ٤\ \text{ل}_١ \qquad \therefore\ \frac{\text{ل}_٢}{\text{ل}_١} = \frac{٤}{٣}$$

∴ $\overline{\text{أب}}$ تنقسم بنقطة تقاطعها مع

محور الصادات بنسبة ٤ : ٣ من الداخل.



$$،\ \because\ \text{ص} = \frac{\text{ل}_١ \text{ص}_١ + \text{ل}_٢ \text{ص}_٢}{\text{ل}_١ + \text{ل}_٢}$$

$$\therefore\ \text{ص} = \frac{٣ \times -٣ + ٤ \times ٥}{٣ + ٤} = \frac{١١}{٧} \qquad \therefore\ \text{ء (نقطة التقسيم)} = \left(٠ ،\ \frac{١١}{٧}\right)$$

حاول بنفسك

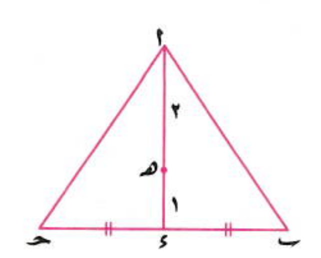
إذا كانت : أ(٢ ، ٣) ، ب(−٢ ، ١) أوجد النسبة التى تنقسم بها $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ بنقطة تقاطعها مع محور السينات ثم أوجد إحداثيى نقطة التقسيم.

مثال ٨

إذا كانت : أ = (٢ ، ١) ، ب = (١ ، ٥) ، حـ = (٦ ، −٣) رءوس مثلث

فأوجد إحداثيي نقطة تلاقى متوسطاته.

الحل

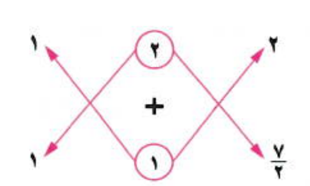


∵ نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلاً من هذه المتوسطات من الداخل

بنسبة ٢ : ١ من جهة الرأس وبفرض أن ء منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$

$$\therefore \text{ء} = \left(\frac{١ + ٦}{٢} \text{ ، } \frac{٥ - ٣}{٢} \right) = \left(\frac{٧}{٢} \text{ ، } ١ \right)$$

، هـ (نقطة تقاطع المتوسطات) تقسم $\overline{\text{أء}}$ من الداخل بنسبة ٢ : ١



$$\therefore \text{س} = \frac{٢ \times \frac{٧}{٢} + ١ \times ٢}{٢ + ١} = ٣$$

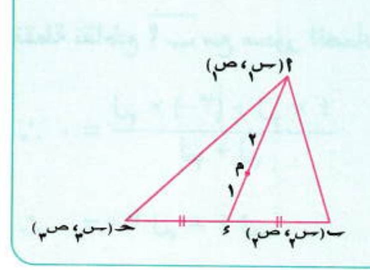
$$\text{، ص} = \frac{٢ \times ١ + ١ \times ١}{٢ + ١} = ١ \qquad \therefore \text{هـ} = (٣ \text{ ، } ١)$$

ملاحظة

إذا كان أ ب حـ مثلثاً رءوسه أ = ($\text{س}_١$ ، $\text{ص}_١$) ، ب = ($\text{س}_٢$ ، $\text{ص}_٢$)

، حـ = ($\text{س}_٣$ ، $\text{ص}_٣$) ، وكانت م نقطة تلاقى متوسطاته

$$\text{فإن : م} = \left(\frac{\text{س}_١ + \text{س}_٢ + \text{س}_٣}{٣} \text{ ، } \frac{\text{ص}_١ + \text{ص}_٢ + \text{ص}_٣}{٣} \right)$$



*** يمكن حل المثال السابق كما يلى :**

$$\text{م} = \left(\frac{\text{س}_١ + \text{س}_٢ + \text{س}_٣}{٣} \text{ ، } \frac{\text{ص}_١ + \text{ص}_٢ + \text{ص}_٣}{٣} \right) = \left(\frac{٢ + ١ + ٦}{٣} \text{ ، } \frac{١ + ٥ - ٣}{٣} \right) = (٣ \text{ ، } ١)$$

لاحظ الفرق

إذا كانت : حـ ∈ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ وكان :

١ $\overleftarrow{\text{أ حـ}}$ = ٢ $\overleftarrow{\text{حـ ب}}$ **فإن :** حـ تقسم $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ من الداخل.

٢ $\overleftarrow{\text{أ حـ}}$ = −٢ $\overleftarrow{\text{حـ ب}}$ **فإن :** حـ تقسم $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ من الخارج.

٣ أ حـ = ٢ حـ ب **فإن :** حـ تقسم $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ من الداخل أو الخارج.



4 تمارين على تقسيم قطعة مستقيمة



من أسئلة الكتاب المدرسى • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت : أ = (٣ ، ٦) ، ب = (−٧ ، ٤) فإن : منتصف $\overline{أب}$ = ...

(أ) (−٤ ، ١٠) (ب) (−٤ ، ٥) (جـ) (٥ ، ١) (د) (−٢ ، ٥)

(٢) إذا كانت : م نقطة تقاطع قطرى متوازى الأضلاع أ ب حـ ء حيث : أ = (٣ ، ٧) ، حـ = (−٣ ، ١)

فإن : م = ...

(أ) (٠ ، ٤) (ب) (٣ ، ٣) (جـ) (٠ ، ٨) (د) (٦ ، ٦)

(٣) إذا كانت النقطة (٣ ، ٦) هى نقطة منتصف $\overline{أب}$ حيث : أ = (−٣ ، ٧)

فإن : النقطة ب = ...

(أ) (٦ ، −١) (ب) (−٦ ، ١) (جـ) (٩ ، ٥) (د) (٠ ، ٦٫٥)

(٤) إذا كانت : حـ (٢ ، ٤) منتصف $\overline{أب}$ حيث : أ (س ، ٤) ، ب (١ ، ص)

فإن : س + ص = ...

(أ) ٧ (ب) ١ (جـ) −١ (د) −٧

(٥) دائرة مركزها (٢ ، −٢) فإذا كان قطرها له نقطة طرفية (٤ ، ٢) فإن نقطة الطرف الآخر للقطر هى ....

(أ) (−٤ ، ٢) (ب) (٠ ، −٦) (جـ) (−٣ ، −٣) (د) (٨ ، ٤)

(٦) إذا كانت : أ (−٣ ، −٧) ، ب (٤ ، ٠) فإن النقطة حـ التى تقسم $\overrightarrow{أب}$ بنسبة ٥ : ٢ من الداخل هى ....

(أ) (−٢ ، ٢) (ب) (٢ ، −٢) (جـ) (٢ ، ٢) (د) (−٢ ، −٢)

(٧) إذا كانت : أ (٢ ، ٥) ، ب (٧ ، −١) فإن النقطة حـ التى تقسم $\overrightarrow{أب}$ من الخارج بنسبة ٣ : ٢ هى ....

(أ) (−٢٥ ، −٧) (ب) (٢٥ ، ٧) (جـ) (١٧ ، ١٣) (د) (١٧ ، −١٣)

(٨) إذا كانت : أ = (−٤ ، ٤) ، ب = (٥ ، −٨) ، حـ $\in$ $\overline{أب}$ بحيث حـ ب : أ حـ = ١ : ٢

فإن : حـ = ...

(أ) (٤ ، −٨) (ب) (٢ ، −٤) (جـ) (−٨ ، ٤) (د) (−٤ ، ٢)

(٩) إذا كانت : حـ ∈ $\overline{\text{أب}}$ وكان أب = ٤ بحـ ، أ (−١ ، ٤) ، ب (٣ ، ٤)

فإن النقطة حـ هى ....

(أ) (٠ ، ٤) (ب) (٤ ، ٢) (جـ) (٤ ، ٠) (د) (٢ ، ٤)

(١٠) إذا كانت : أ (−٣ ، −٤) ، ب (−٨ ، ٧) وكانت : حـ ∈ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، حـ ∉ $\overline{\text{أب}}$

بحيث أحـ = ٢ حـب فإن : حـ هى ....

(أ) (١٣ ، ١٨) (ب) (−١٣ ، ١٨) (جـ) (−١٣ ، −١٨) (د) (١٣ ، −١٨)

(١١) إذا كانت : ب (٠ ، ٣) ، حـ (٣ ، ٠) وكانت أ تقع فى ثلث المسافة من ب إلى حـ

فإن نقطة أ هى ....

(أ) (١ ، ٢) (ب) (٢ ، ١) (جـ) (−١ ، −٢) (د) (−٢ ، −١)

(١٢) إذا كانت : أ (٢ ، ٣) ، ب (٦ ، −١) فإن النقطة حـ التى تقع فى ربع المسافة من أ إلى ب

هى ....

(أ) (٢ ، ٣) (ب) (٢ ، −٣) (جـ) (٣ ، ٢) (د) (−٣ ، ٢)

(١٣) النقطة التى تقع فى $\frac{٢}{٥}$ المسافة من أ إلى ب للقطعة المستقيمة $\overleftarrow{\text{أب}}$

حيث أ (٣ ، −٢) ، ب (−١ ، ٥) هى ....

(أ) (−١ ، ٣) (ب) $\left(\frac{٧}{٥} ، \frac{٤}{٥}\right)$ (جـ) (٣ ، −١) (د) $\left(\frac{٤}{٥} ، \frac{٧}{٥}\right)$

(١٤) إذا كانت : حـ (٤ ، ٤) تقسم $\overleftarrow{\text{أب}}$ بنسبة ١ : ٢ من الداخل وكانت أ (٧ ، ٨) فإن : ب = ...

(أ) (−٢ ، −٤) (ب) (١ ، ٢) (جـ) (−١ ، −٢) (د) (٢ ، ٤)

(١٥) إذا كان : $\overleftarrow{\text{أب}}$ = (٣ ، ٤) ، أ = (−٢ ، ٥) ، حـ تقسم $\overleftarrow{\text{أب}}$ بنسبة ٣ : ٢ من الخارج

فإن : حـ = ...

(أ) (٧ ، ١٧) (ب) (٨ ، ٣) (جـ) (−٨ ، ٣) (د) (−٧ ، −١٧)

(١٦) النسبة التى يقسم بها محور السينات القطعة المستقيمة $\overleftarrow{\text{أب}}$ حيث أ (٢ ، ٥) ، ب (٧ ، −٢)

هى ....

(أ) ٥ : ٢ من الداخل. (ب) ٢ : ٣ من الداخل. (جـ) ٣ : ٢ من الخارج. (د) ٢ : ٥ من الخارج.

(١٧) النسبة التى يقسم بها محور الصادات $\overleftarrow{\text{أب}}$ حيث أ (٢ ، ٥) ، ب (٦ ، ٧) تساوى ....

(أ) ١ : ٣ من الخارج. (ب) ٣ : ١ من الداخل. (جـ) ١ : ٢ من الخارج. (د) ٣ : ٢ من الداخل.

(١٨) إذا كانت : أ (٢ ، ٥) ، ب (٥ ، ٢) ، حـ (٤ ، ص) ثلاث نقط على استقامة واحدة

فإن حـ تقسم $\overleftarrow{\text{أب}}$ بنسبة ....

(أ) ١ : ٢ من الداخل. (ب) ٢ : ١ من الداخل. (جـ) ٢ : ١ من الخارج. (د) ١ : ٢ من الخارج.

(١٩) فى الشكل المقابل :

$\overline{أء}$ متوسط فى Δ أ ب حـ ، م نقطة تلاقى المتوسطات

حيث أ = (٠ ، ٨) ، ب = (٣ ، ٢) ، حـ = (-٣ ، ٥)

فإن : نقطة م هى ....

(أ) (٠ ، ٧,٥)　　(ب) (٠ ، ٥)　　(جـ) (-٣ ، ٥)　　(د) (٥ ، ٠)

(٢٠) إذا كان : $\overline{أء}$ متوسطًا فى Δ أ ب حـ حيث أ = (١ ، ٢) ، ء = (٤ ، -٤)

فإن نقطة تلاقى متوسطات Δ أ ب حـ هى ....

(أ) (٣ ، -٢)　　(ب) (-٣ ، ٢)　　(جـ) (٢ ، -٣)　　(د) (-٢ ، -٣)

(٢١) أ ب حـ مثلث فيه : أ (-٣ ، ١) ، ب (١ ، ٧) ، م هى نقطة تلاقى متوسطاته حيث م = (١ ، ٢)

فإن النقطة حـ هى ....

(أ) (٥ ، ٢)　　(ب) (٥ ، -٢)　　(جـ) (-٥ ، ٢)　　(د) (-٥ ، -٢)

(٢٢) أ ب حـ مثلث فيه : أ (٨ ، ٧) ، م هى نقطة تلاقى متوسطاته حيث م = (٢ ، ١)

فإن النقطة ء منتصف $\overline{ب حـ}$ هى ....

(أ) (١ ، ٢)　　(ب) (٢ ، ١)　　(جـ) (-١ ، -٢)　　(د) (-١ ، ٢)

(٢٣) إذا كان : $\overline{أهـ}$ متوسط فى Δ أ ب حـ ، م هى نقطة تقاطع متوسطات Δ أ ب حـ وكانت :

أ (٥ ، ٤) ، م (٧ ، ٨) فإن : $\overrightarrow{أهـ}$ = ...

(أ) $\left(\frac{٤}{٣} ، \frac{٨}{٣}\right)$　　(ب) $\left(\frac{٢}{٣} ، \frac{٤}{٣}\right)$　　(جـ) (٣ ، ٦)　　(د) (١ ، ٢)

(٢٤) إذا كانت : حـ تقسم $\overleftarrow{ب أ}$ بنسبة ٢ : ٣ من الداخل فإن : $\frac{أ حـ}{أ ب}$ = ...

(أ) $\frac{٢}{٣}$　　(ب) $\frac{٣}{٢}$　　(جـ) $\frac{٣}{٥}$　　(د) $\frac{٢}{٥}$

(٢٥) إذا كانت : حـ تقسم $\overleftarrow{أ ب}$ بنسبة ٥ : ٧ من الخارج فإن : $\frac{أ حـ}{أ ب}$ = ...

(أ) $\frac{٢}{٧}$　　(ب) $\frac{٧}{٢}$　　(جـ) $\frac{٢}{٥}$　　(د) $\frac{٥}{٢}$

(٢٦) إذا كانت : حـ $\in$ $\overline{أ ب}$ وكان : ٣ $\overleftarrow{أ ب}$ = ٥ $\overleftarrow{ب حـ}$ فإن : حـ تقسم $\overleftarrow{ب أ}$ بنسبة ....

(أ) ٢ : ٣　　(ب) ٣ : ٢　　(جـ) ٣ : ٥　　(د) ٥ : ٣

(٢٧) إذا كانت أ تقسم $\overline{ب حـ}$ من الخارج بنسبة ٢ : ٣ فإن ....

(أ) ب تقسم $\overline{أ حـ}$ من الداخل بنسبة ٢ : ٣　　(ب) ب تقسم $\overline{أ حـ}$ من الداخل بنسبة ٢ : ١

(جـ) حـ تقسم $\overline{أ ب}$ من الداخل بنسبة ٣ : ١　　(د) حـ تقسم $\overline{أ ب}$ من الخارج بنسبة ٣ : ٢

(٢٨) أ ب حـ مثلث فيه : ب (٣ ، ٥) ، حـ (-٣ ، -٧) ، ء $\in \overline{ب حـ}$

بحيث مساحة Δ أ ب ء = $\frac{١}{٣}$ مساحة Δ أ ب حـ فإن : ء = ...

(أ) $\left(٣ ، \frac{١٧}{٣}\right)$ (ب) $\left(\frac{٣}{٢} ، ٢\right)$ (جـ) (٠ ، -١) (د) (١ ، ١)

(٢٩) إذا كانت نقط منتصفات أضلاع مثلث هى (-٢ ، ٣) ، (٧ ، -١) ، (٤ ، ٤)

فإن نقطة تلاقى متوسطات المثلث هى ....

(أ) (٣ ، ٢) (ب) (٩ ، ٦) (جـ) (٥ ، ٠) (د) $\left(\frac{٥}{٣} ، ٠\right)$

(٣٠) النسبة التى يقسم بها محور الصادات القطعة المستقيمة $\overleftrightarrow{أب}$ حيث أ $(س_١ ، ص_١)$

، ب $(س_٢ ، ص_٢)$ هى .... من الداخل/الخارج حيث $س_١ \neq ٠$ ، $س_٢ \neq ٠$

(أ) $\frac{|س_١|}{|س_٢|}$ (ب) $\frac{|س_٢|}{|س_١|}$ (جـ) $\frac{|ص_١|}{|ص_٢|}$ (د) $\frac{|ص_٢|}{|ص_١|}$

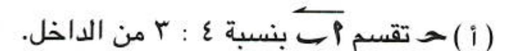
(٣١) النسبة التى يقسم بها محور السينات القطعة المستقيمة $\overleftrightarrow{أب}$ حيث أ $(س_١ ، ص_١)$

، ب $(س_٢ ، ص_٢)$ هى .... من الداخل/الخارج حيث $ص_١ \neq ٠$ ، $ص_٢ \neq ٠$

(أ) $\frac{|س_١|}{|س_٢|}$ (ب) $\frac{|س_٢|}{|س_١|}$ (جـ) $\frac{|ص_١|}{|ص_٢|}$ (د) $\frac{|ص_٢|}{|ص_١|}$

(٣٢) فى الشكل المقابل :

كل مما يأتى صحيح ما عدا ....



(أ) حـ تقسم $\overleftrightarrow{أب}$ بنسبة ٤ : ٣ من الداخل.

(ب) ب تقسم $\overleftrightarrow{حـ أ}$ بنسبة ٣ : ٧ من الخارج.

(جـ) أ تقسم $\overleftrightarrow{ب حـ}$ بنسبة ٤ : ٧ من الخارج.

(د) حـ تقسم $\overleftrightarrow{ب أ}$ بنسبة ٣ : ٤ من الداخل.

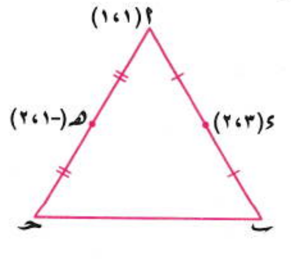
(٣٣) إذا كانت أ $\in$ محور السينات ، ب $\in$ محور الصادات وكانت النقطة حـ (٣ ، ٢) تقسم $\overleftrightarrow{أب}$ من

الداخل بنسبة ٢ : ٣ فإن النقطتين أ ، ب على الترتيب هما ....

(أ) (٣ ، ٠) ، (٠ ، ٢) (ب) (٤ ، ٠) ، (٠ ، ٤)

(جـ) (٥ ، ٠) ، (٠ ، ٥) (د) (١ ، ٠) ، (٠ ، ٨)

(٣٤) فى الشكل المقابل :



إذا كانت ء منتصف $\overline{أب}$ ، هـ منتصف $\overline{أحـ}$

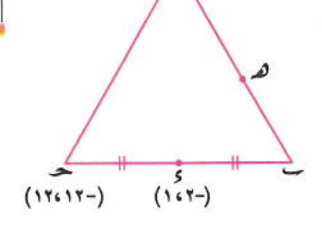
وكان : أ (١ ، ١) ، ء (٣ ، ٢) ، هـ (-١ ، ٢)

فإن نقطة تلاقى متوسطات المثلث هى ....



(أ) $\left(-١ ، \frac{٧}{٣}\right)$ (ب) $\left(١ ، \frac{٧}{٣}\right)$ (جـ) $\left(\frac{-١}{٣} ، \frac{٧}{٣}\right)$ (د) $\left(\frac{١}{٣} ، \frac{٧}{٣}\right)$

(٣٥) فى الشكل المقابل :



ء منتصف $\overline{بجـ}$ ، هـ ∈ $\overline{أب}$ بحيث

٣ هـ ب = ٤ هـ أ فإن النقطة هـ هى ....

(أ) (٣ ، -٣) (ب) (٤ ، -٢)

(جـ) (٥ ، -١) (د) (٦ ، ٢)

(٣٦) إذا كان : أ (س$_1$ ، ص$_1$) ، ب (س$_2$ ، ص$_2$) نقطتين فى المستوى وكان محور الصادات يقسم $\overleftrightarrow{أب}$ من الخارج فمن المؤكد أن ....

(أ) س$_1$ ، س$_2$ موجبان. (ب) س$_1$ س$_2$ > صفر

(جـ) ص$_1$ ، ص$_2$ موجبان. (د) ص$_1$ ص$_2$ > صفر

(٣٧) إذا كانت جـ منتصف $\overline{أب}$ وكانت ء تقسم $\overleftarrow{أجـ}$ من الداخل بنسبة ٢ : ٣

فإن ء تقسم $\overleftarrow{أب}$ بنسبة ....

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{٢}{٥}$ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) $\frac{١}{٨}$

(٣٨) إذا كانت النقطة جـ تقسم $\overleftarrow{أب}$ من الداخل بنسبة ٣ : ٢ ونقطة ء تقسم $\overleftarrow{أجـ}$ من الداخل بنسبة ١ : ٤

فإن نقطة ء تقسم $\overleftarrow{أب}$ بنسبة ....

(أ) ١ : ٦ (ب) ١ : ٨ (جـ) ٣ : ٢٢ (د) ٤ : ١٧

(٣٩) إذا كانت : جـ (س$_1$ ، ص$_1$) ، ء (س$_2$ ، ص$_2$) هما نقطتا تثليث $\overline{أب}$ حيث أ (-١ ، ٤) ، ب (٨ ، ٦)

فإن : س$_1$ + س$_2$ = ...

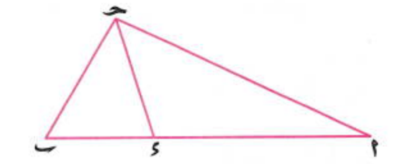
(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٧ (د) ٨

(٤٠) إذا كانت : أ (-٢ ، ٥) ، ب (٦ ، ١) وكانت جـ تقسم $\overleftarrow{أب}$ من الداخل بنسبة م$_1$: م$_2$

وكانت ء تقسم $\overleftarrow{بأ}$ من الداخل بنسبة م$_1$: م$_2$ وكانت جـ = (٤ ، ٢) فإن : ء = ...

(أ) (٢ ، ٣) (ب) (٤ ، ٦) (جـ) (٤ ، ٠) (د) (٠ ، ٤)

(٤١) فى الشكل المقابل :



أ ب جـ مثلث ، ء ∈ $\overline{أب}$ حيث أ (١ ، -٤) ، ب (٦ ، ٦)

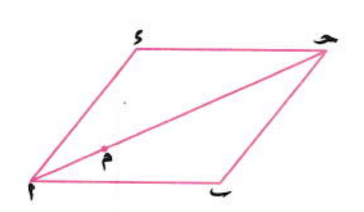
، ء (٤ ، ٢) ، أ جـ = ٦ سم ، ب جـ = ٤ سم

فإن كل مما يأتى صحيح ما عدا ....

(أ) مساحة Δ أ جـ ء = $\frac{٣}{٢}$ مساحة Δ ب جـ ء (ب) محيط Δ أ جـ ء > محيط Δ ب جـ ء

(جـ) $\overleftarrow{جـ ء}$ ينصف ∠ أ جـ ب (د) ء تقسم $\overleftarrow{بأ}$ بنسبة ٣ : ٢ من الداخل.

(٤٢) في الشكل المقابل :



أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه :

أ (−٣ ، −٥) ، ب (٢ ، −٨) ، ء (٨ ، ٦)

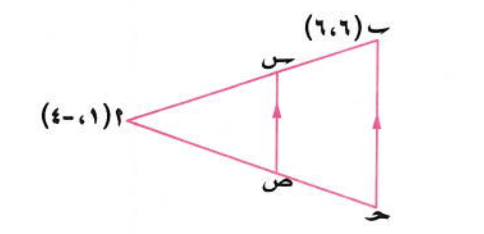
وكان : $\overleftarrow{أحـ}$ = ٤ $\overleftarrow{أم}$ فإن : م = ...

(أ) (٣ ، −٢) (ب) (−٥ ، ٣) (جـ) (−٣ ، ٤) (د) (١ ، −٣)

(٤٣) إذا كانت نقطة الأصل على رادار مراقبة هى ميناء بحرى وتحركت منه سفينتان فى نفس الوقت الأولى نحو الشرق بسرعة ٦٠ كم/س والأخرى شمالاً بسرعة ٤٠ كم/س فإن النقطة التى تقع فى منتصف المسافة بين السفينتين بعد مرور ٣ ساعات هى .... «حيث كم هو وحدة الأطوال»

(أ) (٩٠ ، ٦٠) (ب) (٦٠ ، ٩٠) (جـ) (١٨٠ ، ١٢٠) (د) (١٢٠ ، ١٨٠)

(٤٤) في الشكل المقابل :



إذا كان : $\overline{سص}$ // $\overline{ب حـ}$

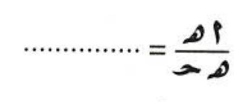
، $\frac{أص}{أحـ} = \frac{٣}{٥}$

فإن : س = ...

(أ) (٢ ، ٤) (ب) (٤ ، ٢) (جـ) (−٢ ، ٤) (د) (−٤ ، ٢)



(٤٥) في الشكل المقابل :



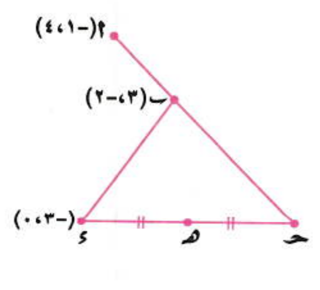
$\frac{أهـ}{هـحـ}$ = ...

(أ) $\frac{٤}{٣}$ (ب) $\frac{٣}{٤}$

(جـ) $\frac{٤}{٥}$ (د) $\frac{٢}{٣}$



(٤٦) في الشكل المقابل :



إذا كانت أ ∈ $\overleftrightarrow{حـ ب}$

وكان : أحـ = ٣ أب

فإن : هـ = ...

(أ) (٤ ، −٢) (ب) (−٢ ، ٠) (جـ) (٤ ، −٧) (د) (٨ ، −٥)

(٤٧) في الشكل المقابل :

النقطة حـ هى ....

(أ) (٥ ، ٠)

(ب) (٤ ، ٠)

(جـ) (٣ ، ٠)

(د) (٢ ، ٠)

(٤٨) في الشكل المقابل :

حـ أ : حـ ب = ...

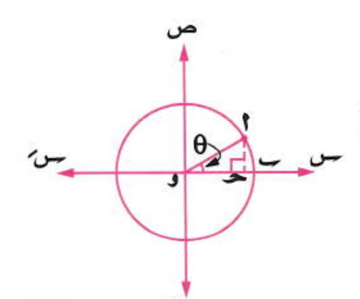
(أ) ٢ : ١

(ب) ٧ : ٣

(جـ) ٣ : ٧

(د) ١ : ٢

(٤٩) في الشكل المقابل :



زاوية θ فى وضعها القياسى ضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى أ

فإن و تقسم $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$ من الخارج بالنسبة ....

(أ) $\frac{١}{١ - \text{حا } θ}$ (ب) حا θ

(جـ) قا θ (د) قتا θ

(٥٠) إذا كان متجه موضع النقطة أ بالصورة القطبية هو $\overrightarrow{\text{أ}}$ = $\left(٥\sqrt{٢} ، \frac{٣π}{٤}\right)$ ، ب(٢ ، ٥) ، حـ ∈ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

وكانت ب تقسم $\overleftarrow{\text{أ حـ}}$ بنسبة ٧ : ٤ من الخارج فإن : حـ = ...

(أ) (−٢ ، ٥) (ب) (٣ ، ٤) (جـ) (−٢ ، ٤) (د) $\left(-٢ ، ٥\sqrt{٢}\right)$

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ إذا كانت : أ = (٠ ، −٣) ، ب = (٣ ، ٦) فأوجد إحداثيي النقطة حـ التي تقسم $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ من الداخل بنسبة ١ : ٢

«(٢ ، ٣)»

٢ إذا كانت : أ = (٣ ، −٢) ، ب = (−١ ، ٥) فأوجد :

(١) إحداثيي النقطة حـ التي تقسم $\overleftarrow{أب}$ بنسبة ٢ : ٣ من الداخل.

(٢) إحداثيي النقطة ء التي تقسم $\overleftarrow{أب}$ بنسبة ٤ : ٣ من الخارج. «$(\frac{٧}{٥} ، \frac{٤}{٥})$ ، (−١٣ ، ٢٦)»

---

٣ أوجد إحداثيي النقطة حـ التي تقع عند خمس المسافة من النقطة أ = (−١ ، −١)

إلى النقطة ب = (٩ ، ٤) «(١ ، ٠)»

---

٤ إذا كانت : حـ ∈ $\overleftarrow{بأ}$ ، حـ ∉ $\overline{أب}$ وكانت أ = (٣ ، ١) ، ب = (٤ ، ٢)

وكان : أحـ = ٢ أب أوجد إحداثيي نقطة حـ «(١ ، −١)»

---

٥ إذا كانت : أ = (١ ، ٣) ، ب = (−٤ ، −٢) أوجد إحداثيي النقطة حـ

إذا كانت : حـ ∈ $\overleftarrow{أب}$ بحيث ٣ أحـ = ٢ حـ ب «(−١ ، ١)»

---

٦ إذا كانت : أ = (٤ ، ٣) ، ب = (−٣ ، ٥)

فأوجد حـ ∈ $\overleftrightarrow{أب}$ بحيث ٣ أحـ = ٥ حـ ب «$(\frac{-٣}{٨} ، \frac{١٧}{٤})$ ، $(-\frac{٢٧}{٢} ، ٨)$»

---

٧ إذا كانت : أ = (٢ ، ١) ، ب = (−١ ، −٢) فأوجد إحداثيي النقطة حـ ∈ $\overleftarrow{أب}$

، حـ ∉ $\overline{أب}$ بحيث بعدها عن أ أربعة أمثال بعدها عن ب «(−٢ ، −٣)»

---

٨ إذا كانت النقطة أ = (٣ ، −٤) ، حـ = (−١ ، ل) ، ب = (ك ، ١)

على استقامة واحدة ، حـ ∈ $\overleftarrow{أب}$ ، $\frac{أحـ}{حـب} = \frac{٢}{٣}$ أوجد : ل ، ك «−٢ ، −٧»

---

٩ إذا كانت : أ = (٨ ، −٤) ، ب = (−١ ، ٢) فأوجد إحداثيات النقطتين اللتين تقسمان $\overleftarrow{أب}$

إلى ثلاثة أجزاء متساوية فى الطول. «(٥ ، −٢) ، (٢ ، ٠)»

---

١٠ إذا كانت : أ = (١ ، −٤) ، ب = (٥ ، ٤) فأوجد إحداثيات النقط حـ ، ء ، هـ التى تقسم $\overleftarrow{أب}$

إلى أربعة أجزاء متساوية فى الطول. «(٢ ، −٢) ، (٣ ، ٠) ، (٤ ، ٢)»

---

١١ إذا كانت : أ ∈ محور السينات ، ب ∈ محور الصادات ، حـ = (−٤ ، ٣) منتصف $\overline{أب}$

فأوجد إحداثيي كل من أ ، ب «(−٨ ، ٠) ، (٠ ، ٦)»

---

١٢ إذا كانت : أ = (٣ ، −٢) ، ب = (−٢ ، ٣) فأوجد النسبة التى تقسم بها النقطة

حـ = (٨ ، ص) القطعة $\overline{أب}$ مبينًا نوع التقسيم ثم أوجد قيمة ص «١ : ٢ (من الخارج) ، −٧»

١٣ أوجد النسبة التى يقسم بها محور الصادات القطعة المستقيمة $\overline{أب}$ حيث أ = (٢ ، ٣) ، ب = (-٣ ، ٧) مبينًا نوع التقسيم وأوجد نقطة التقسيم. «$\frac{٢}{٣}$ (من الداخل) ، (٠ ، $\frac{٢٣}{٥}$)»

---

١٤ إذا كانت : أ = (-٢ ، ٣) ، ب = (٤ ، -٢) فأوجد النسبة التى يقسم بها محور السينات القطعة المستقيمة $\overline{أب}$ مبينًا نوع التقسيم وأوجد نقطة التقسيم. «$\frac{٣}{٢}$ (من الداخل) ، ($\frac{٨}{٥}$ ، ٠)»

---

١٥ إذا كانت : أ = (٥ ، ٢) ، ب = (٢ ، -١) فأوجد النسبة التى تنقسم بها $\overline{أب}$ بكل من نقطتى تقاطع $\overleftrightarrow{أب}$ مع محورى الإحداثيات ، مبينًا نوع التقسيم فى كل حالة ، ثم أوجد إحداثيى نقطة التقسيم.

«٢ : ١ (من الداخل) ، ٥ : ٢ (من الخارج) ، (٣ ، ٠) ، (٠ ، -٣)»

---

١٦ إذا كانت : حـ ، ء نقطتى تقاطع $\overleftrightarrow{أب}$ مع محورى الإحداثيات فأوجد النسبة التى تقسم بها كل من حـ ، ء القطعة المستقيمة $\overline{أب}$ مبينًا نوع التقسيم ، علمًا بأن : أ = (-٥ ، ٧) ، ب = (-٣ ، ٢)

«٧ : ٢ (من الخارج) ، ٥ : ٣ (من الخارج)»

---

١٧ إذا كانت النقط أ = (١ ، -١) ، ب = (-١ ، ١) ، حـ = ($\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{٣}$) هى رءوس مثلث فأوجد إحداثيى نقطة تقاطع متوسطاته. «($\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ، $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$)»

---

١٨ إذا كانت : أ = (٤ ، ١٢) ، ب = (-٢ ، ١٠) ، حـ = (١ ، ٣) ، ء = (٢ ، ٧) ، هـ منتصف $\overline{أب}$ ، م تقسم $\overline{حـء}$ من الخارج بنسبة ٣ : ٢ أوجد طول $\overline{هـم}$ «٥ وحدات طول»

---

١٩ أ ب حـ ء متوازى أضلاع فإذا كانت : أ = (٧ ، -٢) ، ب = (١٥ ، ٤) ، حـ = (٩ ، ٦) فأوجد إحداثيى نقطة تقاطع قطريه $\overline{أحـ}$ ، $\overline{بء}$ ثم أوجد إحداثيى الرأس ء «(٨ ، ٢) ، (١ ، ٠)»

---

٢٠ إذا كان : أ ب حـ ء شكلاً رباعيًا ، أ = (٤ ، ٣) ، ب = (٠ ، ٢) ، حـ = (-٢ ، -٣) ، ء = (٢ ، -٢) أوجد نقطة منتصف كل من $\overline{أحـ}$ ، $\overline{بء}$ ثم حدد نوع الشكل أ ب حـ ء «(١ ، ٠) ، (١ ، ٠) ، متوازى أضلاع»

---

٢١ **أثبت أن النقط أ = (١ ، ٤) ، ب = (٣ ، -٢) ، حـ = (-٣ ، ١٦) تقع على استقامة واحدة ثم أوجد :**

(١) النسبة التى تقسم بها أ القطعة المستقيمة $\overline{بحـ}$ ، مبينًا نوع التقسيم. «١ : ٢ (من الداخل)»

(٢) النسبة التى تقسم بها ب القطعة المستقيمة $\overline{حـأ}$ ، مبينًا نوع التقسيم. «٣ : ١ (من الخارج)»

(٣) النسبة التى تقسم بها حـ القطعة المستقيمة $\overline{أب}$ ، مبينًا نوع التقسيم. «٢ : ٣ (من الخارج)»

٢٢ ء ، هـ ، ں منتصفات $\overline{أب}$ ، $\overline{بحـ}$ ، $\overline{حـأ}$ على الترتيب فى Δ أبحـ

فإذا كانت : ء = (٢ ، ٣) ، هـ = (-١ ، ٤) ، ں = (٤ ، ٥)

فأوجد إحداثيات : أ ، ب ، حـ «(٧ ، ٤) ، (-٣ ، ٢) ، (١ ، ٦)»

---

٢٣ أبحـ مثلث رءوسه أ = (٣ ، ٥) ، ب = (٦ ، -٤) ، حـ = (١ ، ١)

فإذا كانت : ء تقسم $\overrightarrow{أب}$ بنسبة ١ : ٢ ، هـ تقسم $\overrightarrow{أحـ}$ بنسبة ١ : ٢ أيضًا

فأثبت أن : $\overline{ءهـ}$ // $\overline{بحـ}$ ، ءهـ = $\frac{١}{٣}$ بحـ

---

٢٤ الربط بالمسافة : تتحرك سيارة نقل ركاب فى طريقها من المدينة أ إلى المدينة ب حيث أ = (٥ ، -٦) ، ب = (١ ، ٠) وتوقفت مرتين أثناء سيرها. أوجد إحداثيات النقطتين اللتين توقفت عندهما السيارة إذا كانت :

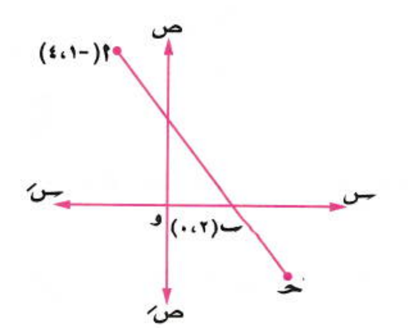
(١) وقفت فى منتصف الطريق.

(٢) توقفت فى ثلثى الطريق من جهة النقطة أ «(٣ ، -٣) ، ($\frac{٧}{٣}$ ، -٢)»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) فى الشكل المقابل :



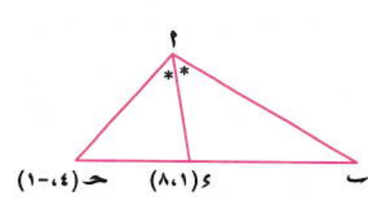
إذا كان : بحـ = ٢,٥ وحدة طول

فإن النقطة حـ = ...

(أ) (٣ ، -٢) (ب) (٣,٥ ، -٢)

(جـ) (٤ ، -٢) (د) (٢,٥ ، -١)

(٢) فى الشكل المقابل :



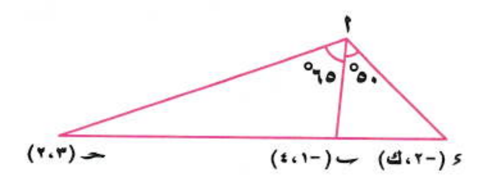
إذا كان : ٤ أحـ = ٣ أب

فإن النقطة ب هى ....



(أ) (-٥ ، ١٤) (ب) (-٤ ، ١٦) (جـ) (-٣ ، ٢٠) (د) (-٢ ، ٢١)

(٣) فى الشكل المقابل :



إذا كان : ب ∈ $\overline{ءحـ}$

فإن : $\frac{أب}{أء}$ = ...

(أ) $\frac{٦}{٥}$ (ب) ١ (جـ) $\frac{٤}{٥}$ (د) $\frac{٣}{٥}$

(٤) إذا كانت أ ، ب هما صورتا النقطة (٣ ، ١) بالانعكاس فى محور السينات والصادات على الترتيب فإن النقطة التى تقسم $\overline{أب}$ من الداخل بنسبة ٢ : ٣ هى ....

(أ) (٣ ، −١) (ب) $\left(\frac{٣}{٥} ، \frac{-١}{٥}\right)$ (جـ) $\left(\frac{-٣}{٥} ، \frac{١}{٥}\right)$ (د) (٠ ، ٠)

(٥) إذا كانت النقطتان أ ، ب تقعان على منحنى الدالة : ص = $س^٢$ حيث أ (٣ ، ٩) وكان محور الصادات يقسم $\overline{أب}$ بنسبة ٣ : ٢ من الداخل فإن : ب = ...

(أ) (−١ ، ١) (ب) (−٢ ، ٤) (جـ) (−١,٥ ، ٢,٢٥) (د) (−٣ ، ٩)

(٦) فى الشكل المقابل :

إذا كانت : م (٣ ، ٢) نقطة تلاقى متوسطات Δ أ ب جـ

، مَ (١ ، −٣) نقطة تلاقى متوسطات Δ أَ بَ جـَ

فإن : $\overrightarrow{أأَ} + \overrightarrow{ببَ} + \overrightarrow{جـجـَ}$ = ...

(أ) (٢ ، ٥) (ب) (٦ ، ١٥)

(جـ) (−٢ ، −٥) (د) (−٦ ، −١٥)

---

٢ فى الشكل المقابل :

أ ب جـ ء متوازى أضلاع فيه : و منتصف $\overline{ب جـ}$

، $\overline{أجـ} \cap \overline{ءو}$ = {هـ}

فإذا كانت : هـ = (٣ ، ٣)

، جـ = (٢ ، ٥) **فأوجد :** إحداثيى النقطة أ «(٥ ، −١)»

---

٣ إذا كانت : أ = (٢ ، ٢) ، ب = (٥ ، ٦) ، جـ = (١٠ ، −٤) هى رءوس مثلث

، ء ∈ $\overline{ب جـ}$ بحيث $\overrightarrow{أء}$ ينصف ∠ أ من الداخل أوجد إحداثيى النقطة ء «$\left(\frac{٢٠}{٣} ، \frac{٨}{٣}\right)$»



معادلة الخط المستقيم



درسنا فى السنوات السابقة أن :

* **الصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم هى :** $أ س + ب ص + حـ = ٠$

حيث أ ، ب ، حـ أعداد حقيقية ، أ ، ب لا يساويان الصفر معًا وتمثل بيانيًا بخط مستقيم

فمثلًا كل من العلاقات : $س + \sqrt{٣}$ ص = ٦ ، ص = ٣ ، س − ٤ = ٠ تمثل خطًا مستقيمًا

، كل من العلاقتين : $ص + \sqrt{س} = ٤$ ، $س + \frac{١}{ص} = ٥$ لا تمثل خطًا مستقيمًا.

* **ميل الخط المستقيم :**

١ إذا كان المستقيم ل يمر بالنقطتين $(س_١ ، ص_١)$ ، $(س_٢ ، ص_٢)$

فإن : $م \text{ (ميل المستقيم ل) } = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

فمثلًا المستقيم المار بالنقطتين (١ ، ٣) ، (٤ ، ٢) ميله يساوى $\frac{٢ - ٣}{٤ - ١} = \frac{-١}{٣}$

٢ إذا كانت معادلة المستقيم على الصورة : $أ س + ب ص + حـ = ٠$

فإن : $\text{ميل المستقيم} = \frac{- \text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$

فمثلًا المستقيم الذى معادلته : ٥ س + ٢ ص + ٧ = ٠ ميله = $\frac{-٥}{٢}$

٣ إذا كانت معادلة المستقيم على الصورة : ص = م س + حـ فإن : ميله = م

، يقطع جزءًا من محور الصادات طوله القيمة المطلقة للعدد حـ ويمر بالنقطة (٠ ، حـ)

فمثلًا المستقيم الذى معادلته : ص = ٣ س − ٥

ميله = ٣ ويقطع من الجزء السالب لمحور الصادات ٥ وحدات طولية ويمر بالنقطة (٠ ، −٥)

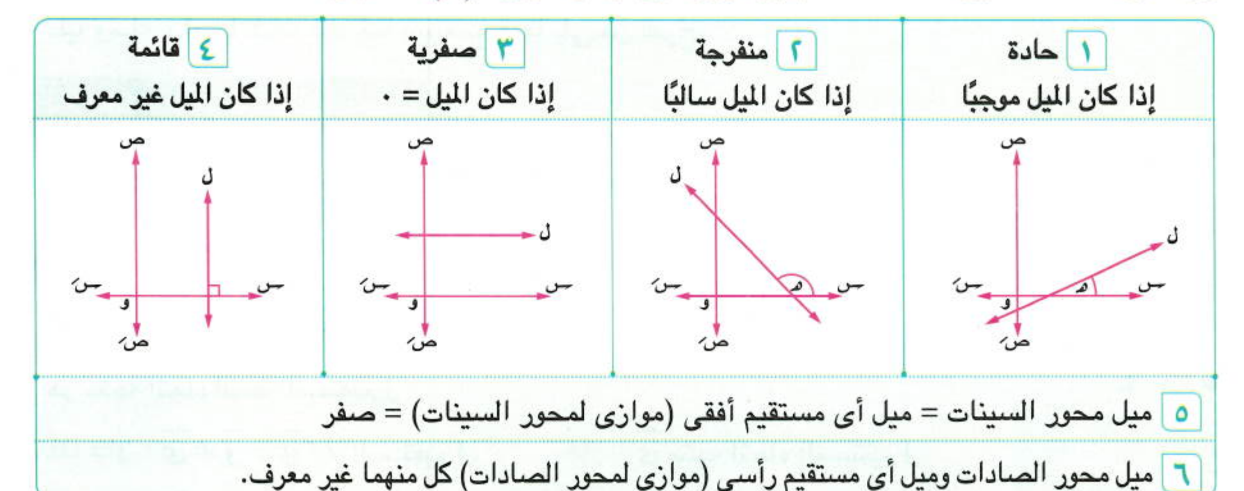
٤ إذا كان : $ه$ قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

فإن : ميل المستقيم = طا $ه$

فمثلًا إذا كان قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات = ٤٥°

فإن ميل المستقيم = طا ٤٥° = ١

وبالتالى نلاحظ أن ميل الخط المستقيم يتغير بتغير قياس الزاوية ($ه$) كما يلى :



٥ ميل محور السينات = ميل أى مستقيم أفقى (موازى لمحور السينات) = صفر

٦ ميل محور الصادات وميل أى مستقيم رأسى (موازى لمحور الصادات) كل منهما غير معرف.

* إذا كان ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ميل $\overleftrightarrow{بحـ}$ فإن النقط أ ، ب ، حـ تقع على استقامة واحدة.

* **العلاقة بين المستقيمين المتوازيين والمتعامدين :**

إذا كان : $ل_١$ ، $ل_٢$ مستقيمين ميلاهما $م_١$ ، $م_٢$ على الترتيب فإن :

١ $ل_١ \parallel ل_٢ \Longleftrightarrow م_١ = م_٢$

أى أن المستقيمين المتوازيين ميلاهما متساويان ، والعكس صحيح.

٢ $ل_١ \perp ل_٢ \Longleftrightarrow م_١ م_٢ = -١$ (ما لم يوازى أحدهما أحد المحورين)

أى أن حاصل ضرب ميلى مستقيمين متعامدين يساوى -١ ، والعكس صحيح.

فمثلًا إذا كان المستقيم $ل_١$ يمر بالنقطتين (٣ ، ٥) ، (−٣ ، −١)

يكون ميله $م_١ = \frac{٥ + ١}{٣ + ٣} = ١$

، المستقيم $ل_٢$ معادلته : ٣ س − ٣ ص + ٥ = ٠ يكون ميله $م_٢ = \frac{-٣}{-٣} = ١$

، المستقيم $ل_٢$ يصنع زاوية موجبة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات قياسها ١٣٥°

يكون ميله $م_٢$ = طا $١٣٥^\circ = -١$

، $\because م_١ = م_٢$ $\quad \therefore ل_١ \parallel ل_٢$

، ∵ $م_١ × م_٣ = ١ × -١ = -١$ ∴ $ل_١ ⊥ ل_٣$

، ∵ $م_٢ × م_٣ = ١ × -١ = -١$ ∴ $ل_٢ ⊥ ل_٣$

* أى نقطتين مختلفتين فى المستوى يمر بهما خط مستقيم واحد ، ومن أى نقطة خارج هذا المستقيم يمكن رسم مستقيم آخر وحيد يوازيه.

* لتحديد معادلة أى خط مستقيم فإنه يلزمنا معرفة معلومتين عن هذا المستقيم كأن نعرف نقطتين عليه ، أو نقطة عليه وميله ، أو ما شابه ذلك كما سيتضح فيما يلى من شرح.

تعريف متجه اتجاه المستقيم

هو متجه غير صفرى يمكن تمثيله بقطعة مستقيمة موجهة على خط مستقيم.

* **ففى الشكل المقابل :**

كل من $\overleftarrow{سص}$ ، $\overleftarrow{صع}$ ، $\overleftarrow{عس}$ ، $\overleftarrow{صس}$

هو متجه اتجاه للخط المستقيم ل

* **إذا كان :** $\overleftarrow{ى} \neq \overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$ // المستقيم ل **فإن :** $\overleftarrow{ى}$ متجه اتجاه المستقيم ل

* **إذا كان :** $\overleftarrow{ى}$ = (أ ، ب) متجه اتجاه المستقيم.

فإن : ك $\overleftarrow{ى}$ متجه اتجاه لنفس المستقيم حيث ك ∈ ح*

فمثلًا **إذا كان :** $\overleftarrow{ى}$ = (٣ ، ٤) متجه اتجاه مستقيم ما فإن كلًا من المتجهات (٦ ، ٨) ، (-٣ ، -٤) ، (١,٥ ، ٢) ، (١٥ ، ٢٠) ، ... متجه اتجاه لهذا المستقيم.

ملاحظة

إذا كان : $\overleftarrow{ى}$ = (أ ، ب) متجه اتجاه لمستقيم فإن ميل هذا المستقيم = $\frac{ب}{أ}$ ، والعكس صحيح.

فمثلًا إذا كان : (٢ ، -٣) متجه اتجاه لمستقيم فإن ميل هذا المستقيم = $\frac{-٣}{٢}$ ، المستقيم الذى ميله = $\frac{-٤}{٧}$ يكون المتجه $\overleftarrow{ى}$ = (٧ ، -٤) متجه اتجاه له.

الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم

* إذا كان ل مستقيمًا يمر بالنقطة ق ، $\overleftarrow{ى}$ متجه اتجاه له وبفرض نقطة ن تقع على المستقيم ل وأن $\overleftarrow{ق}$ ، $\overleftarrow{ر}$ هما المتجهان الممثلان بالقطعتين المستقيمتين الموجهتين $\overline{وق}$ ، $\overline{ون}$ على الترتيب

* يوجد عدد ك ∈ ح* بحيث $\overleftarrow{قن} = \overleftarrow{ر} - \overleftarrow{ق} = ك \overleftarrow{ى}$

∴ $\boxed{\overleftarrow{ر} = \overleftarrow{ق} + ك \overleftarrow{ى}}$ وتسمى هذه الصورة «المعادلة المتجهة للخط المستقيم»

حيث ك عدد حقيقى ويسمى بارامتر وعند كل قيمة للبارامتر ك يمكن إيجاد نقطة على المستقيم.

* بفرض $\text{ر} = (\text{س} ، \text{ص})$ ، $\text{و} = (\text{س}_١ ، \text{ص}_١)$ ، $\overleftarrow{\text{ى}} = (\text{أ} ، \text{ب})$

∴ معادلة الخط المستقيم هى : $(\text{س} ، \text{ص}) = (\text{س}_١ ، \text{ص}_١) + \text{ك} (\text{أ} ، \text{ب})$

∴ $\boxed{\text{س} = \text{س}_١ + \text{ك} \text{أ} ، \text{ص} = \text{ص}_١ + \text{ك} \text{ب}}$

وتسمى هذه الصورة «المعادلات الوسيطية (البارامترية)»

∴ $\frac{\text{س} - \text{س}_١}{\text{أ}} = \text{ك}$ ، $\frac{\text{ص} - \text{ص}_١}{\text{ب}} = \text{ك}$

وبحذف ك من المعادلتين : ∴ $\frac{\text{س} - \text{س}_١}{\text{أ}} = \frac{\text{ص} - \text{ص}_١}{\text{ب}}$ ∴ $\frac{\text{ص} - \text{ص}_١}{\text{س} - \text{س}_١} = \frac{\text{ب}}{\text{أ}}$

، ∵ الميل $(\text{م}) = \frac{\text{ب}}{\text{أ}}$ ∴ $\boxed{\frac{\text{ص} - \text{ص}_١}{\text{س} - \text{س}_١} = \text{م}}$

وتسمى هذه الصورة «المعادلة الكارتيزية»

نلخص ما سبق فيما يلى :

المستقيم ل الذى يمر بالنقطة $\text{و} = (\text{س}_١ ، \text{ص}_١)$ والمتجه $\overleftarrow{\text{ى}} = (\text{أ} ، \text{ب})$ متجه اتجاه له تكون :

- **المعادلة المتجهة هى :** $\overleftarrow{\text{ر}} = \overleftarrow{\text{و}} + \text{ك} \overleftarrow{\text{ى}}$

  أى أن $(\text{س} ، \text{ص}) = (\text{س}_١ ، \text{ص}_١) + \text{ك} (\text{أ} ، \text{ب})$

- **المعادلتان الوسيطيتان هما :** $\text{س} = \text{س}_١ + \text{ك} \text{أ}$ ، $\text{ص} = \text{ص}_١ + \text{ك} \text{ب}$

- **المعادلة الكارتيزية هى :** $\frac{\text{ص} - \text{ص}_١}{\text{س} - \text{س}_١} = \text{م}$

مثال ١

أوجد الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم الذى يمر بالنقطة $\text{و} = (٣ ، -٢)$ والمتجه $\overleftarrow{\text{ى}} = (-٢ ، ١)$ متجه اتجاه له.

الحل

* المعادلة المتجهة للمستقيم هى : $\overleftarrow{\text{ر}} = \overleftarrow{\text{و}} + \text{ك} \overleftarrow{\text{ى}}$ ∴ $\overleftarrow{\text{ر}} = (٣ ، -٢) + \text{ك} (-٢ ، ١)$

أى أن $(\text{س} ، \text{ص}) = (٣ ، -٢) + \text{ك} (-٢ ، ١)$

* المعادلتان الوسيطيتان هما : $\text{س} = ٣ - ٢ \text{ك}$ ، $\text{ص} = -٢ + \text{ك}$

* المعادلة الكارتيزية هى : $\frac{\text{ص} + ٢}{\text{س} - ٣} = \frac{١}{-٢}$

∴ $\text{س} - ٣ = -٢ \text{ص} - ٤$

∴ الصورة العامة هى : $\text{س} + ٢ \text{ص} + ١ = ٠$

تذكر أن

∵ $(-٢ ، ١)$ متجه اتجاه للمستقيم

∴ ميل المستقيم $= \frac{١}{-٢}$

حل آخر لإيجاد المعادلة الكارتيزية :

بحذف ك من المعادلتين الوسيطيتين $\therefore \frac{س - ٣}{-٢} = \frac{ص + ٢}{١}$

أى أن س + ٢ ص + ١ = ٠

مثال ٢

أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة (-٢ ، ١) وميله = $-\frac{٤}{٥}$

الحل

$\because$ الميل م = $\frac{-٤}{٥}$ $\therefore$ المتجه $\overrightarrow{ى}$ = (٥ ، -٤) متجه اتجاه لهذا المستقيم.

* المعادلة المتجهة هى : $\overrightarrow{ر}$ = (-٢ ، ١) + ك (٥ ، -٤)

أى أن (س ، ص) = (-٢ ، ١) + ك (٥ ، -٤)

* المعادلتان الوسيطيتان هما : س = -٢ + ٥ ك ، ص = ١ - ٤ ك

* المعادلة الكارتيزية هى : $\frac{ص - ١}{س + ٢} = -\frac{٤}{٥}$ $\therefore$ الصورة العامة هى : ٤ س + ٥ ص + ٣ = ٠

حاول بنفسك

أوجد معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة (١ ، ٤) ويصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها $\frac{٣\pi}{٤}$

معادلة المستقيم بمعلومية نقطتين عليه و = ($س_١$ ، $ص_١$) ، ن = ($س_٢$ ، $ص_٢$)

المتجه $\overrightarrow{ى} = \overrightarrow{و ن} = (\overrightarrow{ن} - \overrightarrow{و})$ متجه اتجاه للمستقيم.

$\therefore$ **المعادلة المتجهة هى :** $\overrightarrow{ر} = \overrightarrow{و} + ك (\overrightarrow{ن} - \overrightarrow{و})$

، $\because$ الميل (م) = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ وبالتعويض عن الميل فى الصورة الكارتيزية.

$\therefore$ **المعادلة الكارتيزية هى :** $\frac{ص - ص_١}{س - س_١} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

مثال ٣

أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم الذى يمر بالنقطتين : و = (٣ ، -١) ، ن = (-٢ ، ٤)

الحـل

$\overrightarrow{ى} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{و} = (-٢ ، ٤) - (٣ ، -١) = (-٥ ، ٥)$ متجه اتجاه للمستقيم المطلوب

∴ $\overrightarrow{ى'} = \frac{١}{٥} \overrightarrow{ى} = \frac{١}{٥} (-٥ ، ٥) = (-١ ، ١)$ متجه اتجاه أيضًا للمستقيم ، ميل المستقيم = $\frac{١}{-١} = -١$

∴ المعادلة المتجهة هى : $\overrightarrow{ر} = \overrightarrow{و} + ك \overrightarrow{ى'}$ ∴ $\overrightarrow{ر} = (٣ ، -١) + ك (-١ ، ١)$

أى أن : (س ، ص) = (٣ ، -١) + ك (-١ ، ١)

، المعادلتان الوسيطيتان هما : س = ٣ - ك ، ص = -١ + ك

، المعادلة الكارتيزية هى : $\frac{ص + ١}{س - ٣} = -١$

أى أن : ص + ١ = -س + ٣

∴ الصورة العامة هى : ص + س - ٢ = ٠

مـلاحظـات

١ معادلة المستقيم الذى يمر بنقطة الأصل و (٠ ، ٠) هى :

* المعادلة المتجهة : $\overrightarrow{ر} = ك \overrightarrow{ى}$ حيث $\overrightarrow{ى}$ متجه اتجاه له.

* المعادلة الكارتيزية : ص = م س حيث م ميل المستقيم.

٢ متجه اتجاه المستقيم الذى يمر بنقطة الأصل والنقطة ($س_١$ ، $ص_١$) هو $\overrightarrow{ى} = (س_١ ، ص_١)$

٣ المستقيم الذى يوازى محور السينات ويمر بالنقطة ($س_١$ ، $ص_١$) يكون المتجه

$\overrightarrow{س} = (١ ، ٠)$ متجه اتجاه له.

، معادلته المتجهة : $\overrightarrow{ر} = (س_١ ، ص_١) + ك (١ ، ٠)$

، معادلته الكارتيزية : $\frac{ص - ص_١}{س - س_١} = \frac{٠}{١}$ **أى أن** $ص = ص_١$

٤ المستقيم الذى يوازى محور الصادات ويمر بالنقطة ($س_١$ ، $ص_١$)

يكون المتجه $\overrightarrow{ص} = (٠ ، ١)$ متجه اتجاه له.

، معادلته المتجهة : $\overrightarrow{ر} = (س_١ ، ص_١) + ك (٠ ، ١)$

، معادلته الكارتيزية : $\frac{ص - ص_١}{س - س_١} = \frac{١}{٠}$ (غير معرف) **أى أن** $س = س_١$

٥ معادلة محور السينات هى : ص = ٠ أو $\overrightarrow{ر} = ك (١ ، ٠)$

٦ معادلة محور الصادات هى : س = ٠ أو $\overrightarrow{ر} = ك (٠ ، ١)$

مثال ٤

أوجد الصورة المتجهة والكارتيزية للخط المستقيم الذى يمر بنقطة الأصل وبالنقطة ى = (−٣ ، ٥)

الحل

∵ المستقيم يمر بنقطة الأصل.

∴ المتجه $\overleftarrow{ى}$ = (−٣ ، ٥) متجه اتجاه لهذا المستقيم

، ميل المستقيم = $\frac{-٥}{٣}$

∴ المعادلة المتجهة هى : $\overleftarrow{ر}$ = ك $\overleftarrow{ى}$

∴ $\overleftarrow{ر}$ = ك (−٣ ، ٥)

، المعادلة الكارتيزية هى : ص = م س

∴ ص = $\frac{-٥}{٣}$ س

∴ ٣ ص + ٥ س = ٠

متجه اتجاه العمودى على المستقيم

* **إذا كان :** $\overleftarrow{ى}$ = (أ ، ب) متجه اتجاه مستقيم فإن أيًا من عائلة المتجهات التى على الصورة ك (ب ، − أ) حيث ك ∈ ح* يكون متجه اتجاه العمودى على المتجه $\overleftarrow{ى}$

* **إذا كان :** $\overleftarrow{ن}$ = (أ ، ب) عموديًا على خط مستقيم فإن أيًا من عائلة المتجهات التى على الصورة ك = (ب ، − أ) حيث ك ∈ ح* يكون متجه اتجاه المستقيم.

فمثلًا **إذا كان :** $\overleftarrow{ى}$ = (٤ ، ٥) متجه اتجاه مستقيم فإن متجه اتجاه العمودى عليه هو :

(٥ ، −٤) ، (−٥ ، ٤) ، (−١٠ ، ٨) ، ...

مثال ٥

أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم ل الذى يمر بالنقطة ى (−٣ ، ٢) وعمودى على المتجه $\overleftarrow{ن}$ = (١ ، ٤)

الحل

∵ $\overleftarrow{ن}$ = (١ ، ٤) عمودى على المستقيم ل

∴ $\overleftarrow{ى}$ = (٤ ، −١) متجه اتجاه للمستقيم ل

∴ المعادلة المتجهة هى : $\overleftarrow{ر}$ = $\overleftarrow{ى}$ + ك $\overleftarrow{ى}$

∴ $\overleftarrow{ر}$ = (−٣ ، ٢) + ك (٤ ، −١)

أى أن (س ، ص) = (−٣ ، ٢) + ك (٤ ، −١)

، المعادلتان الوسيطيتان هما : س = −٣ + ٤ ك ، ص = ٢ − ك

، المعادلة الكارتيزية هى : $\frac{ص - ٢}{س + ٣} = \frac{-١}{٤}$

أى أن ٤ ص − ٨ = − س − ٣

∴ الصورة العامة هى : س + ٤ ص − ٥ = ٠

ملاحظة

إذا كانت المعادلة العامة للمستقيم هى : أ س + ب ص + حـ = ٠ فإن :

* المتجه $\overleftarrow{ن}$ = (أ ، ب) = (معامل س ، معامل ص) هو متجه عمودى على المستقيم.
* المتجه $\overleftarrow{ى}$ = (ب ، − أ) هو متجه اتجاه لهذا المستقيم.

فمثلًا المستقيم الذى معادلته : ٢ س + ٣ ص + ٧ = ٠ يكون :

المتجه $\overleftarrow{ن}$ = (٢ ، ٣) هو متجه عمودى عليه ، المتجه $\overleftarrow{ى}$ = (٣ ، −٢) هو متجه اتجاه له.

مثال ٦

أوجد الصورة المتجهة لمعادلة المستقيم : ٣ س − ٢ ص + ١٢ = ٠

الحل

∵ المستقيم : ٣ س − ٢ ص + ١٢ = ٠

∴ المتجه $\overleftarrow{ن}$ = (٣ ، −٢) متجه عمودى عليه. ∴ المتجه $\overleftarrow{ى}$ = (٢ ، ٣) متجه اتجاه له.

وللحصول على الصورة المتجهة لمعادلة هذا المستقيم نبحث عن أى نقطة يمر بها وذلك بأن نعطى س (أو ص) أى قيمة ونوجد قيمة ص (أو س) المناظرة.

فبوضع س = ٠ نجد أن : −٢ ص + ١٢ = ٠ ∴ ص = ٦

∴ المستقيم يمر بالنقطة (٠ ، ٦) ∴ معادلته المتجهة هى : $\overleftarrow{ر}$ = (٠ ، ٦) + ك (٢ ، ٣)

حاول بنفسك

أوجد المعادلة المتجهة والكارتيزية للمستقيم ل الذى يمر بالنقطة (−٤ ، ١) والمتجه (−٣ ، ٦) عمودى عليه.

معادلة المستقيم بمعلومية ميله (م) وطول الجزء المقطوع من محور الصادات

∵ المستقيم ميله (م) ويقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، حـ)

أى أنه يقطع جزءًا من محور الصادات طوله القيمة المطلقة للعدد حـ

وبالتعويض فى الصورة الكارتيزية نجد أن : $\frac{\text{ص} - \text{حـ}}{\text{س} - ٠}$ = م

أى أن ص = م س + حـ

معادلة المستقيم بمعلومية الجزءين المقطوعين من محورى الإحداثيات

نفرض أن المستقيم يقطع محور السينات فى النقطة (أ ، ٠) ، محور الصادات فى النقطة (٠ ، ب)

∴ ميل المستقيم (م) = $\frac{\text{ب} - ٠}{٠ - \text{أ}}$ = $\frac{-\text{ب}}{\text{أ}}$

وبالتعويض فى الصورة الكارتيزية :

$\therefore \frac{ص - ٠}{س - أ} = \frac{-ب}{أ}$ $\therefore$ أ ص = $-$ ب س + أ ب

$\therefore$ ب س + أ ص = أ ب «وبالقسمة على أ ب» $\therefore$ معادلة المستقيم هى : $\boxed{\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = ١}$

مثال ٧

أوجد المعادلة العامة لكل مما يأتى :

١ المستقيم $ل_١$ الذى ميله ٣ ويقطع من الجزء السالب لمحور الصادات جزءًا طوله ٧ وحدات طولية.

٢ المستقيم $ل_٢$ الذى يقطع من الجزء الموجب لمحور السينات ٤ وحدات ويقطع من الجزء السالب لمحور الصادات ٣ وحدات.

الحل

١ معادلة المستقيم $ل_١$ هى : ص = م س + جـ $\therefore$ ص = ٣ س $-$ ٧

٢ معادلة المستقيم $ل_٢$ هى : $\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = ١$ $\therefore \frac{س}{٤} + \frac{ص}{-٣} = ١$

أى ٣ س $-$ ٤ ص $-$ ١٢ = ٠

حاول بنفسك

أوجد طولى الجزءين المقطوعين من المحورين بالمستقيم : ٣ س + ٨ ص $-$ ٢٤ = ٠

ملاحظات

* **المعادلة :** أ س + ب ص + جـ = ٠ حيث أ ، ب لا يساويان الصفر معًا

تسمى بالصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم.

١ **إذا كان :** أ = ٠ ، ب $\neq$ ٠ **فإن :** ب ص + جـ = ٠ **أى أن** $\boxed{ص = \frac{-جـ}{ب}}$

وهى معادلة مستقيم موازى لمحور السينات ويمر بالنقطة $\left(٠ ، \frac{-جـ}{ب}\right)$

٢ **إذا كان :** أ $\neq$ ٠ ، ب = ٠ **فإن :** أ س + جـ = ٠ **أى أن** $\boxed{س = \frac{-جـ}{أ}}$

وهى معادلة مستقيم موازى لمحور الصادات ويمر بالنقطة $\left(\frac{-جـ}{أ} ، ٠\right)$

٣ **إذا كان :** جـ = ٠ **فإن :** أ س + ب ص = ٠

وهى معادلة مستقيم يمر بنقطة الأصل.

* لإيجاد نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات نضع $\boxed{ص = ٠}$
* لإيجاد نقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات نضع $\boxed{س = ٠}$

مثال ٨

أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها الخط المستقيم : ٣ س + ٢ ص + ٦ = ٠

مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ثم أوجد إحداثيات نقطتى تقاطعه مع محورى الإحداثيات.

الحل

∵ ميل المستقيم = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$ ∴ طا هـ = $\frac{-٣}{٢}$

∵ الميل السالب. ∴ الزاوية منفرجة.

، ∵ قياس الزاوية الحادة التى ظلها $\frac{٣}{٢}$ هو ٥٦ ١٩ ٥٦° ∴ ق(∠ هـ) = ١٨٠° − ٥٦ ١٩ ٥٦° = ١٢٣ ٤١ ٤°

ولإيجاد نقطة التقاطع مع محور الصادات نضع س = ٠ ∴ ٣ × ٠ + ٢ ص + ٦ = ٠

∴ ص = −٣ ∴ نقطة التقاطع هى (٠ ، −٣)

ولإيجاد نقطة التقاطع مع محور السينات نضع ص = ٠ ∴ ٣ س + ٢ × ٠ + ٦ = ٠

∴ س = −٢ ∴ نقطة التقاطع هى (−٢ ، ٠)

حل آخر لإيجاد نقطتى التقاطع مع محورى الإحداثيات :

∵ ٣ س + ٢ ص + ٦ = ٠

∴ ٣ س + ٢ ص = −٦ بالقسمة على −٦ ∴ $\frac{\text{س}}{-٢} + \frac{\text{ص}}{-٣} = ١$

∴ المستقيم يقطع محور السينات فى النقطة (−٢ ، ٠) ويقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، −٣)

مثال ٩

أثبت أن النقط : أ = (٤ ، −٣) ، ب = (−٦ ، ٧) ، حـ = (٥ ، −٤) تقع على استقامة واحدة.

الحل

∵ ميل $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ = $\frac{٧ + ٣}{-٦ - ٤}$ = −١ ، ميل $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ = $\frac{-٤ - ٧}{٥ + ٦}$ = −١

∴ النقط أ ، ب ، حـ تقع على استقامة واحدة.

حل آخر : ∵ معادلة $\overleftrightarrow{\text{أ حـ}}$ هى : $\frac{\text{ص} + ٣}{\text{س} - ٤} = \frac{-٤ + ٣}{٥ - ٤}$ = −١ أى ص + س − ١ = ٠

، ∵ النقطة ب = (−٦ ، ٧) تحقق المعادلة. ∴ ب ∈ $\overleftrightarrow{\text{أ حـ}}$

∴ أ ، ب ، حـ تقع على استقامة واحدة.

مثال ١٠

أوجد المعادلة العامة لكل من المستقيمات الآتية :

١ المستقيم ل١ الذى يمر بالنقطة (٣ ، −١) وميله = $-\frac{٣}{٤}$

٢ المستقيم $ل_٢$ الذى يمر بالنقطة $(\sqrt{٣} ، ٤)$ ويصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها ١٢٠°

٣ المستقيم $ل_٣$ الذى يمر بالنقطة (–٢ ، –٥) والمتجه $\overleftarrow{ى}$ = (٣ ، ١) متجه اتجاه له.

٤ المستقيم $ل_٤$ الذى يمر بالنقطة (٤ ، –٢) والعمودى على المتجه $\overleftarrow{ن}$ = (–١ ، ٥)

٥ المستقيم $ل_٥$ الذى يمر بالنقطة (–٣ ، ٧) ويوازى محور السينات.

٦ المستقيم $ل_٦$ الذى يمر بالنقطتين (٤ ، –٢) ، (٥ ، ٣)

٧ المستقيم $ل_٧$ الذى يمر بالنقطة (١ ، ٢) موازيًا المستقيم : ٢ س + ٣ ص – ٦ = ٠

٨ المستقيم $ل_٨$ الذى يمر بالنقطة (٢ ، ٣) عموديًا على المستقيم الذى ميله $\frac{٥}{٢}$

الحل

١ معادلة المستقيم $ل_١$ هى : $\frac{ص + ١}{س - ٣} = -\frac{٣}{٤}$ أى ٣ س + ٤ ص – ٥ = ٠

٢ ∵ ميل المستقيم $ل_٢$ = طا ١٢٠° = $-\sqrt{٣}$

∴ معادلة المستقيم $ل_٢$ هى : $\frac{ص - \sqrt{٣}}{س - ٤} = -\sqrt{٣}$ أى ص + $\sqrt{٣}$ س = ٥ $\sqrt{٣}$

٣ ∵ ميل المستقيم $ل_٣$ = $\frac{١}{٣}$

∴ معادلة المستقيم $ل_٣$ هى : $\frac{ص + ٥}{س + ٢} = \frac{١}{٣}$ أى س – ٣ ص – ١٣ = ٠

٤ المتجه $\overleftarrow{ى}$ = (٥ ، ١) متجه اتجاه للمستقيم $ل_٤$ ∴ ميله = $\frac{١}{٥}$

∴ معادلة المستقيم $ل_٤$ هى : $\frac{ص + ٢}{س - ٤} = \frac{١}{٥}$ أى س – ٥ ص – ١٤ = ٠

٥ معادلة المستقيم $ل_٥$ هى : ص = ٧ أى ص – ٧ = ٠

٦ ∵ ميل المستقيم $ل_٦$ = $\frac{٣ + ٢}{٥ - ٤}$ = ٥

∴ معادلة المستقيم $ل_٦$ هى : $\frac{ص + ٢}{س - ٤}$ = ٥ أى ٥ س – ص – ٢٢ = ٠

٧ ∵ ميل المستقيم المعطى = $\frac{-٢}{٣}$ ∴ ميل المستقيم المطلوب = $\frac{-٢}{٣}$

∴ معادلته هى : $\frac{ص - ٢}{س - ١} = \frac{-٢}{٣}$ أى ٣ ص + ٢ س – ٨ = ٠

٨ ∵ ميل المستقيم المعطى = $\frac{٥}{٢}$ ∴ ميل المستقيم المطلوب = $\frac{-٢}{٥}$

∴ معادلته هى : $\frac{ص - ٣}{س - ٢} = \frac{-٢}{٥}$ أى ٢ س + ٥ ص – ١٩ = ٠

مثال ١١

$\overset{\triangle}{}$ أ ب حـ مثلث رءوسه النقط : أ = (−١ ، ٥) ، ب = (٤ ، −٢) ، حـ = (−٣ ، ٠)

أوجد معادلة المستقيم المار بالرأس أ عمودياً على $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$

الحل

∵ $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$ = $\overleftarrow{\text{حـ}}$ − $\overleftarrow{\text{ب}}$ = (−٣ ، ٠) − (٤ ، −٢) = (−٧ ، ٢)

، ∵ المتجه $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$ = (−٧ ، ٢) عمودى على المستقيم ل

∴ المتجه $\overleftarrow{\text{ى}}$ = (٢ ، ٧) متجه اتجاه المستقيم ل

∴ ميل المستقيم = $\frac{٧}{٢}$

، ∵ المستقيم يمر بالنقطة أ = (−١ ، ٥)

∴ معادلة المستقيم هى : $\frac{\text{ص} - ٥}{\text{س} + ١} = \frac{٧}{٢}$ ∴ ٧ س + ٧ = ٢ ص − ١٠

أى ٧ س − ٢ ص + ١٧ = ٠

مثال ١٢

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (١ ، ٣) وميله سالب والذى يصنع مع محورى الإحداثيات مثلثاً مساحته ٦ وحدات مربعة.

الحل

نفرض أن المستقيم يقطع محور السينات فى (أ ، ٠)

، الصادات فى (٠ ، ب)

∴ معادلته تكون على الصورة : $\frac{\text{س}}{\text{أ}} + \frac{\text{ص}}{\text{ب}} = ١$

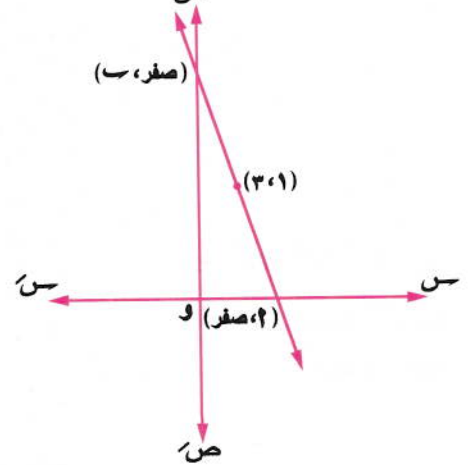
، ∵ (١ ، ٣) نقطة على المستقيم. ∴ $\frac{١}{\text{أ}} + \frac{٣}{\text{ب}} = ١$

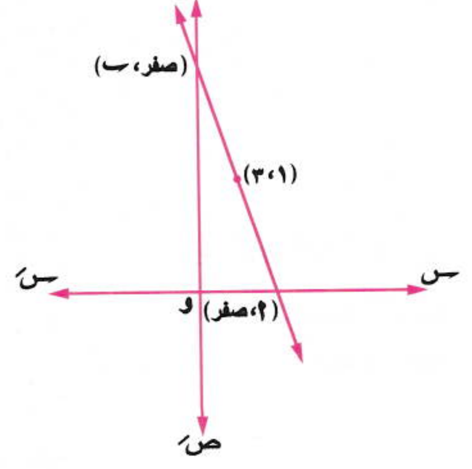
∴ ب + ٣ أ = أ ب (١)

، ∵ مساحة المثلث = ٦ وحدات مربعة.

∴ $\frac{١}{٢}$ أ ب = ٦

∴ أ ب = ١٢ (٢)





بالتعويض من (٢) فى (١) :

∴ ب + ٣ أ = ١٢ ∴ ب = ١٢ − ٣ أ

وبالتعويض فى (٢) :

∴ أ (١٢ − ٣ أ) = ١٢ ∴ ١٢ أ − ٣ أ^{٢} = ١٢ ∴ ٣ أ^{٢} − ١٢ أ + ١٢ = ٠

∴ أ^{٢} − ٤ أ + ٤ = ٠ ∴ (أ − ٢)^{٢} = ٠ ∴ أ = ٢ ومنها ب = ٦

∴ معادلة المستقيم هى : $\frac{\text{س}}{٢} + \frac{\text{ص}}{٦} = ١$ أى ٣ س + ص = ٦

مثال ١٣

أوجد مسقط النقطة أ (٥ ، ٠) على المستقيم ل : ٢ س + ص = ٥

ثم أوجد صورة النقطة أ بالانعكاس فى نفس المستقيم.

الحل

بفرض نقطة ب هى مسقط النقطة أ على المستقيم ل

∵ معادلة المستقيم ل هى ٢ س + ص = ٥ (١)

∴ ميل المستقيم ل = −٢

∴ ميل $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ = $\frac{١}{٢}$

∴ معادلة $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ هى $\frac{\text{ص} - ٠}{\text{س} - ٥} = \frac{١}{٢}$

أى أن : س − ٢ ص = ٥ (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) : ∴ س = ٣ ، ص = −١

∴ ب = (٣ ، −١)

أى أن : مسقط النقطة أ على المستقيم ٢ س + ص = ٥ هى النقطة ب = (٣ ، −١)

لإيجاد أ′ (حـ ، ء) صورة أ (٥ ، ٠) بالانعكاس فى المستقيم ل

∴ ب منتصف $\overline{\text{أأ′}}$ ∴ $\left(\frac{٥ + \text{حـ}}{٢} ، \frac{٠ + \text{ء}}{٢}\right)$ = (٣ ، −١)

∴ حـ = ١ ، ء = −٢ ∴ أ′ = (١ ، −٢)

ملاحظات

١ ميل المستقيم الذى يصنع مع محورى الإحداثيات مثلثًا متساوى الساقين يساوى ١ أو −١

٢ مساحة المثلث الذى يصنعه المستقيم $\frac{\text{س}}{\text{أ}} + \frac{\text{ص}}{\text{ب}} = ١$ مع محورى الإحداثيات يساوى $\frac{١}{٢}$ | أ × ب | وحدة مربعة.



تمارين 5

على معادلة الخط المستقيم

من أسئلة الكتاب المدرسى • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت : أ (٣ ، –٢) ، ب (٥ ، ٦) فإن ميل المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ = ...

(أ) –١ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) ٤ (د) ١

(٢) ميل المستقيم الذى معادلته : ٢ س – ٣ ص + ٥ = ٠ يساوى ....

(أ) $\frac{-٢}{٣}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\frac{-٣}{٢}$ (د) $\frac{٣}{٢}$

(٣) المستقيم المار بالنقطتين (٤ ، –٢) ، (٥ ، ٣) يكون ميل المستقيم العمودى عليه = ...

(أ) ٥ (ب) $\frac{١}{٥}$ (جـ) –٥ (د) $\frac{-١}{٥}$

(٤) إذا كان ميل المستقيم : (٣ أ + ١) س – ٢ أ ص + ٢ = ٠ يساوى ٢ فإن : أ = ...

(أ) ١ (ب) –١ (جـ) $\frac{٥}{٣}$ (د) –$\frac{١}{٢}$

(٥) إذا كان المستقيم : أ س – ٤ ص + ٥ = ٠ يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية ظلها ٠,٧٥
فإن : أ = ...

(أ) $\frac{-١٦}{٣}$ (ب) –٣ (جـ) $\frac{١٦}{٣}$ (د) ٣

(٦) إذا كانت النقط : (١ ، ٨) ، (٣ ، ص) ، (٩ ، –٤) تقع على استقامة واحدة فإن : ص = ...

(أ) ١١ (ب) ٥ (جـ) –١١ (د) –٥

(٧) إذا توازى المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ٠) ، (٠ ، ٢) والمستقيم ص = أ س – ٣
فإن : أ = ...

(أ) $\frac{-٢}{٣}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\frac{٣}{٢}$ (د) $\frac{-٣}{٢}$

(٨) إذا كان المستقيمان : ٣ س – ٢ ص + ٧ = ٠ ، أ س + ٣ ص + ٥ = ٠ متعامدين
فإن : أ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) –٢ (د) –١

(٩) ميل المستقيم الذى يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة جيب تمامها $\frac{٤}{٥}$ هو ....

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{٤}{٥}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{٤}{٣}$

(١٠) المستقيم الذى يصنع زاوية موجبة قياسها $\frac{\pi}{٤}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات يكون
متجه اتجاهه = ...

(أ) (٠ ، ١) (ب) (١ ، ٠) (جـ) (–١ ، ١) (د) (١ ، ١)

(١١) المستقيم الذى معادلته ص = $\frac{٥}{٤}$ س + ٧ يكون متجه اتجاهه = ...

(أ) (٥ ، ٤) (ب) (٤ ، ٥) (جـ) (-٥ ، ٤) (د) (٥ ، -٤)

(١٢) المستقيم : أ س + ب ص + حـ = ٠ له متجه اتجاه هو ....

(أ) (أ ، ب) (ب) (أ ، - ب) (جـ) (ب ، أ) (د) (ب ، -أ)

(١٣) ميل المستقيم المار بالنقطتين (أ ، أ^{٢}) ، (ب ، ب^{٢}) هو ....

(أ) أ^{٢} - ب^{٢} (ب) أ - ب (جـ) أ + ب (د) أ ب

(١٤) إذا كان : $\overleftarrow{ى}$ = (٢ ، -٥) متجه اتجاه لمستقيم ما فإن جميع المتجهات التالية تكون متجهات اتجاه لنفس المستقيم ما عدا المتجه ....

(أ) (-٢ ، ٥) (ب) (٦ ، -١٥) (جـ) (٢ ، ٥) (د) (-١ ، ٢,٥)

(١٥) 📖 إذا كان : $\overleftarrow{ى}$ = ($\frac{١}{٢}$ ، ١) متجه اتجاه للمستقيم فإن جميع المتجهات التالية عمودية على المستقيم عدا المتجه ....

(أ) (١ ، -$\frac{١}{٢}$) (ب) (٢ ، -١) (جـ) (-١ ، -$\frac{١}{٢}$) (د) (٤ ، -٢)

(١٦) إذا كان ميل المستقيم = $\frac{-٢}{٣}$ فإن متجه اتجاهه يكون ....

(أ) (٣ ، -٢) (ب) (-٣ ، ٢)

(جـ) (٦ ، -٤) (د) كل ما سبق صحيح.

(١٧) 📖 إذا كان : (٦ ، ٤) ، (٣ ، م) متجهى اتجاه لمستقيمين متعامدين فإن : م = ...

(أ) $\frac{٢}{٩}$ (ب) $\frac{-٢}{٩}$ (جـ) $\frac{٩}{٢}$ (د) $\frac{-٩}{٢}$

(١٨) متجه اتجاه المستقيم العمودى على محور الصادات يمكن أن يكون ....

(أ) (٢ ، ٠) (ب) (٠ ، ١) (جـ) (١ ، ١) (د) (١ ، -١)

(١٩) كل من العلاقات الآتية تمثل خطًا مستقيمًا ما عدا ....

(أ) ص = $\sqrt{٥}$ س (ب) س = ٥ (جـ) $\frac{س}{٥}$ + $\frac{ص}{٢}$ = ١ (د) ص = $\sqrt{س}$

(٢٠) معادلة المستقيم المار بالنقطتين (٤ ، ٠) ، (٠ ، ٣) هى ....

(أ) ٣ س + ٤ ص = ١٢ (ب) ٤ س + ٣ ص = ٢٥

(جـ) ٣ س - ٤ ص = ٠ (د) ٣ ص - ٤ س = -٧

(٢١) 📖 معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة (٢ ، -٣) ويوازى محور السينات هى ....

(أ) س + ٣ = ٠ (ب) ص + ٣ = ٠ (جـ) س - ٢ = ٠ (د) ص - ٣ = ٠

(٢٢) 📖 المعادلة الكارتيزية للمستقيم الذى يمر بالنقطة (-٢ ، ٧) ويوازى محور الصادات هى ....

(أ) ص = ٢ (ب) ص = -٢ (جـ) س = ٧ (د) س = -٢

(٢٣) معادلة المستقيم الذى يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها ٤٥° ويقطع جزءًا موجبًا من محور الصادات مقداره ٥ وحدات هى ....

(أ) ص = ــس − ٥ (ب) ص = $\frac{١}{٢}$ ــس + ٥

(جـ) ص = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ــس + ٥ (د) ص = ــس + ٥

(٢٤) معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، −٢) عموديًا على المستقيم ص = ٧ هى ....

(أ) ــس = ٣ (ب) ــس = ٧ (جـ) ص = −٢ (د) ص = ٧

(٢٥) المعادلة الكارتيزية للمستقيم الذى يقطع من المحورين السينى والصادى جزأين موجبين مقداراهما ٢ ، ٣ على الترتيب هى ....

(أ) ٣ ــس + ٢ ص = ٦ (ب) ٣ ــس + ٢ ص = ١

(جـ) ٢ ــس + ٣ ص = ٦ (د) ٢ ــس + ٣ ص = ١

(٢٦) المعادلة المتجهة للمستقيم الذى يمر بالنقطة (−٤ ، ٣) ومتجه الاتجاه له (٢ ، ٥) هى ....

(أ) $\overleftarrow{ر}$ = (٢ ، ٥) + ك (−٤ ، ٣) (ب) $\overleftarrow{ر}$ = (−٤ ، ٣) + ك (٢ ، ٥)

(جـ) $\overleftarrow{ر}$ = (−٤ ، ٣) + ك (٥ ، ٢) (د) $\overleftarrow{ر}$ = (٢ ، ٥) + ك (٣ ، −٤)

(٢٧) المعادلة المتجهة للمستقيم الذى يمر بنقطة الأصل وبالنقطة (١ ، ٢) هى ....

(أ) $\overleftarrow{ر}$ = ك (١ ، ٢) (ب) $\overleftarrow{ر}$ = ك (٢ ، ١)

(جـ) $\overleftarrow{ر}$ = (١ ، ٢) + ك (١ ، ٠) (د) $\overleftarrow{ر}$ = (١ ، ٢) + ك (٠ ، ١)

(٢٨) الصيغة العامة لمعادلة الخط المستقيم المار بنقطة الأصل ويوازى المستقيم الذى معادلته : $\overleftarrow{ر}$ = (٢ ، −٥) + ك (٣ ، ٤) هى ....

(أ) ٣ ــس + ٥ = صفر (ب) ٤ ــس − ٣ ص = صفر

(جـ) ٥ ــس − ٢ ص = صفر (د) ٣ ــس − ٤ ص = صفر

(٢٩) المعادلة المتجهة لمحور السينات هى ....

(أ) $\overleftarrow{ر}$ = (١ ، ١) + ك (٠ ، ٠) (ب) $\overleftarrow{ر}$ = (١ ، ٠) + ك (١ ، ١)

(جـ) $\overleftarrow{ر}$ = ك (١ ، ٠) (د) $\overleftarrow{ر}$ = ك (٠ ، ١)

(٣٠) المعادلة المتجهة للمستقيم الذى يمر بالنقطة (٣ ، ٥) ويوازى محور السينات هى ....

(أ) $\overleftarrow{ر}$ = ك (٣ ، ٥) (ب) $\overleftarrow{ر}$ = (٣ ، ٥) + ك (٠ ، ١)

(جـ) $\overleftarrow{ر}$ = (٣ ، ٥) + ك (١ ، ٠) (د) $\overleftarrow{ر}$ = ك (١ ، ٠)

(٣١) جميع المعادلات الآتية تمثل معادلة المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ٠) ، (٠ ، ٢) ما عدا المعادلة ....

(أ) $\overleftarrow{ر}$ = (٣ ، ٠) + ك (٣ ، −٢) (ب) $\overleftarrow{ر}$ = (٠ ، ٢) + ك (٣ ، −٢)

(جـ) $\overleftarrow{ر}$ = (٣ ، ٠) + ك (٢ ، ٣) (د) $\overleftarrow{ر}$ = (٠ ، ٢) + ك (−٦ ، ٤)

(٣٢) المعادلتان البارامتريتان للمستقيم الذى يمر بالنقطة (٠ ، ٥) ومتجه الاتجاه له (-١ ، ٤) هما ....

(أ) س = ١ - ك ، ص = ٥ + ٤ ك　　　(ب) س = ك ، ص = ٥ + ٤ ك

(جـ) س = ٥ + ٤ ك ، ص = - ك　　　(د) س = - ك ، ص = ٥ + ٤ ك

(٣٣) المعادلتان البارامتريتان للمستقيم الذى يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها ٤٥° ويمر بالنقطة (٣ ، -٥) هما ....

(أ) س = ٣ + ك ، ص = -٥ + ك　　　(ب) س = ٣ + ك ، ص = ٥ + ك

(جـ) س = ١ + ٣ ك ، ص = ١ - ٥ ك　　　(د) س = ١ - ٣ ك ، ص = ١ + ٥ ك

(٣٤) المستقيم ل : س = ١ - ٢ ك ، ص = -١ + ٤ ك يمر بالنقطة ....

(أ) (١ ، ١)　　　(ب) (١ ، -١)　　　(جـ) (-١ ، -١)　　　(د) (-١ ، ١)

(٣٥) 📖 المستقيم الذى معادلته المتجهة هى $\overleftarrow{ر}$ = (٢ ، -١) + ك (٣ ، -٥) يكون متجه اتجاه العمودى عليه = ...

(أ) (٣ ، -٥)　　　(ب) (٢ ، -١)　　　(جـ) (٥ ، ٣)　　　(د) (-٥ ، ٣)

(٣٦) إذا كان المستقيمان : ٤ س + ب ص + ٩ = ٠ ، $\overleftarrow{ر}$ = (١ ، ٥) + ك (٢ ، ٦) متوازيين فإن : ب = ...

(أ) $\frac{٤}{٣}$　　　(ب) $\frac{٣}{٤}$　　　(جـ) $\frac{-٤}{٣}$　　　(د) $\frac{-٣}{٤}$

(٣٧) إذا مر مستقيم بالنقطة (٢ ، ١) وكان المتجه $\overleftarrow{ى}$ = (١ ، ٣) عموديًا عليه فإن معادلة المستقيم هى ....

(أ) س + ٢ ص + ٥ = ٠　　　(ب) س + ٣ ص - ٥ = ٠

(جـ) س - ٣ ص = ٠　　　(د) ٣ س - ص - ٥ = ٠

(٣٨) المستقيم العمودى على المستقيم : $\overleftarrow{ر}$ = (٠ ، ٥) + ك ($\sqrt{٣}$ ، ١) يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ....

(أ) ٣٠°　　　(ب) ٦٠°　　　(جـ) ١٢٠°　　　(د) ١٥٠°

(٣٩) المستقيم : $\overleftarrow{ر}$ = (١ ، ٤) + ك (٠ ، ١) يوازى ....

(أ) محور السينات.　　　(ب) محور الصادات.

(جـ) المستقيم س = ص　　　(د) المستقيم ص = ٢

(٤٠) 📖 مساحة المثلث المحدد بمحور السينات ومحور الصادات والمستقيم ٢ س + ٣ ص = ٦ تساوى .... وحدة مربعة.

(أ) ٦　　　(ب) ٣　　　(جـ) ٢　　　(د) ١٢

(٤١) أى النقط الآتية تقع على المستقيم $\overleftarrow{ر}$ = (-٢ ، ١) + ك (١ ، -٣) ؟

(أ) ($\frac{-٥}{٣}$ ، -٢)　　　(ب) ($\frac{-٣}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$)　　　(جـ) ($\frac{٣}{٢}$ ، $-\frac{١}{٢}$)　　　(د) ($\frac{-٧}{٣}$ ، ٢)

(٤٢) النقطة التى تقع على المستقيم : س = -١ + ٢ ك ، ص = ٣ - ك والتى إحداثيها السينى = ٣ هى ....

(أ) (٣ ، ١) (ب) (٣ ، -١) (جـ) (٣ ، ٠) (د) (٣ ، ٢)

(٤٣) طول الجزء المقطوع من محور الصادات بالمستقيم : ٢ س + ٣ ص - ٦ = ٠ هو .... وحدة طول.

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) ٥ (د) ٦

(٤٤) إذا كانت الصورة البارامترية لمعادلة مستقيم هى س = ٦ + ٣ ك ، ص = ١ - ٢ ك

فإن ميل هذا المستقيم = ...

(أ) $\frac{١}{٦}$ (ب) ٦ (جـ) $\frac{-٢}{٣}$ (د) $\frac{-٣}{٢}$

(٤٥) المستقيمان $\frac{س}{أ} + \frac{ص}{أ} = ١$ ، $\frac{س}{-أ} + \frac{ص}{أ} = ١$ يكونان ....

(أ) متوازيان. (ب) متقاطعان ومتعامدان.

(جـ) متقاطعان وغير متعامدان. (د) يتقاطعان فى النقطة (أ ، ٠)

(٤٦) معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، -٥) عموديًا على المستقيم س + ٣ ص = ١١ هى ....

(أ) س - ٣ ص + ١٢ = ٠ (ب) س - ٣ ص - ١٢ = ٠

(جـ) ٣ س - ص - ١٤ = ٠ (د) ٣ س - ص + ١٤ = ٠

(٤٧) إذا كانت المعادلة البارامترية للمستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ هى س = ٤ ك - ١ ، ص = ٤

فإن ميل المستقيم العمودى على $\overleftrightarrow{أب}$ يساوى ....

(أ) - $\frac{١}{٤}$ (ب) صفر. (جـ) ١ (د) غير معرف.

(٤٨) إذا كانت معادلتا المستقيمين الذين يحملان قطرى متوازى الأضلاع أ ب حـ ء هما س + ٣ ص = ٤ ، ٦ س - ٢ ص = ٧ فإن الشكل أ ب حـ ء يجب أن يكون ....

(أ) مستطيل. (ب) مربع. (جـ) رباعى دائرى. (د) معين.

(٤٩) إذا كان $\overline{أء}$ متوسط فى Δ أ ب حـ الذى فيه : أ (٢ ، ٢) ، ب (٦ ، -١) ، حـ (٧ ، ٣)

فإن معادلة المستقيم المار بالنقطة (١ ، ١) موازيًا $\overline{أء}$ هى ....

(أ) ٢ س - ٩ ص - ٧ = ٠ (ب) ٢ س - ٩ ص - ١١ = ٠

(جـ) ٢ س + ٩ ص - ١١ = ٠ (د) ٢ س + ٩ ص + ٧ = ٠

(٥٠) معادلة محور تماثل $\overline{أب}$ حيث أ (٢ ، -١) ، ب (٤ ، ٣) هى ....

(أ) س + ٢ ص = ٠ (ب) س + ٢ ص = ٥

(جـ) ٢ س - ص = ٥ (د) س - ٢ ص = ٥

(٥١) إذا كانت النقطة (٤ ، ٦) هى منتصف القطعة المستقيمة التى طرفاها على محورى الإحداثيات فإن معادلة الخط المستقيم الذى يحمل هذه القطعة هى ....

(أ) ٣ س + ٢ ص = ٢٤ (ب) ٢ س − ٣ ص = −١٠

(جـ) ٤ س + ٦ ص = ٥٢ (د) ٣ س − ٢ ص = ٠

(٥٢) إذا كانت : أ (١ ، −٢) ، ب (٣ ، −١) فإن معادلة المستقيم الذى يقسم $\overleftrightarrow{أب}$ بنسبة ٣ : ١ من الداخل على التعامد هى ....

(أ) ٤ س + ٢ ص = ٥ (ب) ٤ س + ٢ ص = ١٥

(جـ) ٨ س + ٤ ص = ٥ (د) ٨ س + ٤ ص = ١٥

(٥٣) إذا كانت النقطة (−٤ ، ٥) إحدى رؤوس مربع ، أحد قطريه يقع على المستقيم ٧ س − ص + ٨ = ٠ فإن معادلة القطر الآخر هى ....

(أ) س + ٣ ص = ١١ (ب) ٢ س − ٣ ص = −٢٣

(جـ) س + ٧ ص = ٣١ (د) ٢ س + ٣ ص = ٧

(٥٤) إذا كان المستقيم : أ س + ب ص = ١٢ يقطع جزءًا موجبًا من محور السينات طوله ٦ وحدات ، وجزءًا سالبًا من محور الصادات طوله ٤ وحدات فإن : أ + ٢ ب = ...

(أ) ٨ (ب) ٤ (جـ) −٤ (د) −٢

(٥٥) معادلة الخط المستقيم الذى يقع على بعدين متساويين من المستقيمين ص = −٢ ، ص = ١٠ هى ....

(أ) ص = ٨ (ب) ص = ٤ (جـ) س = ٤ (د) س = −١٢

(٥٦) معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة حـ (٣ ، ٤) ويقطع الجزئين الموجبين لمحورى الإحداثيات السينى والصادى فى النقطتين أ ، ب على الترتيب بحيث أ حـ : حـ ب = ٢ : ٣ هى ....

(أ) ٢ س + ص = ١٠ (ب) س + ٢ ص = ١٠

(جـ) ٢ س + ص = ٥ (د) س + ص = ١٠

(٥٧) مساحة المثلث المحدد بالمستقيم المار بالنقطة أ (٢ ، ٣) وميله = $\frac{١}{٢}$ ومحورى الإحداثيات تساوى .... وحدة مربعة.

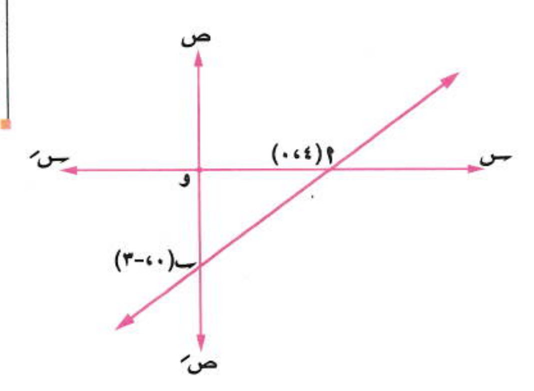
(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(٥٨) معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (٤ ، ٣) ويقطع من محورى الإحداثيات جزءين مجموعهما −١ هى ....

(أ) $\frac{س}{٢} - \frac{ص}{٣} = ١$ ، $\frac{س}{-٢} + \frac{ص}{١} = ١$ (ب) $\frac{س}{٢} + \frac{ص}{٣} = ١$ ، $\frac{س}{٢} + \frac{ص}{١} = ١$

(جـ) $\frac{س}{٢} - \frac{ص}{٣} = -١$ ، $\frac{س}{-٢} + \frac{ص}{١} = -١$ (د) $\frac{س}{٢} + \frac{ص}{٣} = -١$ ، $\frac{س}{-٢} + \frac{ص}{١} = ١$

(٥٩) فى الشكل المقابل :



معادلة $\overleftrightarrow{أب}$ هى ....

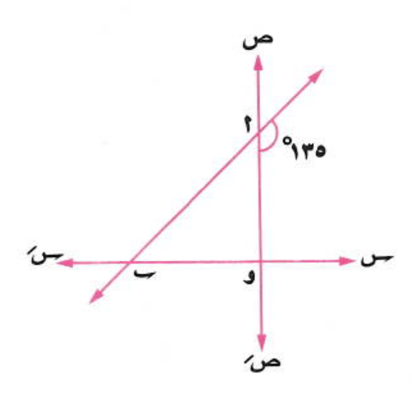
(أ) ٤ س + ٣ ص = ١٢

(ب) ٣ س + ٤ ص = ١٢

(جـ) ٤ س − ٣ ص = ١٢

(د) ٣ س − ٤ ص = ١٢

(٦٠) فى الشكل المقابل :



إذا كان طول $\overline{أب}$ = ٢ $\sqrt{٢}$ وحدة طول

فإن معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ هى ....

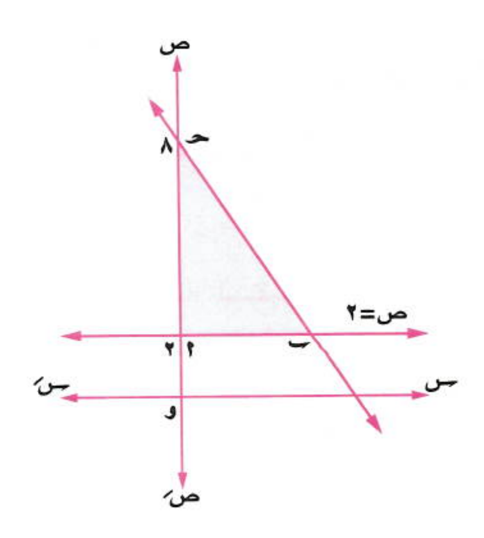
(أ) $\frac{س}{٢} + \frac{ص}{٢} = ١$

(ب) $\frac{س}{٢} - \frac{ص}{٢} = ١$

(جـ) $\frac{س}{٢} - \frac{ص}{٢} = -١$

(د) $\frac{س}{٢} + \frac{ص}{٢} = -١$

(٦١) فى الشكل المقابل :



إذا كانت مساحة Δ أ ب حـ = ٩ وحدة مربعة

فإن معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{ب حـ}$

هى ....

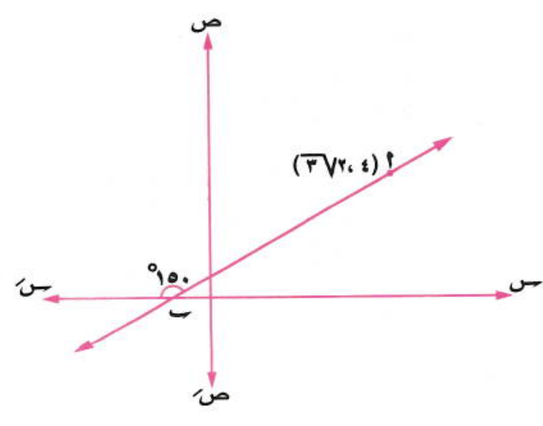
(أ) ٣ س + ٢ ص − ١٦ = ٠

(ب) س + ص = ٨

(جـ) ٢ س − ص + ٨ = ٠

(د) ٢ س + ص − ٨ = ٠

(٦٢) فى الشكل المقابل :



معادلة $\overleftrightarrow{أب}$ هى ....

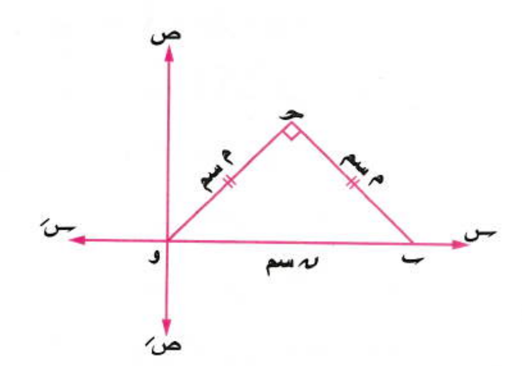
(أ) س − $\sqrt{٣}$ ص − ١ = ٠

(ب) س − $\sqrt{٣}$ ص + ٢ = ٠

(جـ) $\sqrt{٣}$ س + ص − $\sqrt{٣}$ = ٠

(د) ٣ س − $\sqrt{٣}$ ص − ٦ = ٠

(٦٣) في الشكل المقابل :



إذا كان : و ح = ب ح ، ق (∠ح) = ٩٠°

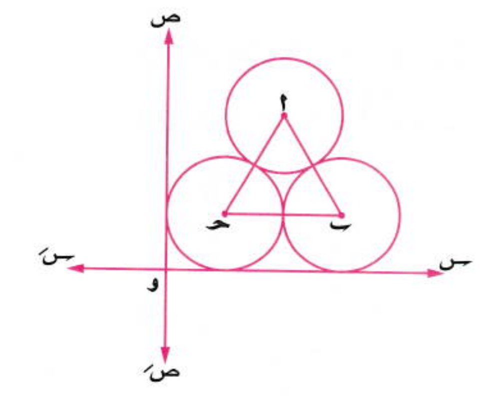
أى مما يأتى يعتبر معادلة

المستقيم $\overleftrightarrow{\text{و ح}}$ ؟

(أ) ص = $\frac{\text{م}}{\text{ن}}$ س (ب) ص = س

(جـ) ص = $\frac{\text{ن}}{\text{م}}$ س (د) ص = م ن س

(٦٤) في الشكل المقابل :



ثلاث دوائر متطابقة متماسة مثنى مثنى ، إذا كانت :

ح = (٤ ، ٤) فإن معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ هى ....

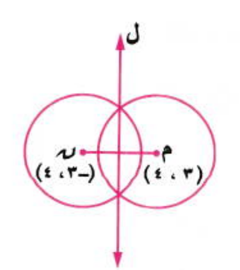
(أ) $\overrightarrow{\text{ر}}$ = (٤ ، ٤) + ك (١ ، − $\sqrt{٣}$)

(ب) $\overrightarrow{\text{ر}}$ = (٨ ، ٤) + ك (١ ، − $\sqrt{٣}$)

(جـ) $\overrightarrow{\text{ر}}$ = (١٢ ، ٤) + ك (١ ، − $\sqrt{٣}$)

(د) $\overrightarrow{\text{ر}}$ = (١٢ ، ٤) + ك (− $\sqrt{٣}$ ، ١)

(٦٥) في الشكل المقابل :



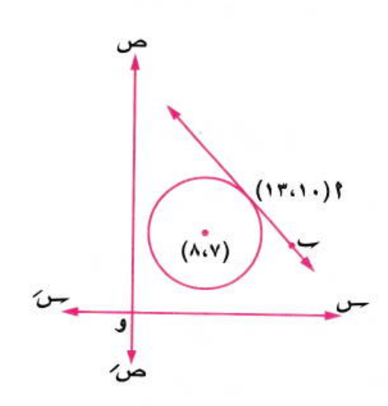
دائرتان متطابقتان فإن

معادلة المستقيم ل هى ....

(أ) س = ٠ (ب) ص = ٠

(جـ) س + ٤ ص = ٠ (د) ٣ س + ٤ ص = ٠

(٦٦) في الشكل المقابل :



دائرة مركزها (٧ ، ٨) ، المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مماس لها عند النقطة أ

فإن معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ هى ....

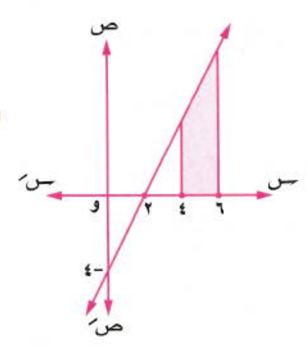
(أ) ٥ س + ٣ ص = ٩٥

(ب) ٣ س + ٥ ص = ٣٥

(جـ) ٣ س + ٥ ص + ٩٥ = ٠

(د) ٣ س + ٥ ص = ٩٥

(٦٧) فى الشكل المقابل :



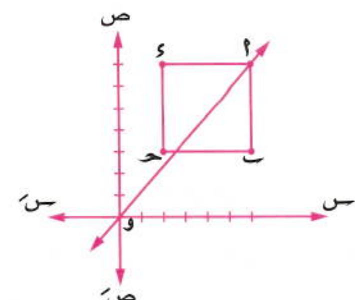
مساحة الشكل المظلل = ... وحدة مربعة.

(أ) ١٦   (ب) ١٢

(جـ) ٨   (د) ٢٤



(٦٨) فى الشكل المقابل :



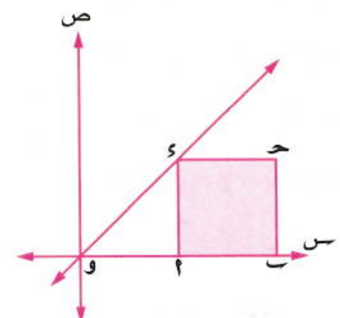
أ ب حـ ء مربع فيه : حـ (٢ ، ٣) ، ب (٦ ، ٣)

فإن معادلة $\overleftrightarrow{\text{أ و}}$ هى ....

(أ) ٤ س − ٣ ص = ٠   (ب) ٦ س − ٣ ص = ٠

(جـ) ٧ س − ٦ ص = ٠   (د) ٥ س − ص = ٠

(٦٩) فى الشكل المقابل :



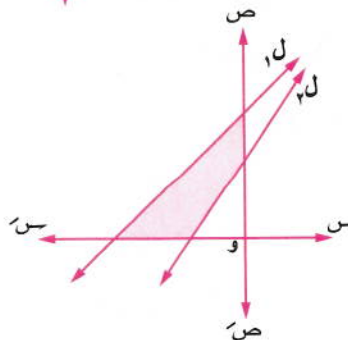
إذا كان : أ ب حـ ء مربع ، حـ (٩ ، ٥)

فإن معادلة $\overleftrightarrow{\text{و ء}}$ هى ....

(أ) ٤ س − ٥ ص = ٠   (ب) ٤ س + ٥ ص = ٠

(جـ) ٥ س − ٤ ص = ٠   (د) ٥ س + ٤ ص = ٠

(٧٠) فى الشكل المقابل :



إذا كانت معادلة المستقيم ل١ هى س − ٢ ص + ١٢ = ٠

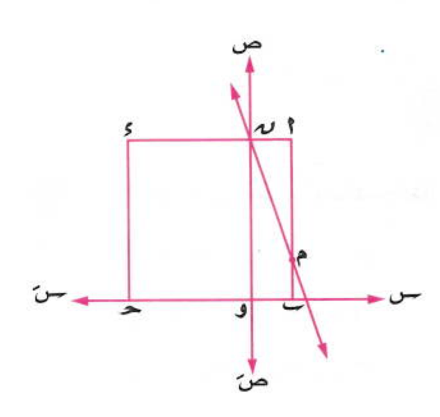
، معادلة المستقيم ل٢ هى س − ص + ٤ = ٠

فإن مساحة الشكل الرباعى المظلل = ... وحدة مربعة.

(أ) ٢٤   (ب) ٢٦

(جـ) ٢٨   (د) ٣٠

(٧١) فى الشكل المقابل :



أ ب حـ ء مربع فيه : ء (−٣ ، ٤)

، م أ = ٣ م ب فإن معادلة $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ هى ....

(أ) $\overleftarrow{\text{ر}}$ = (١ ، ١) + ك (١ ، −٣)

(ب) $\overleftarrow{\text{ر}}$ = (١ ، ١) + ك (٣ ، −١)

(جـ) $\overleftarrow{\text{ر}}$ = (٠ ، ٤) + ك (١ ، ٣)

(د) $\overleftarrow{\text{ر}}$ = (٠ ، ٤) + ك (−١ ، ١)

(٧٢) فى الشكل المقابل :

إذا كان : أ ب حـ ء ، حـ هـ م ن مربعين متطابقين ، هـ (٠ ، ١)

، ك ، ر منتصفى $\overline{هـ م}$ ، $\overline{أ ء}$ على الترتيب

فإن معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{ر ك}$ هى ....

(أ) س − ٢ ص + ٦ = ٠

(ب) ٢ س − ص + ٣ = ٠

(جـ) ٢ س − ص + ١٢ = ٠

(د) ٢ س − ص + ٦ = ٠

(٧٣) فى الشكل المقابل :

إذا كان : أ ب حـ ء ، و حـ م ن مستطيلين متطابقين

وكان أ (٨ ، ٦) فإن معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{ن ء}$ هى ....

(أ) $\overleftarrow{ر}$ = (٦ ، ٦) + ك (٢ ، ٣)

(ب) $\overleftarrow{ر}$ = (٦ ، ٦) + ك (−٣ ، ٢)

(جـ) $\overleftarrow{ر}$ = (٠ ، ٢) + ك (٣ ، ٢)

(د) $\overleftarrow{ر}$ = (٠ ، ٢) + ك (−٢ ، ٣)

(٧٤) فى الشكل المقابل :

ق (∠ ب أ حـ) = ١٠° ، معادلة $\overleftrightarrow{أ ب}$ هى : س + ص − ٢ = ٠

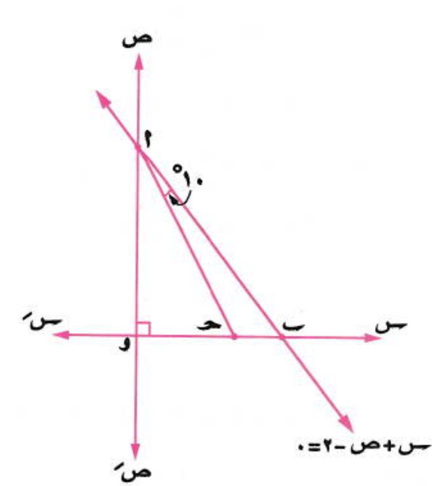
فإن : ق (∠ أ حـ و) = ...

(أ) ٥٥°

(ب) ٦٠°

(جـ) ٤٥°

(د) ٣٠°



ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد ميل الخط المستقيم المار بكل زوج من النقط التالية ، وبين أيًا من هذه المستقيمات متوازيًا وأيها متعامد :

(١) (٣ ، ١) ، (−٢ ، ٥)

(٢) (٤ ، ٠) ، (٢ ، −١)

(٣) (٧ ، −١) ، (٣ ، −٣)

(٤) (−٥ ، −٢) ، (−١ ، ٣)

٢ إذا كانت معادلتا المستقيمين $ل_١$ ، $ل_٢$ هما على الترتيب ٢ س − ٣ ص + أ = ٠ ، ٣ س + ب ص − ٦ = ٠ .

(١) أوجد ميل المستقيم $ل_١$

(٢) أوجد قيمة ب التى تجعل $ل_١$ ، $ل_٢$ متوازيين.

(٣) أوجد قيمة ب التى تجعل $ل_١$ ، $ل_٢$ متعامدين.

(٤) إذا كان المستقيم $ل_١$ يمر بالنقطة (١ ، ٣) فأوجد قيمة : أ «$\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{-٩}{٢}$ ، ٢ ، ٧»

---

٣ أى المستقيمات الآتية يكون موازيًا لمحور الصادات ، وأيها يكون موازيًا لمحور السينات ، وأيها يمر بنقطة الأصل ، ثم أوجد إحداثيات نقاط التقاطع مع محورى الإحداثيات (إن وجدت) :

(١) ٢ س + ٣ = ٠

(٢) س + ٣ ص = ٠

(٣) ٢ س + ٣ ص = ١٢

(٤) ص − ٥ = ٠

---

٤ أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم الذى :

(١) يمر بالنقطة و (٣ ، −١) والمتجه $\overleftarrow{ى}$ = (−٣ ، ٥) متجه اتجاه له.

(٢) يمر بالنقطة (٥ ، −١) ويصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها °١٣٥

(٣) يمر بالنقطتين (٢ ، −٣) ، (٥ ، ١)

(٤) يمر بالنقطة (٢ ، −١) وميله = $\frac{١}{٣}$

(٥) يمر بالنقطة و (٢ ، −٣) والمتجه $\overleftarrow{ن}$ = (−١ ، ٢) متجه اتجاه عمودى عليه.

(٦) يمر بالنقطة (١ ، ٣) ويكون عموديًا على المستقيم $\overleftarrow{ر}$ = (٢ ، ٥) + ك (−٢ ، ١)

(٧) يمر بالنقطة و (٣ ، ٥) عموديًا على المتجه $\overleftarrow{أب}$ حيث أ = (٢ ، −٣) ، ب = (٥ ، ٤)

(٨) يحمل متجه الموضع $\overleftarrow{أ}$ = (٢ ، −٣)

---

٥ أوجد المعادلة العامة للمستقيم الذى :

(١) يمر بالنقطة (٣ ، −٤) ويوازى المستقيم : س + ٢ ص − ٧ = ٠

(٢) يمر بالنقطة و (−١ ، −٣) والمتجه $\overleftarrow{أب}$ حيث أ = (−٤ ، ٣) ، ب = (−٥ ، −٢) متجه اتجاه له.

(٣) يقطع طولاً قدره ٤ وحدات من الجزء السالب لمحور الصادات والمتجه $\overleftarrow{ى}$ = (٧ ، −٣) متجه اتجاه له.

(٤) يقطع طولاً قدره ٣ وحدات من الجزء الموجب لمحور السينات وميله = $-\frac{١}{٢}$

(٥) يقطع طولاً قدره ٢ وحدة من الجزء السالب لمحور السينات ويقطع طولاً قدره ٤ وحدات من الجزء الموجب لمحور الصادات.

(٦) يمر بالنقطة (−٧ ، ٢ $\sqrt{٣}$) ويصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها ($\frac{٢\pi}{٣}$)ء

(٧) يمر بالنقطة (٣ ، −٥) عموديًا على المستقيم : س + ٣ ص = ١١

(٨) يمر بالنقطة (٣ ، ٥) عموديًا على المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ حيث : أ = (٢ ، −٣) ، ب = (٥ ، ٤)

(٩) يكون عموديًا على $\overline{أب}$ من نقطة أ حيث أ = (−٣ ، ٦) ، ب = (٢ ، ١)

(١٠) يكون عموديًا على $\overline{أب}$ من نقطة المنتصف حيث : أ = (−٤ ، ١) ، ب = (−٢ ، ٣)

٦ أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، −٣) وميله = ٢ وإذا كان هذا المستقيم يمر بالنقطتين (أ ، ٧) ، (٥ ، ب) فأوجد قيمتى : أ ، ب «٧ ، ٣»

٧ أوجد معادلة المستقيم الذى ميله م ، والمار بالنقطة (أ ، ٠) ما هى نقطة تقاطع هذا المستقيم مع محور الصادات ؟

٨ أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين : أ = (٤ ، −١) ، ب = (٢ ، ٣) يوازى المستقيم المار بالنقطتين ح = (٢ ، ١) ، ء = (٣ ، −١) ثم أوجد معادلة كل من المستقيمين.

٩ إذا كانت : أ (٠ ، ٢) ، ب (٢ ، ١) ، ح (−٢ ، ٣) ثلاث نقط فى المستوى ، فأوجد المعادلة المتجهة للخط المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ ، ثم أثبت أن النقط أ ، ب ، ح تقع على استقامة واحدة.

١٠ أوجد طولى الجزءين المقطوعين من المحورين بواسطة المستقيم : ٢ س − ٣ ص + ١٢ = ٠

١١ أوجد معادلتى المستقيمين اللذين يمران بالنقطة (−٣ ، ٢) ويوازيان المحورين.

١٢ أوجد معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة (٢ ، −٢) ويصنع زاوية موجبة جيب تمامها يساوى $\frac{-\sqrt{٢}}{٢}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

١٣ إذا كانت : أ = (−٤ ، ٤) ، ب = (−١ ، −٢) ، ح تقسم $\overline{أب}$ بنسبة ١ : ٢ من الداخل فأوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة ح والنقطة (٢ ، ٣)

١٤ إذا كانت : أ = (١ ، ٤) ، ب = (−٤ ، ٦) فأوجد معادلة المستقيم الذى يمر بنقطة تقسيم $\overline{أب}$ من الداخل بنسبة ٢ : ٣ ويكون عموديًا على المستقيم ٥ س − ٤ ص − ١٢ = ٠

١٥ **الربط بالهندسة :** $\overline{أب}$ قطر فى دائرة مركزها م فإذا كان : ب (−٧ ، ١١) ، م (−٢ ، ٣) فأوجد معادلة المماس للدائرة عند نقطة أ

١٦ **الربط بالهندسة :** إذا قطع المستقيم ٣ س + ٤ ص − ١٢ = ٠ محورى الإحداثيات السينى والصادى فى النقطتين أ ، ب على الترتيب **فأوجد :**

(١) مساحة سطح Δ و أ ب حيث و نقطة الأصل.

(٢) معادلة المستقيم العمودى على $\overline{أب}$ ويمر بنقطة منتصفها.

---

١٧ **أوجد طولى الجزءين المقطوعين من المحورين بواسطة المستقيم الذى يمر بالنقطتين :** (−٣ ، ١) ، (٤ ، ٠)

---

١٨ **أوجد طولى الجزءين المقطوعين من المحورين بواسطة المستقيم :** $\overrightarrow{ر}$ = (٣ ، −١) + ك (٢ ، ٥)

---

١٩ أوجد معادلة الخط المستقيم الذى يمر بالنقطة (٥ ، −٢) عموديًا على المستقيم الذى يقطع من الجزء الموجب لمحور السينات جزءًا طوله ٤ وحدات ومن الجزء السالب لمحور الصادات جزءًا طوله ٣ وحدات.

---

٢٠ **أثبت أن النقط :** أ = (٢ ، −٣) ، ب = (٧ ، ٢) ، حـ = (١ ، ١) هى رؤوس مثلث وإذا كانت ء ∈ $\overline{أب}$ بحيث أ ء : ء ب = ٢ : ٥ فأوجد إحداثيى النقطة ء ثم اكتب الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم $\overleftrightarrow{حـ ء}$

---

٢١ **أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المستقيم ل مع الاتجاه الموجب لمحور السينات إذا كان :**

(١) ل : ٣ ص + س = ٦

(٢) ل يمر بالنقطتين (٠ ، ٠) ، (٢ ، −٢)

(٣) ل يقطع من محورى السينات والصادات جزءين موجبين طولاهما ٤ ، ٦ وحدات طولية على الترتيب.

(٤) ل : س = ٢ + ٣ ك ، ص = −١ + ٢ ك

(٥) المتجه $\overrightarrow{ى}$ = (√٣ ، ١) متجه اتجاه له.

(٦) المتجه $\overrightarrow{ن}$ = (√٣ ، ١) متجه اتجاه العمودى عليه.

---

٢٢ **أوجد الصورة المتجهة لمعادلة المستقيم ل :** ٢ س − ٣ ص − ٦ = ٠ .

---

٢٣ **أوجد الصورة المتجهة والصورة العامة لمعادلة المستقيم ل :** س = ٣ − ٢ ك ، ص = −١ + ٣ ك

---

٢٤ **أوجد الصورة المتجهة لمعادلة المستقيم ل :** $\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = ١$ حيث أ ≠ ٠ ، ب ≠ ٠ .

---

٢٥ أوجد معادلة محور تماثل $\overline{أب}$ حيث أ = (٢ ، ٣) ، ب = (−٤ ، ٥)

---

٢٦ إذا كانت : أ (٥ ، −٦) ، ب (٣ ، ٧) ، حـ (١ ، −٣)

، فأوجد معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة أ وينصف $\overline{ب حـ}$

---

٢٧ أ ب حـ مثلث رءوسه النقط أ = (−١ ، ٥) ، ب = (٤ ، −٢) ، حـ = (−٣ ، ٠)

أوجد معادلة المستقيم المار بالرأس أ عموديًا على $\overline{ب حـ}$



٢٨ أثبت أن المعادلتين : $\overrightarrow{ر} = (-١ ، ٣) + ك (٦ ، -٤)$ ، $\overrightarrow{ر} = (٥ ، -١) + ك (-٣ ، ٢)$

يمثلان نفس المستقيم.

---

٢٩ أ ب حـ ء مربع فيه : أ = (٣ ، ٢) ، حـ = (-١ ، ٤) أوجد معادلتى قطريه.

---

٣٠ أثبت أن النقطة : م = (٥ ، -٤) هى مركز الدائرة المارة برءوس المثلث أ ب حـ حيث :

أ = (١ ، -١) ، ب = (١ ، -٧) ، حـ = (٢ ، ٠) ثم أوجد معادلة المماس للدائرة عند نقطة أ

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) المستقيم الذى يقطع محور السينات فى النقطة (أ ، ٠) ويقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، ب)

يمر بالنقطة ....

(أ) (أ ، ب) (ب) $(\frac{1}{2}$ أ ، $\frac{1}{2}$ ب$)$ (جـ) $(\frac{1}{3}$ أ ، $\frac{1}{3}$ ب$)$ (د) $(\frac{1}{4}$ أ ، $\frac{1}{4}$ ب$)$

(٢) إذا كانت الأجزاء المقطوعة من محورى الإحداثيات السينى والصادى الموجبين بواسطة المستقيم $ل_1$

هى أ ، ب على الترتيب وكانت الأجزاء المقطوعه من محورى الإحداثيات السينى والصادى الموجبين

بواسطة المستقيم $ل_2$ هى ٢ أ ، ٢ ب على الترتيب فإن ....

(أ) $ل_1 \perp ل_2$ (ب) $ل_1 // ل_2$

(جـ) $ل_1 \cap ل_2 = \{(أ ، ب)\}$ (د) غير ذلك.

(٣) إذا كان $ل_1$ مستقيم يمر بالنقطة أ (٢ ، ٣) ويصنع زاوية قياسها °٦٠ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

فإذا دار المستقيم $ل_1$ حول نقطة أ بزاوية قياسها °١٥ فى اتجاه دوران عقارب الساعة فإن معادلة

المستقيم فى الوضع الجديد هى ....

(أ) ص − س = ١ (ب) ص + س = ١

(جـ) ٢ س + ص = ١ (د) ٢ س + ٣ ص = ٥

(٤) معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، ٤) ويقطع جزئين متساويين فى الطول من محورى الإحداثيات يمكن

أن تكون ....

(أ) س + ص = ٧ (ب) س − ص = −١

(جـ) ص + ٢ س = ١٠ (د) (أ) ، (ب) معًا.

(٥) إذا كانت : أ (٣ ، −٥) ، ب (−٤ ، ٨) فإن النسبة التى يقسم بها المستقيم س + ص = ٠

القطعة المستقيمة $\overline{أ ب}$ من جهة أ هى ....

(أ) ٢ : ١ (ب) ١ : ٢ (جـ) ٢ : ٣ (د) ٣ : ٢

(٦) مسقط النقطة (٢ ، ٣) على المستقيم ل : س + ص = ١١ هو ....

(أ) (−٦ ، ٥) (ب) (٦ ، ٥) (جـ) (٥ ، ٦) (د) (−٥ ، ٦)

(٧) صورة النقطة (٣ ، ٨) بالانعكاس فى المستقيم ل : س + ٣ ص − ٧ = ٠ هى ....

(أ) (−١ ، −٤) (ب) (−٣ ، −٨) (جـ) (١ ، −٤) (د) (٣ ، ٨)

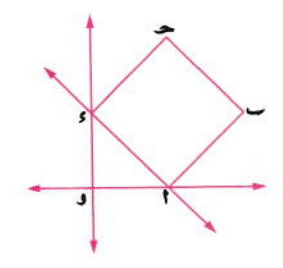
(٨) إذا كانت النقطة أ (٠ ، ٠) هى صورة النقطة ب (٤ ، ٢) بالانعكاس فى المستقيم ل

فإن معادلة المستقيم ل هى ....

(أ) س = ٢ ص (ب) ٢ س + ص = ٥

(جـ) ٢ س − ص = ٥ (د) س + ص = ٦

(٩) الشكل المقابل :



يمثل مربع أ ب جـ ء ، معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{أء}$ هى س + ص = ٤

فإن معادلة القطر $\overline{ب ء}$ هى ....

(أ) س = ٤ (ب) ص = ٤

(جـ) س + ص = ٢ (د) س + ص = ٤ $\sqrt{٢}$

(١٠) فى الشكل المقابل :

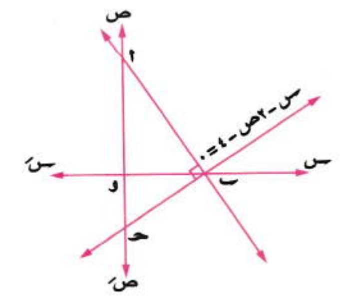
إذا كانت معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ هى : $\frac{ص}{٦} - \frac{س}{٨} = ١$

فإن معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{ب جـ}$ هى ....

(أ) $\frac{س}{٣} + \frac{ص}{٦} = ١$ (ب) $\frac{س}{-٣} + \frac{ص}{٦} = ١$

(جـ) $\frac{س}{٦} - \frac{ص}{٣} = ١$ (د) س + ص = ١٨

(١١) فى الشكل المقابل :



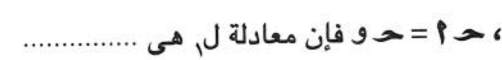
مساحة Δ أ ب جـ = ... وحدة مربعة.

(أ) ١٥ (ب) ٢٠

(جـ) ٢٤ (د) ٣٢

(١٢) فى الشكل المقابل :

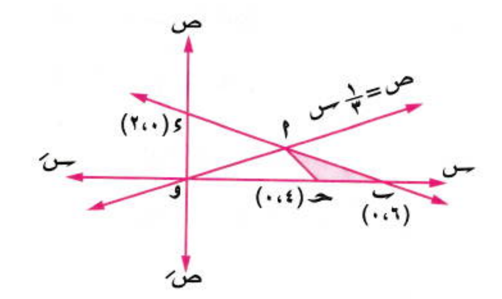
إذا كانت مساحة Δ أ ب جـ = ١٥ وحدة مربعة.


، جـ أ = جـ و فإن معادلة $ل_١$ هى ....

(أ) $\frac{س}{٥} + \frac{ص}{٦} = ١$ (ب) $\frac{س}{٦} + \frac{ص}{٥} = ١$

(جـ) $\frac{س}{١٠} + \frac{ص}{٦} = ١$ (د) $\frac{س}{٦} + \frac{ص}{١٠} = ١$

(١٣) فى الشكل المقابل :



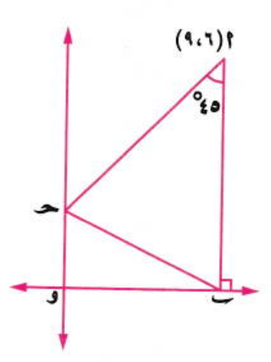
مساحة المثلث ا ب حـ

تساوى .... وحدة مربعة.

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ٢

(جـ) ١ (د) $\frac{٣}{٢}$

(١٤) فى الشكل المقابل :



المعادلة الاتجاهية للمستقيم $\overleftrightarrow{ب حـ}$ هى ....

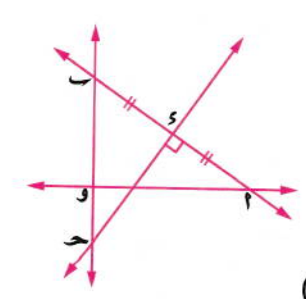
(أ) $\overleftarrow{ر}$ = (٠ ، ٣) + ك (٢ ، -١)

(ب) $\overleftarrow{ر}$ = (٣ ، ٠) + ك (٢ ، -١)

(جـ) $\overleftarrow{ر}$ = (٠ ، ٣) + ك (-١ ، ٢)

(د) $\overleftarrow{ر}$ = (٣ ، ٠) + ك (-١ ، ٢)

(١٥) فى الشكل المقابل :



إذا كانت معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{ا ب}$

هى ٢ س + ٣ ص = ١٢

فإن المعادلة المتجهة للمستقيم $\overleftrightarrow{ء حـ}$ هى ....

(أ) $\overleftarrow{ر}$ = (٢ ، ٣) + ك (٢ ، ٣) (ب) $\overleftarrow{ر}$ = (٢ ، ٣) + ك (٣ ، ٢)

(جـ) $\overleftarrow{ر}$ = (٣ ، ٢) + ك (٢ ، ٣) (د) $\overleftarrow{ر}$ = (٣ ، ٢) + ك (٣ ، ٢)

(١٦) فى الشكل المقابل :

إذا كانت معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{ا ب}$ هى $\frac{س}{٦} + \frac{ص}{٨} = ١$

فإن المعادلة البارامترية للمستقيم $\overleftrightarrow{و حـ}$ هى ....

(أ) س = ٣ + ٤ ك ، ص = ٤ + ٣ ك

(ب) س = ٤ + ٣ ك ، ص = ٤ + ٤ ك

(جـ) س = ٣ + ٣ ك ، ص = ٤ + ٤ ك

(د) س = ٤ + ٤ ك ، ص = ٣ + ٣ ك

(١٧) فى الشكل المقابل :

إذا كان : $ل_١ \cap ل_٢ = \{أ\}$ ، وحـ = وء

فإن المعادلة المتجهة للمستقيم $ل_١$ هى ....

(أ) $\overleftarrow{ر} = (٠ ، ٢) + ك (١ ، \sqrt{٣})$

(ب) $\overleftarrow{ر} = (٠ ، ٢) + ك (-١ ، -١)$

(جـ) $\overleftarrow{ر} = (٠ ، ٢) + ك (\sqrt{٣} ، ١)$

(د) $\overleftarrow{ر} = (٠ ، ٢) + ك (\sqrt{٣} ، -١)$



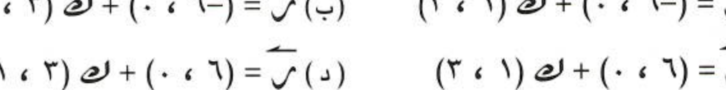
(١٨) فى الشكل المقابل :

إذا كان : وحـ = ٢ وب ، معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$

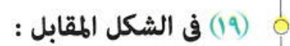
هى ٢ س + ٣ ص = ٦

فإن المعادلة المتجهة للمستقيم $\overleftrightarrow{أحـ}$ هى ....

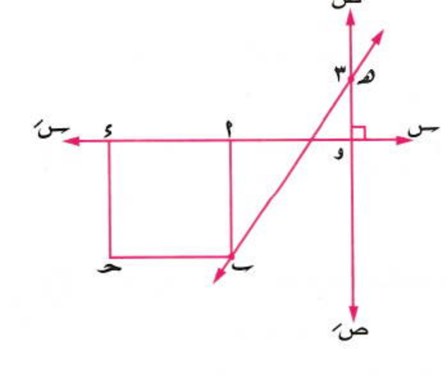
(أ) $\overleftarrow{ر} = (-٦ ، ٠) + ك (١ ، ٣)$ (ب) $\overleftarrow{ر} = (-٦ ، ٠) + ك (٣ ، ١)$



(جـ) $\overleftarrow{ر} = (٦ ، ٠) + ك (١ ، ٣)$ (د) $\overleftarrow{ر} = (٦ ، ٠) + ك (٣ ، ١)$



(١٩) فى الشكل المقابل :



إذا كانت مساحة المربع أبحـء = ٣٦ وحدة مربعة

، ء (-١٢ ، ٠) فإن المعادلة المتجهة للمستقيم $\overleftrightarrow{هـب}$

هى ....

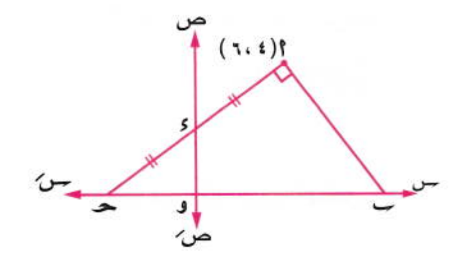
(أ) $\overleftarrow{ر} = (٠ ، ٣) + ك (٣ ، ٢)$

(ب) $\overleftarrow{ر} = (٠ ، ٣) + ك (-٣ ، ٢)$

(جـ) $\overleftarrow{ر} = (-٦ ، -٦) + ك (-٢ ، ٣)$

(د) $\overleftarrow{ر} = (-٦ ، -٦) + ك (٢ ، ٣)$

(٢٠) المعادلتان الوسيطيتان للمستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ هما ....



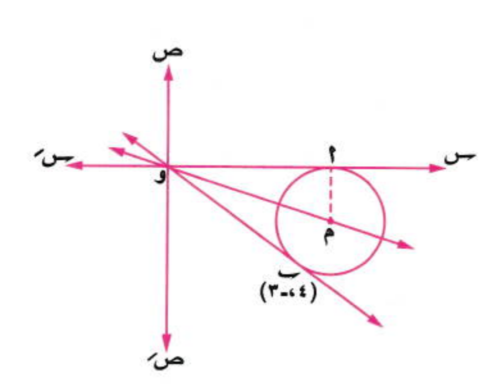
(أ) س = ٤ + ٣ ك ، ص = ٦ + ٤ ك

(ب) س = ٣ - ٤ ك ، ص = ٤ - ٦ ك

(جـ) س = ٤ + ٣ ك ، ص = ٦ - ٤ ك

(د) س = ٣ - ٤ ك ، ص = ٤ + ٦ ك

(٢١) فى الشكل المقابل :

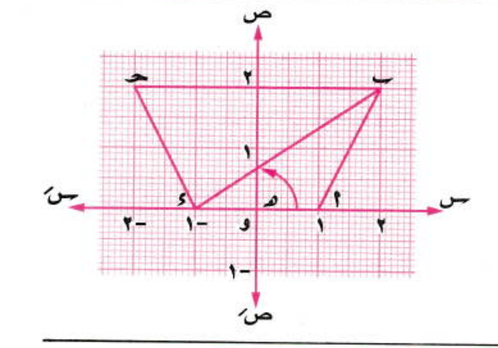


إذا كانت مساحة المستطيل و ب ء هـ = ٢٠ وحدة مربعة

فإن معادلة $\overleftrightarrow{أب}$ هى ....

(أ) ٢ س + ص + ٢٠ = ٠
(ب) ٢ س + ص − ٢٠ = ٠
(جـ) ٢ س − ص = ٢٠
(د) ص = ٢ س + ٢٠

(٢٢) فى الشكل المقابل :



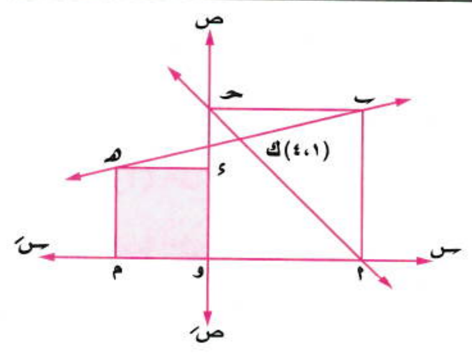
إذا كان : $\overleftrightarrow{وأ}$ ، $\overleftrightarrow{وب}$ مماسين للدائرة م عند أ ، ب

فإن المعادلة الاتجاهية للمستقيم $\overleftrightarrow{وم}$ هى ....

(أ) $\overleftarrow{ر}$ = (٠ ، ٠) + ك (−١ ، ٣)
(ب) $\overleftarrow{ر}$ = (−٤ ، ٣) + ك (٣ ، −١)
(جـ) $\overleftarrow{ر}$ = (٠ ، ٠) + ك (٣ ، −١)
(د) $\overleftarrow{ر}$ = (٥ ، ٠) + ك (٣ ، −١)

---

٢ فى الشكل المقابل :



إذا كان : أ ب حـ ء شكلاً رباعياً

أوجد :

(١) ميل $\overleftrightarrow{بء}$ ثم استنتج ق (∠ هـ)

(٢) معادلتى : $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{حـء}$

---

٣ أوجد معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة (٤ ، ٣) ويقطع من محورى الإحداثيات جزأين غير متساويين وموجبين مجموعهما ١٤

---

٤ أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، ٢) وميله سالب والذى يصنع مع محورى الإحداثيات مثلثاً مساحته ١٢ وحدة مربعة.

---

٥ فى الشكل المقابل :

و أ ب حـ ، و م هـ ء مربعان

، $\overleftrightarrow{بهـ} \cap \overleftrightarrow{حـأ}$ = {ك}

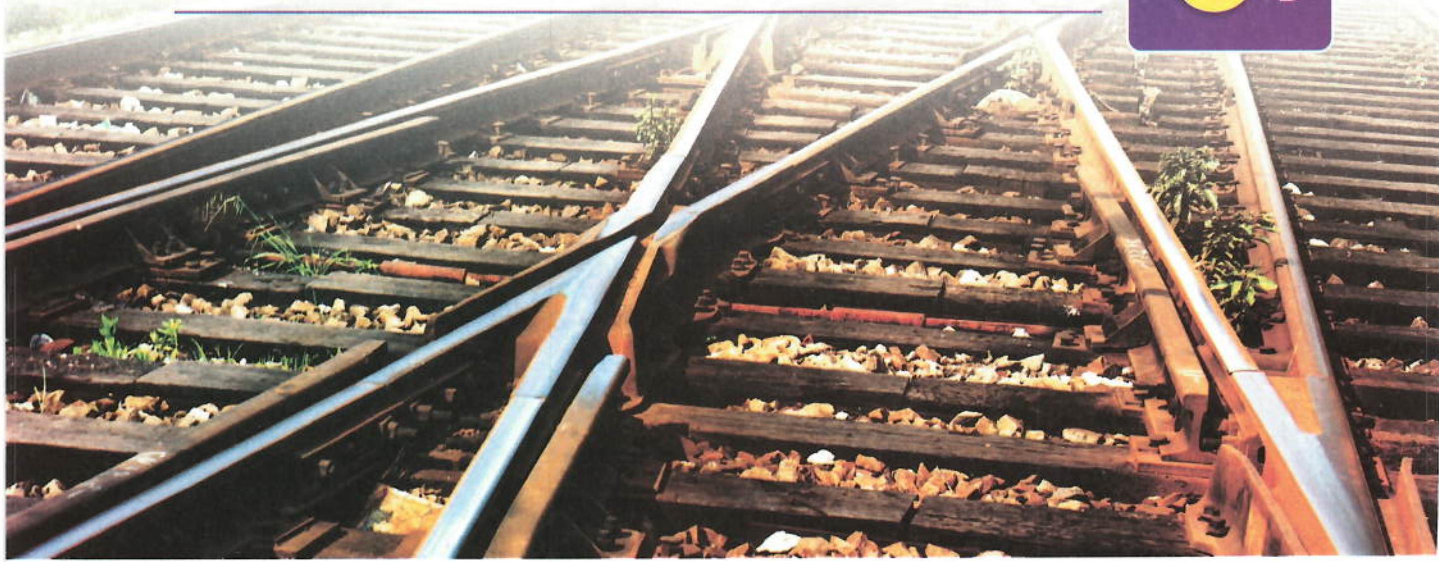
، ك = (١ ، ٤)

أوجد مساحة المربع المظلل.

«٩ وحدات مربعة»

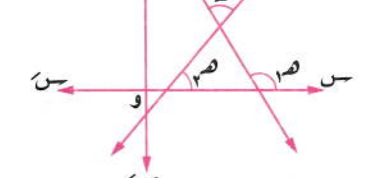


قياس الزاوية بين مستقيمين



بصفة عامة ينتج دائمًا من تقاطع المستقيمين زاويتان [إحداهما مكملة للأخرى]

إما قائمتان أو إحداهما حادة والأخرى منفرجة.



* إذا كانت هـ هى قياس الزاوية بين

المستقيمين $ل_1$ ، $ل_2$ اللذين ميلاهما $م_1$ ، $م_2$

فإن : $ظا هـ = \left| \frac{م_1 - م_2}{1 + م_1 م_2} \right|$

حيث : $هـ \in \left[0 ، \frac{\pi}{2} \right]$ ، $م_1 = ظا هـ_1$ ، $م_2 = ظا هـ_2$

مع ملاحظة ما يأتى :

١ إذا كان ظل الزاوية موجبًا فإننا نحصل على الزاوية الحادة.

٢ إذا كان ظل الزاوية يساوى الصفر فإن قياس الزاوية بينهما يساوى الصفر
[ويكون $م_1 = م_2$ والمستقيمان متوازيان أو منطبقان]

٣ إذا كان ظل الزاوية غير معرف فإن قياس الزاوية بينهما يساوى $90°$
[ويكون $م_1 م_2 = -1$ والمستقيمان متعامدان]

٤ قياس الزاوية المنفرجة = قياس مكملة الزاوية الحادة.

مثال ١

أوجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين :

$ل_1$: س − ٢ ص + ٥ = ٠ ، $ل_2$: ٢ س + ٤ ص − ٧ = ٠

الحل

$\because$ م$_1$ = $\frac{1}{2}$ ، م$_2$ = $\frac{-2}{4}$ = $\frac{-1}{2}$

$\therefore$ طا هـ = $\left|\frac{م_1 - م_2}{1 + م_1 م_2}\right| = \left|\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{-1}{2}\right)}\right| = \frac{4}{3}$

$\therefore$ هـ ≃ $53^\circ\ 8'$

> **تذكر أن**
> ميل المستقيم أ س + ب ص + حـ = ٠ يساوي $\frac{-أ}{ب}$

مثال ٢

أوجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين :

ل$_1$: $\overrightarrow{ر}$ = (٢ ، ٣) + ك (٤ ، ٣) ، ل$_2$: $\overrightarrow{ر}$ = (١ ، ٦) + ك َ (٧ ، -١)

الحل

$\because$ م$_1$ = $\frac{3}{4}$ ، م$_2$ = $\frac{-1}{7}$

$\therefore$ طا هـ = $\left|\frac{م_1 - م_2}{1 + م_1 م_2}\right| = \left|\frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{7}}{1 + \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{-1}{7}\right)}\right| = 1$

$\therefore$ هـ = 45°

حاول بنفسك

أوجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين : ل$_1$: س + ٥ ص = ٣ ، ل$_2$: $\overrightarrow{ر}$ = (٢ ، ٣) + ك (٤ ، ١)

مثال ٣

إذا كان قياس الزاوية بين المستقيمين ل$_1$: س − ٢ ص + ١ = ٠

، ل$_2$: س + ك ص + ٢ = ٠ يساوي 45° فأوجد قيمة : ك

الحل

$\because$ م$_1$ = $\frac{1}{2}$ ، م$_2$ = $\frac{-1}{ك}$ ، هـ = 45° $\therefore$ طا 45° = $\left|\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{ك}}{1 - \frac{1}{2ك}}\right|$

$\therefore$ ١ = $\left|\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{ك}}{1 - \frac{1}{2ك}}\right|$ $\therefore$ $\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{ك}}{1 - \frac{1}{2ك}}$ = ± ١

$\therefore$ إما $\frac{1}{2} + \frac{1}{ك} = 1 - \frac{1}{2ك}$ $\therefore$ $\frac{3}{2ك} = \frac{1}{2}$ $\therefore$ ك = ٣

أو، $\frac{1}{2} + \frac{1}{ك} = \frac{1}{2ك} - 1$ $\therefore$ $\frac{1}{2ك} = \frac{-3}{2}$ $\therefore$ ك = $\frac{-1}{3}$

مثال ٤

أوجد قياسات زوايا المثلث أ ب ح الذى رءوسه :

أ = (٦ ، ٥) ، ب = (٦ ، ١) ، ح = (٣ ، ١)

الحل

ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{٥-١}{٦-٦}$ = $\frac{٤}{٠}$ (غير معرف) ∴ $\overleftrightarrow{أب}$ يوازى محور الصادات (١)

، ميل $\overleftrightarrow{بح}$ = $\frac{١-١}{٦-٣}$ = $\frac{٠}{٣}$ = صفر ∴ $\overleftrightarrow{بح}$ يوازى محور السينات (٢)

، ميل $\overleftrightarrow{أح}$ = $\frac{٥-١}{٦-٣}$ = $\frac{٤}{٣}$ (٣)

من (١) ، (٢) : ∴ ق (∠ب) = ٩٠° ∴ ∠أ ، ∠ح حادتان.

، من (٢) ، (٣) : ∴ ظا ح = $\left|\frac{\frac{٤}{٣} - \text{صفر}}{١ + \text{صفر} \times \frac{٤}{٣}}\right|$ = $\frac{٤}{٣}$

∴ ق (∠ح) ≃ ٥٣° ٨َ ٣ ∴ ق (∠أ) = ١٨٠° − (٩٠° + ٥٣° ٨َ ٣) = ٣٦° ٥٢َ

ملاحظة

* لتعيين نوع المثلث أ ب ح حسب زواياه (حيث أ ح يمثل طول أكبر أضلاع المثلث) :

١ إذا كان : $(أح)^٢ > (أب)^٢ + (بح)^٢$ فإن المثلث منفرج الزاوية فى ب

٢ إذا كان : $(أح)^٢ = (أب)^٢ + (بح)^٢$ فإن المثلث قائم الزاوية فى ب

٣ إذا كان : $(أح)^٢ < (أب)^٢ + (بح)^٢$ فإن المثلث حاد الزوايا.

مثال ٥

أوجد قياسات زوايا المثلث الذى رؤوسه :

أ = (٤ ، ٣) ، ب = (−١ ، ١) ، ح = (−٦ ، ٤) ثم أوجد مساحته.

الحل

∵ أب = $\sqrt{(٤+١)^٢ + (٣-١)^٢}$ = $\sqrt{٢٩}$ وحدة طول.

، ب ح = $\sqrt{(-١+٦)^٢ + (١-٤)^٢}$ = $\sqrt{٣٤}$ وحدة طول.

، أ ح = $\sqrt{(٤+٦)^٢ + (٣-٤)^٢}$ = $\sqrt{١٠١}$ وحدة طول.

∴ $(أح)^٢ > (أب)^٢ + (بح)^٢$ ∴ Δ أ ب ح منفرج الزاوية فى ب

∴ $\angle$ ٢ ، $\angle$ حـ حادتان.

∵ ميل $\overleftrightarrow{٢ب}$ = $\frac{٣ - ١}{٤ + ١}$ = $\frac{٢}{٥}$ ، ميل $\overleftrightarrow{بحـ}$ = $\frac{١ - ٤}{-١ + ٦}$ = $\frac{-٣}{٥}$ ، ميل $\overleftrightarrow{٢حـ}$ = $\frac{٣ - ٤}{٤ + ٦}$ = $\frac{-١}{١٠}$

∴ طا ٢ = $\left| \frac{\frac{٢}{٥} + \frac{١}{١٠}}{١ - \frac{٢}{٥٠}} \right|$ = $\frac{٢٥}{٤٨}$ ∴ ق ($\angle$ ٢) ≃ ٢٨°

، طا حـ = $\left| \frac{-\frac{٣}{٥} + \frac{١}{١٠}}{١ + \frac{٣}{٥٠}} \right|$ = $\frac{٢٥}{٥٣}$ ∴ ق ($\angle$ حـ) ≃ ٢٥°

∴ ق ($\angle$ ب) = ١٨٠° − (٢٨° + ٢٥°) = ١٢٧°

، مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × حاصل ضرب طولى أى ضلعين × جيب الزاوية المحصورة بينهما

= $\frac{١}{٢}$ × ٢ب × ٢حـ جا ٢ = $\frac{١}{٢}$ × $\sqrt{٢٩}$ × $\sqrt{١٠١}$ × جا ٢٨°

≃ ١٢,٧ وحدة مربعة.

حاول بنفسك

أوجد قياسات زوايا المثلث ٢ب حـ إذا كان :

٢ = (٢ ، ٣) ، ب = (-١ ، ٣) ، حـ = (٢ ، ٥)





تمارين 6 على قياس الزاوية بين مستقيمين

من أسئلة الكتاب المدرسي • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) قياس الزاوية بين المستقيمين اللذين ميلاهما ٢ ، $-\frac{١}{٢}$ يساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٩٠° (د) ٤٥°

(٢) قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين اللذين ميلاهما $\frac{-٣}{٤}$ ، -٧ يساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٤٥° (د) ٥٤°

(٣) قياس الزاوية بين المستقيمين : ٢ س = ٣ ، ص = ٤ يساوى ....

(أ) ٩٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ٣٠°

(٤) قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين $ل_١$: $\overleftarrow{ر}$ = (٠ ، -٢) + ك (٣ ، -١)

، $ل_٢$: $\overleftarrow{ر}$ = (٠ ، ٥) + ك (٢ ، ١) يساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ٩٠°

(٥) قياس الزاوية الحادة بين المستقيم : ٦ س - ٣ ص + ٥ = ٠ والمستقيم الذى ميله $\frac{١}{٣}$ يساوى ....

(أ) ١٣٥° (ب) ٦٠° (جـ) ٣٠° (د) ٤٥°

(٦) قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين $ل_١$: ص - $\sqrt{٣}$ س - ٥ = ٠ ، $ل_٢$: س - $\sqrt{٣}$ ص - ٦ = ٠ يساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ٩٠°

(٧) قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين $ل_١$: $\overleftarrow{ر}$ = (٢ ، ٥) + ك (-٣ ، ١) ، $ل_٢$: ٢ س = ٣ - ص يساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ٥٠°

(٨) قياس الزاوية بين المستقيمين $ل_١$: س + ٢ ص + ٥ = ٠ ، $ل_٢$: $\overleftarrow{ر}$ = (١ ، ٤) + ك (١ ، ٢) يساوى ....

(أ) صفر° (ب) ٤٥° (جـ) ٩٠° (د) ١٣٥°

(٩) قياس الزاوية بين المستقيمين $ل_١$: $\overleftarrow{ر}$ = (١ ، ٢) + ك (٣ ، -٤) ، $ل_٢$: ٤ س + ٣ ص - ٥ = ٠ هو ....

(أ) ٠° (ب) ٣٠° (جـ) ٤٥° (د) ٦٠°

(١٠) قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين ل١ : ٢ س + ٣ ص = ١٥ ، ل٢ : ر = (−٢ ، −١) + ك (١ ، −٣)
يساوى تقريبًا ....

(أ) ٥٢° (ب) ٥١° (جـ) ٣٩° (د) ٣٨°

(١١) قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين ل١ : ٢ س − ص − ٣ = ٠ ، ل٢ : س = ك ، ص = ١ + ك
يساوى تقريبًا ....

(أ) ١٩° (ب) ٧١° (جـ) ١٨° (د) ٧٢°

(١٢) قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين : س − ٣ ص + ٥ = ٠ ، س + ٢ ص − ٧ = ٠ هو ....

(أ) ١٥° (ب) ٣٠° (جـ) ٤٥° (د) ٦٠°

(١٣) قياس الزاوية الحادة المحصورة بين المستقيم : س − ٢ ص + ٣ = ٠ ، والمستقيم المار بالنقطتين (٤ ، −١) ، (٢ ، ١) يساوى تقريبًا ....

(أ) ٣٤َ ٧١° (ب) ٢٨َ ١٩° (جـ) ٣٢َ ٧٠° (د) ٢٦َ ١٨°

(١٤) قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين : $\sqrt{3}$ س − ص = ٥ ، ص = ٢ يساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٤٥° (د) ١٢٠°

(١٥) قياس الزاوية الحادة بين المستقيم المار بالنقطتين (٠ ، ٢) ، (−٢ ، ٠) والمستقيم ص = ٠
يساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٤٥° (د) ٩٠°

(١٦) قياس الزاوية الحادة بين المستقيم : ر = (٢ ، ٢) + ك (١ ، ١) والمستقيم س = ٠
هو ....

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ١٣٥°

(١٧) إذا كان قياس الزاوية بين المستقيمين : س = ٧ ، ص = أ س + ٢ يساوى ٩٠°
فإن : أ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٩٠ (د) −١

(١٨) إذا كانت : أ (−٢ ، ١) ، ب (٢ ، ٣) ، حـ (−٢ ، −٤) فإن قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{بحـ}$ هو ....

(أ) ظا⁻¹ (١) (ب) ظا⁻¹ $\left(\frac{٢}{٣}\right)$ (جـ) ظا⁻¹ $\left(\frac{٣}{٤}\right)$ (د) ظا⁻¹ $\left(\frac{٣}{٢}\right)$

(١٩) مجموعة قيم ك التى تجعل قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين : س + ك ص − ٨ = ٠
، ٢ س − ص − ٥ = ٠ يساوى $\frac{\pi}{٤}$ هى ....

(أ) $\left\{٣ ، \frac{-١}{٣}\right\}$ (ب) $\left\{-٣ ، \frac{١}{٣}\right\}$ (جـ) $\left\{٣ ، \frac{١}{٣}\right\}$ (د) {٣}

(٢٠) معادلة المستقيم ل الذى ميله موجب ويمر بالنقطة (٤ ، ١) ويصنع مع المستقيم : ٣ س − ص + ٤ = ٠
زاوية ظل قياسها $\frac{١}{٢}$ هى ....

(أ) ص − س − ٣ = ٠ (ب) ص − س + ٣ = ٠
(جـ) ص + ٧ س − ٢٩ = ٠ (د) ص − ٧ س + ٢٩ = ٠

(٢١) قياس الزاوية بين المستقيمين ٢ س + ب ص + حـ = ٠ ، (٢ + ب) س = (٢ − ب) ص

يساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ٩٠°

(٢٢) إذا كان : ٢ > ٠ ، ب > ٠ فإن قياس الزاوية بين المستقيمين $\frac{س}{٢} + \frac{ص}{ب} = ١$ ، $\frac{س}{٢} - \frac{ص}{ب} = ١$

يساوى ....

(أ) $\frac{\pi}{٤}$ (ب) $\frac{\pi}{٢}$ (جـ) ٢ ظا$^{-١}$ $\left(\frac{ب}{٢}\right)$ (د) ظا$^{-١}$ $\left(\frac{٢\,٢\,ب}{٢^٢ + ب^٢}\right)$

(٢٣) يبين الشكل المقابل قطعة أرض مثلثة الشكل

رؤوسها هى : ٢ (٦ ، ٠) ، ب (−٦ ، ٠)

، حـ (٠ ، ٦) فإن :

أولًا : قياس الزاوية الحادة بين $\overleftrightarrow{٢حـ}$ ومحور السينات

يساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠°

(جـ) ٤٥° (د) ١٣٥°

ثانيًا : قياس الزاوية بين المستقيمين $\overleftrightarrow{٢حـ}$ ، $\overleftrightarrow{بحـ}$ يساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٤٥° (د) ٩٠°

ثالثًا : المعادلة المتجهة للمستقيم $\overleftrightarrow{٢حـ}$ هى ....

(أ) $\overleftarrow{ر}$ = (٦ ، ٠) + ك (١ ، ٠) (ب) $\overleftarrow{ر}$ = (٦ ، ٠) + ك (٠ ، ١)

(جـ) $\overleftarrow{ر}$ = (٦ ، ٠) + ك (−١ ، ١) (د) $\overleftarrow{ر}$ = (٦ ، ٠) + ك (١ ، ١)

رابعًا : المعادلة المتجهة للمستقيم $\overleftrightarrow{بحـ}$ هى ....

(أ) $\overleftarrow{ر}$ = (٠ ، ٦) + ك (−١ ، ١) (ب) $\overleftarrow{ر}$ = (٠ ، ٦) + ك (١ ، ١)

(جـ) $\overleftarrow{ر}$ = (٦ ، ٠) + ك (−١ ، ١) (د) $\overleftarrow{ر}$ = (٠ ، ٦) + ك (١ ، ٠)

خامسًا : المعادلة الكارتيزية للمستقيم المار بالنقطة حـ ، ويوازى $\overleftrightarrow{٢ب}$ هى ....

(أ) ص = ٦ (ب) س = ٦ (جـ) س + ص = ٦ (د) س − ص = ٦

سادسًا : مساحة سطح المثلث ٢ ب حـ تساوى .... وحدة مربعة.

(أ) ٢٤ (ب) ١٢ (جـ) ٣٦ (د) ٤٨

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد قياس الزاوية الحادة بين كل زوج من أزواج المستقيمات الآتية :

(١) ل$_١$: $\overleftarrow{ر}$ = ك (١ ، ٠) ، ل$_٢$: $\overleftarrow{ر}$ = (٣ ، −٢) + ك َ (١ ، −٢)

(٢) ل$_١$: $\overleftarrow{ر}$ = (٠ ، ١) + ك (١ ، ١) ، ل$_٢$: ٢ س − ص − ٣ = ٠

(٣) $ل_١$: س + ٢ ص + ٥ = ٠ ، $ل_٢$: ٤ س − ص − ٣ = ٠

(٤) $ل_١$: س + ٢ ص + ٣ = ٠ ، $ل_٢$: س − ٣ ص + ١ = ٠

(٥) $ل_١$: ٣ ص + ٢ س − ٦ = ٠ ، $ل_٢$: $\frac{س}{٥}$ − ص = ٣

(٦) $ل_١$: $\frac{-س}{٣}$ − $\frac{ص}{٢}$ = ١ ، $ل_٢$: ص − ٤ س = ٢

(٧) $ل_١$: ٣ ص = ٥ ، $ل_٢$: ٢ س + ٥ ص = ١

(٨) $ل_١$: $\overleftarrow{ر}$ = (−٢ ، −٣) + ك (١ ، −٢) ، $ل_٢$: س = ٣ + ٢ ك ، ص = ٣ ك − ١

---

٢ إذا كان $ل_١$: أ س − ٣ ص + ٧ = ٠ ، $ل_٢$: ٤ س + ٦ ص − ٥ = ٠ ، $ل_٣$: $\frac{س}{٣}$ − $\frac{ص}{٢}$ = ٣

فأوجد قيمة أ التى تجعل :

(١) قياس الزاوية بين المستقيمين $ل_١$ ، $ل_٣$ هو صفر° «٢»

(٢) قياس الزاوية بين المستقيمين $ل_١$ ، $ل_٢$ هو ٩٠° «$\frac{٩}{٢}$»

---

٣ **أوجد معادلة المستقيم :**

(١) المار بالنقطة (−١ ، ٣) ويصنع مع المستقيم : س + ٢ ص + ٦ = ٠ زاوية ظل قياسها $\frac{١}{٧}$

(٢) المار بالنقطة (٢ ، −٢) ويصنع مع المستقيم : $\overleftarrow{ر}$ = (٢ ، −١) + ك (٣ ، −٤) زاوية قياسها ٤٥°

---

٤ إذا كان هـ هو قياس الزاوية بين المستقيمين : س − ص + ٦ = ٠ ، أ س − ٢ ص + ٤ = ٠ حيث جتا هـ = $\frac{٤}{٥}$

فأوجد قيمة : أ «$\frac{٢}{٧}$ أ، ١٤»

---

٥ إذا كان ظل قياس الزاوية بين المستقيمين : ك ص + س = ٦ ، ٢ س + ص = ٣ يساوى $\frac{٣}{٤}$

أوجد قيمة : ك «٢ أ، $\frac{-٢}{١١}$»

---

٦ إذا كان قياس الزاوية بين المستقيمين : ٣ س − ٥ ص − ١ = ٠ ، ك س − ص = ٣ يساوى ٤٥°

فأوجد قيمة : ك «−$\frac{١}{٤}$ أ، ٤»

---

٧ إذا كان ظل قياس الزاوية بين المستقيمين : $\overleftarrow{ر}$ = (٠ ، $\frac{٩}{٢}$) + ك (٢ ، ٣ أ)

، $\overleftarrow{ر}$ = (٤ ، ١) + كَ (١ ، ٢) يساوى $\frac{٢}{٣}$ **فأوجد قيمة : أ** «$\frac{٨}{٢١}$ أ، $\frac{-١٦}{٣}$»

---

٨ مستقيمان ميلاهما م ، $\frac{٣}{٨}$م وظل قياس الزاوية بينهما = $\frac{٥}{١١}$ ويمران بالنقطة (٣ ، −١)

أوجد معادلتيهما علمًا بأن م > ٠

---

٩ أ ب حـ مثلث فيه : أ = (٠ ، ٢) ، ب = (٣ ، ١) ، حـ = (−٢ ، −١)

أوجد قياس زاوية : أ «٦٨° ١٥ َ ١٠٫٥ ً»

١٠ أوجد قياسات زوايا المثلث أ ب ح الذى رءوسه أ = (٤ ، ٧) ، ب = (−٢ ، −١)
، ح = (٢ ، −٤) «٣٤ َ٢٦ ° ، ٩٠ ° ، ٢٦ َ٣٦ ٦٣ °»

١١ أوجد قياسات زوايا المثلث أ ب ح حيث أ = (٢ ، ٣) ، ب = (٥ ، ١) ، ح = (−٢ ، ١)
ثم أوجد : مساحة المثلث لأقرب وحدة. «٧ وحدات مربعة»

١٢ أ ب ح مثلث فيه : أ = (٠ ، ٥) ، ب = (٢ ، −١) ، ح = (٦ ، ٣)
أثبت أن : المثلث متساوى الساقين ثم أوجد قياس زاوية أ
ثم أوجد : مساحته لأقرب رقمين عشريين. «٥٣ ° َ٨ ، ١٦ وحدة مربعة»

١٣ أ ب ح مثلث قائم الزاوية فى أ ومعادلة $\overleftrightarrow{\text{ب ح}}$ هى $\vec{ر}$ = (١ ، ١) + ك (−١ ، ٣)
ومعادلة $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ هى $\vec{ر}$ = (−١ ، ٥) + ك (١ ، ٢) أوجد : ق (∠ أ ح ب) «٤٥ °»

١٤ إذا كان المثلث أ ب ح قائم الزاوية فى ب حيث : أ (٢ ، ٣) ، ب (٥ ، ٧) ، ح (١ ، ص)
فأوجد قيمة : ص ، ثم أوجد قياس كل من الزاويتين الأخريين. «١٠ ، ٤٥ ° ، ٤٥ °»

١٥ أ ب ح مثلث رءوسه أ = (−٣ ، ٢) ، ب = (−٣ ، −١٣) ، ح = (٥ ، ٣) ، نصفت $\overline{\text{ب ح}}$ فى ء
أوجد : قياس الزاوية الحادة بين $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب ح}}$ «٦٩ َ٥٦ °»

١٦ Δ أ ب ح فيه : أ = (٥ ، ٧) ، ب = (١ ، ٥) ، ح = (٤ ، ٢)
(١) **أوجد :** إحداثيى نقطة ء التى تقسم $\overline{\text{ب ح}}$ من الداخل بنسبة ١ : ٢
(٢) **أثبت أن :** $\overline{\text{أ ء}} \perp \overline{\text{ب ح}}$
(٣) **أثبت أن :** أ ء = ب ح
(٤) **أوجد :** ق (∠ ب)
(٥) **أوجد مساحة سطح المثلث :** أ ب ح

١٧ إذا كانت : أ = (٥ ، ٧) ، ب = (٦ ، −١) ، ح = $(\frac{٣}{٢}$ ، ٥)
فأثبت أن : المستقيم $\vec{ر}$ = (٣ ، ١) + ك (−٢ ، ١) يصنع مع المستقيمين $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ ح}}$ مثلثًا متساوى الساقين رأسه أ

١٨ **أثبت أن المثلث الذى معادلات المستقيمات الحاملة لأضلاعه هى :**
٣ س + ٤ ص = ٣٦ ، س − ٧ ص + ١٣ = ٠ ، ٧ س + ص = ٩
هو مثلث قائم الزاوية ومتساوى الساقين.

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ **اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

(١) قياس الزاوية المنفرجة بين المستقيمين : ص = $(٢ - \sqrt{٣})$ (س + ٥) ، ص = $(٢ + \sqrt{٣})$ (س − ٧) هو ....

(أ) ١٥٠ ° (ب) ٦٠ ° (ج) ١٣٥ ° (د) ١٢٠ °

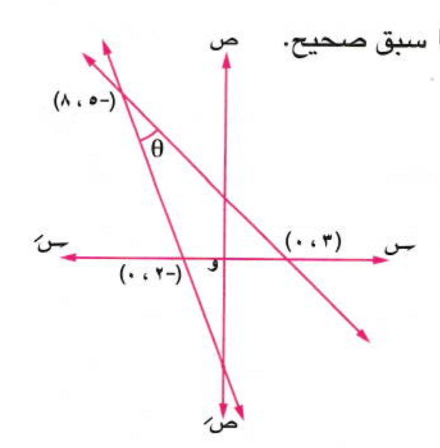
(٢) $ل_١$ ، $ل_٢$ مستقيمان ظل الزاوية بينهما يساوى $\frac{١}{٣}$ ، ميل $ل_١$ يساوى ضعف ميل $ل_٢$

فإن ميل المستقيم $ل_٢$ = ...

(أ) $\pm \frac{١}{٢}$ (ب) ± ١

(جـ) ١ ، $\frac{١}{٢}$ (د) جميع ما سبق صحيح.

(٣) في الشكل المقابل :



طا θ = ...

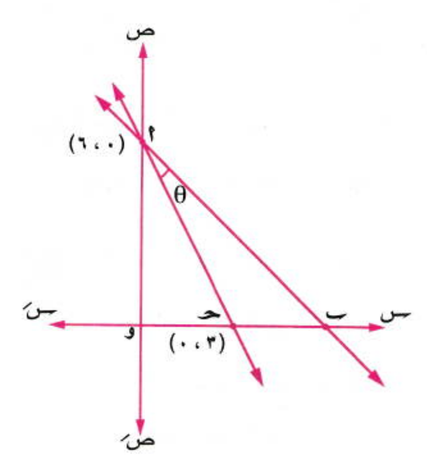
(أ) $\frac{٨}{٣}$

(ب) $\frac{٣}{١١}$

(جـ) $\frac{٥}{١١}$

(د) $\frac{٧}{١١}$

(٤) في الشكل المقابل :



إذا كان : جتا θ = $\frac{٢}{\sqrt{٥}}$

فإن النقطة ب = ...

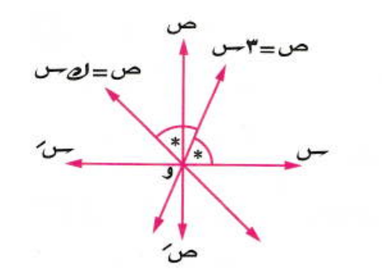
(أ) (٨ ، ٠)

(ب) (٧ ، ٠)

(جـ) (٦ ، ٠)

(د) (٤ ، ٠)

(٥) في الشكل المقابل :



ك = ...

(أ) $\frac{-٣}{٤}$ (ب) $\frac{-٤}{٣}$

(جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{٣}{٢}$

(٦) في الشكل المقابل :

ك = ...

(أ) ٣

(ب) -٣

(جـ) $\frac{٩}{٢}$

(د) $\frac{-٩}{٢}$

(٧) فى الشكل المقابل :

إذا كانت معادلة $\overleftrightarrow{أب}$ هى س + ٢ ص + ٦ = ٠

وكان ب حـ = ٢ أ حـ

فإن : طا θ = ...

(أ) $\frac{١١}{١٠}$

(ب) $\frac{٢}{١١}$

(جـ) $\frac{١٠}{١١}$

(د) $\frac{١١}{٢}$

(٨) إذا دار المستقيم المار بالنقطتين أ (٢ ، ٠) ، ب (٣ ، ٢) حول نقطة أ بزاوية قياسها ٤٥° فى اتجاه ضد عقارب الساعة فإن معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ فى وضعه الجديد هى ....

(أ) ٣ س + ص = ٦ (ب) س - ٣ ص = ٢

(جـ) س + ٣ ص = ٦ (د) س + ٣ ص = -٢



(٩) فى الشكل المقابل :

طا θ = ...

(أ) $\frac{٣}{٤}$ (ب) $\frac{٣}{٥}$

(جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

---

٢ أوجد معادلة أحد الضلعين المتساويين فى المثلث القائم الزاوية إذا كانت معادلة الوتر هى ٣ س + ٤ ص + ٤ = ٠ ونقطة رأس الزاوية القائمة هى (٢ ، ٢)

«س - ٧ ص + ١٢ = ٠ أ، ٧ س + ص - ١٦ = ٠»

---

٣ إذا كان الخط المستقيم ل يصنع زاوية جيب تمامها يساوى $\frac{٣\sqrt{١٠}}{١٠}$ مع الخط المستقيم

لَ : ٣ س - ص + ٥ = ٠ **فما هو ميل الخط المستقيم ل ؟**

أوجد : معادلة الخط المستقيم ل إذا كان يمر بالنقطة (١ ، -٢)

«غير معرف أ، $\frac{٤}{٣}$»

---

٤ **أثبت أن الزاوية بين المستقيمين :** ص = $\frac{١ + ب}{١ - ب}$ س + ٦ ، ص - ب س + ١ = ٠

قياسها ثابت لجميع قيم ب ≠ ١ وأوجد قياس هذه الزاوية.

«٤٥°»

الدرس 4

طول العمود المرسوم من نقطة إلى خط مستقيم



* طول العمود (ل) المرسوم من النقطة $(س_1 ، ص_1)$

إلى الخط المستقيم الذى معادلته : $أ س + ب ص + حـ = 0$

يتحدد من العلاقة : طول العمود (ل) $= \frac{|أ س_1 + ب ص_1 + حـ|}{\sqrt{أ^2 + ب^2}}$

(الشكل: النقطة $(س_1 ، ص_1)$ ، العمود ل ، المستقيم $أ س + ب ص + حـ = 0$)

ملاحظات هامة

1. إذا كان طول العمود المرسوم من النقطة $(س_1 ، ص_1)$ على المستقيم :
   $أ س + ب ص + حـ = 0$ يساوى الصفر فإن النقطة تكون واقعة على المستقيم.
2. طول العمود المرسوم من نقطة الأصل (0 ، 0) على المستقيم : $أ س + ب ص + حـ = 0$ يساوى $\frac{|حـ|}{\sqrt{أ^2 + ب^2}}$
3. طول العمود المرسوم من النقطة $(س_1 ، ص_1)$ على محور السينات $= |ص_1|$
4. طول العمود المرسوم من النقطة $(س_1 ، ص_1)$ على محور الصادات $= |س_1|$
5. إذا كانت $(س_1 ، ص_1)$ ، $(س_2 ، ص_2)$ نقطتين فى المستوى الذى يحوى الخط المستقيم
   $أ س + ب ص + حـ = 0$ وكان المقداران $أ س_1 + ب ص_1 + حـ$
   ، $أ س_2 + ب ص_2 + حـ$ لهما نفس الإشارة كانت النقطتان على جانب واحد من الخط المستقيم وإن اختلفا فى الإشارة كانت النقطتان على جانبين مختلفين من الخط المستقيم.

مثال ١

أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (٣ ، ٥) إلى الخط المستقيم : $\overleftarrow{ر}$ = (-١ ، ٢) + ك (٤ ، -٣)

الحل

∵ المستقيم $\overleftarrow{ر}$ = (-١ ، ٢) + ك (٤ ، -٣) يمر بالنقطة (-١ ، ٢) وميله = $\frac{-٣}{٤}$

∴ الصورة الكارتيزية هى : $\frac{ص - ٢}{س + ١} = \frac{-٣}{٤}$ ∴ ٤ ص - ٨ = -٣ س - ٣

∴ الصورة العامة هى : ٣ س + ٤ ص - ٥ = ٠

∴ طول العمود = $\frac{|٣(٣) + ٤(٥) - ٥|}{\sqrt{(٣)^٢ + (٤)^٢}}$ = ٤,٨ وحدة طول.

حاول بنفسك

أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (-٢ ، ٣) إلى الخط المستقيم : $\overleftarrow{ر}$ = (١ ، ٣) + ك (٤ ، ٣)

مثال ٢

أوجد بُعد النقطة أ = (٢ ، ٤) عن المستقيم المار بالنقطة ب = (-٢ ، ٠) وميله = $\frac{٥}{٦}$

الحل

∵ معادلة المستقيم المار بالنقطة ب = (-٢ ، ٠) وميله = $\frac{٥}{٦}$ هى :

$\frac{ص - ٠}{س + ٢} = \frac{٥}{٦}$ أى ٥ س - ٦ ص + ١٠ = ٠

∴ البُعد = طول العمود المرسوم من النقطة أ إلى المستقيم

= $\frac{|٥ \times ٢ - ٦ \times ٤ + ١٠|}{\sqrt{٢٥ + ٣٦}} = \frac{٤}{\sqrt{٦١}}$ وحدة طول.

لاحظ أن

بعد نقطة عن مستقيم تعنى طول العمود المرسوم من هذه النقطة إلى هذا المستقيم.

مثال ٣

إذا كان طول العمود المرسوم من النقطة (٧ ، حـ) إلى المستقيم : ٦ س - ٨ ص + ١٧ = ٠ .

يساوى ٣,٥ وحدة طول فأوجد قيمة : حـ

الحل

∵ $\frac{٧}{٢} = \frac{|٦ \times ٧ - ٨ \times حـ + ١٧|}{\sqrt{٣٦ + ٦٤}}$ ∴ $\frac{٧}{٢} = \frac{|٥٩ - ٨ حـ|}{١٠}$

∴ ٣٥ = |٥٩ - ٨ حـ| ∴ ٥٩ - ٨ حـ = ٣٥ أ، ٥٩ - ٨ حـ = -٣٥

∴ -٨ حـ = -٢٤ أ، -٨ حـ = -٩٤ ∴ حـ = ٣ أ، حـ = $\frac{٤٧}{٤}$

مثال ٤

مستقيم طول العمود النازل من النقطة (٢ ، ٥) عليه يساوى ٣ وحدات والمتجه (٣ ، ٤) متجه اتجاه له أوجد معادلة هذا المستقيم.

الحل

∵ المتجه (٣ ، ٤) متجه اتجاه للمستقيم. ∴ المتجه (٤ ، −٣) متجه عمودى على المستقيم.

∴ معادلة المستقيم هى : ٤ س − ٣ ص + حـ = ٠

، ∵ طول العمود عليه من النقطة (٢ ، ٥) = ٣ وحدة طول.

∴ $\frac{|٤ \times ٢ - ٣ \times ٥ + حـ|}{\sqrt{٩ + ١٦}} = ٣$ ∴ |٨ − ١٥ + حـ| = ٣ × ٥ ∴ |حـ − ٧| = ١٥

∴ حـ − ٧ = ± ١٥ ∴ حـ = ٧ + ١٥ = ٢٢

أ، حـ = ٧ − ١٥ = −٨ ∴ معادلة المستقيم هى : ٤ س − ٣ ص + ٢٢ = ٠

أ، ٤ س − ٣ ص − ٨ = ٠

مثال ٥

ا ب حـ مثلث رءوسه ا = (١ ، ٥) ، ب = (٥ ، −٣) ، حـ = (١ ، ٠) أوجد مساحته.

الحل

نعتبر أحد الأضلاع وليكن $\overline{ب حـ}$ هو قاعدة المثلث ونوجد الارتفاع وهو طول العمود من ا إلى الخط المستقيم $\overleftrightarrow{ب حـ}$ ونوجد كذلك طول $\overline{ب حـ}$ ثم نحسب مساحة المثلث كما يلى :

∵ ب حـ = $\sqrt{(١ - ٥)^٢ + (٠ + ٣)^٢} = \sqrt{١٦ + ٩}$ = ٥ وحدات طولية.

، معادلة $\overleftrightarrow{ب حـ}$ هى : $\frac{ص + ٣}{س - ٥} = \frac{٠ + ٣}{١ - ٥} = \frac{٣}{-٤}$

أى ٣ س + ٤ ص − ٣ = ٠

∴ طول العمود من ا إلى $\overleftrightarrow{ب حـ}$ = $\frac{|٣ \times ١ + ٤ \times ٥ - ٣|}{\sqrt{٩ + ١٦}} = \frac{|٣ + ٢٠ - ٣|}{٥} = \frac{٢٠}{٥}$ = ٤ وحدات طولية.

∴ مساحة Δ ا ب حـ = $\frac{١}{٢}$ × ٥ × ٤ = ١٠ وحدات مربعة.

حاول بنفسك

إذا كانت النقط : ا = (−٣ ، ٠) ، ب = (٣ ، ٢) ، حـ = (−١ ، ٥) تمثل رؤوس مثلث أوجد :

١ طول $\overline{ب حـ}$

٢ معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{ب حـ}$

٣ طول العمود الساقط من ا على $\overleftrightarrow{ب حـ}$

٤ مساحة Δ ا ب حـ

مثال ٦

أوجد مساحة الدائرة التى مركزها النقطة م (١ ، ٢) ويمسها المستقيم الذى معادلته :

ل : ٦ س + ٨ ص − ٢ = ٠ (حيث π = ٣,١٤)

الحل

∵ طول العمود المرسوم من المركز م (١ ، ٢) على المماس ل = $\frac{|٦ \times ١ + ٨ \times ٢ - ٢|}{\sqrt{(٦)^٢ + (٨)^٢}} = \frac{٢٠}{١٠} = ٢$ وحدة طول.

، ∵ طول نصف قطر الدائرة = طول العمود المرسوم من المركز على المماس ل

∴ نق = ٢ وحدة طول. ∴ المساحة = π نق^٢ = ٣,١٤ × ٤ = ١٢,٥٦ وحدة مربعة.

مثال ٧

أثبت أن النقطتين : أ = (٣ ، ١) ، ب = (−٣ ، ٢) تقعان على جانبين مختلفين من الخط المستقيم

ل : ٣ س − ٤ ص + ٦ = ٠ وعلى بُعدين متساويين منه.

الحل

∵ طول العمود من أ على الخط المستقيم ل = $\frac{|٣ \times ٣ - ٤ \times ١ + ٦|}{\sqrt{٩ + ١٦}} = \frac{|١١|}{٥} = \frac{١١}{٥} = ٢,٢$ وحدة طول.

، طول العمود من ب على الخط المستقيم ل = $\frac{|٣ (-٣) - ٤ (٢) + ٦|}{\sqrt{٩ + ١٦}} = \frac{|-١١|}{٥} = \frac{١١}{٥} = ٢,٢$ وحدة طول.

∴ أ ، ب على بُعدين متساويين من الخط المستقيم ل

، ∵ المقدار : ٣ س − ٤ ص + ٦ له إشارتان مختلفتان ١١ ، −١١

عند التعويض بإحداثيى كل من النقطتين أ ، ب

∴ النقطتان تقعان على جانبين مختلفين من المستقيم ل

مثال ٨

أثبت أن المستقيمين $ل_١$ ، $ل_٢$ متوازيان وأوجد البُعد بينهما فى كل مما يأتى :

١ $ل_١$: س − ٢ ص + ١١ = ٠ ، $ل_٢$: ٢ س − ٤ ص + ٧ = ٠

٢ $ل_١$: $\overrightarrow{ر}$ = (٢ ، −٥) + ك (٣ ، −٤) ، $ل_٢$: $\overrightarrow{ر}$ = (١ ، ٤) + ك َ (−٦ ، ٨)

الحل

١ ∵ ميل المستقيم $ل_١$ = $\frac{-١}{-٢} = \frac{١}{٢}$

، ميل المستقيم $ل_٢$ = $\frac{-٢}{-٤} = \frac{١}{٢}$

∴ الميلان متساويان.

∴ المستقيمان متوازيان.

ملاحظة

لإيجاد البُعد بين $ل_١$ ، $ل_٢$ نعين نقطة على أحد المستقيمين ونوجد طول العمود الساقط منها على المستقيم الآخر.

* فبوضع $س = ١$ مثلاً فى معادلة المستقيم $ل_١$

∴ $ص = ٦$ ∴ $(١ ، ٦) \in ل_١$

∴ البُعد بين المستقيمين = طول العمود المرسوم

من النقطة (١ ، ٦) على المستقيم $ل_٢$

$$= \frac{|٢ \times ١ - ٤ \times ٦ + ٧|}{\sqrt{٤ + ١٦}} = \frac{٣\sqrt{٥}}{٢} \text{ وحدة طول.}$$

ملاحظة

البعد بين المستقيمين المتوازيين

$أ س + ب ص + حـ = ٠$ ، $أ س + ب ص + ء = ٠$

يساوى $\frac{|حـ - ء|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}}$

٢ المتجه $ى = (٣ ، -٤)$ متجه اتجاه للمستقيم $ل_١$

، المتجه $ى' = (-٦ ، ٨)$ متجه اتجاه للمستقيم $ل_٢$

، ∵ $ى' = (-٦ ، ٨) = -٢ (٣ ، -٤) = -٢ ى$ ∴ $ل_١ // ل_٢$

، ∵ النقطة $ن = (٢ ، -٥) \in ل_١$

، ∵ $ل_٢$: $س = ١ - ٦ ك$ ، $ص = ٤ + ٨ ك$ ∴ $ل_٢$: $\frac{س - ١}{-٦} = \frac{ص - ٤}{٨}$

∴ $ل_٢$: $٤ س + ٣ ص - ١٦ = ٠$

∴ البعد بين المستقيمين = طول العمود المرسوم من النقطة (٢ ، -٥) على المستقيم $ل_٢$

$$= \frac{|٤ \times ٢ + ٣ (-٥) - ١٦|}{\sqrt{١٦ + ٩}} = ٤,٦ \text{ وحدة طول.}$$

مثال ٩

أثبت أن النقطة : (٤ ، ٦) تقع على أحد منصفى الزاوية بين المستقيمين :

$ل$: $٩ س - ١٣ ص - ٨ = ٠$ ، $ل'$: $س = ٥ + ٣ ك$ ، $ص = ك + ٣$

الحل

النقطة تقع على أحد منصفى الزاوية بين المستقيمين ل ، لَ إذا كانت على بُعدين متساويين من المستقيمين.

$$\text{بُعد النقطة (٤ ، ٦) عن المستقيم ل} = \frac{|٩ \times ٤ - ١٣ \times ٦ - ٨|}{\sqrt{٨١ + ١٦٩}} = \frac{|٣٦ - ٧٨ - ٨|}{\sqrt{٢٥٠}}$$

$$= \frac{|-٥٠|}{٥\sqrt{١٠}} = \sqrt{١٠} \text{ وحدة طول} \quad (١)$$

، معادلة لَ هى : $\frac{س - ٥}{٣} = \frac{ص - ٣}{١}$ أى : $س - ٣ ص + ٤ = ٠$

$$\therefore \text{ بُعد النقطة (٤ ، ٦) عن المستقيم لَ} = \frac{|٤ - ٣ \times ٦ + ٤|}{\sqrt{١ + ٩}} = \frac{|-١٠|}{\sqrt{١٠}}$$

$$= \sqrt{١٠} \text{ وحدة طول} \quad (٢)$$

من (١) ، (٢) : ∴ النقطة (٤ ، ٦) تقع على أحد منصفى الزاوية بين المستقيمين ل ، لَ



تمارين 7

على طول العمود المرسوم من نقطة إلى خط مستقيم



من أسئلة الكتاب المدرسى • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) طول العمود المرسوم من النقطة (−٣ ، ٥) إلى محور الصادات يساوى .... وحدة طول.

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ٨ (د) −٣

(٢) طول العمود المرسوم من النقطة (−٣ ، ٥) إلى محور السينات يساوى .... وحدة طول.

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ٨ (د) −٣

(٣) طول العمود المرسوم من نقطة الأصل إلى المستقيم ٣ س − ٤ ص − ١٥ = ٠

يساوى .... وحدة طول.

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ١٥

(٤) طول العمود المرسوم من النقطة (٣ ، ١) إلى الخط المستقيم : ٤ س + ٣ ص − ٥ = ٠

يساوى .... وحدة طول.

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(٥) طول العمود المرسوم من النقطة (٠ ، −٥) إلى الخط المستقيم س + ٧ = ٠

يساوى .... وحدة طول.

(أ) ٢ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) ١٢

(٦) طول العمود المرسوم من النقطة (١ ، ١) إلى المستقيم س + ص = ٠ يساوى .... وحدة طول.

(أ) ٢ (ب) $\sqrt{٢}$ (جـ) ١ (د) ٠

(٧) طول العمود المرسوم من نقطة الأصل إلى المستقيم $\overleftarrow{ر}$ = (١ ، ٢) + ك (٤ ، ٣)

يساوى .... وحدة طول.

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ١

(٨) طول العمود المرسوم من النقطة (−٢ ، −٤) على المستقيم $\overleftarrow{ر}$ = (٣ ، ٠) + ك (٦ ، ٨)

يساوى .... وحدة طول.

(أ) ١,٦ (ب) ٢,٦ (جـ) ٠,٦ (د) ٣,٦

(٩) طول العمود المرسوم من النقطة (−٢ ، −٥) على المستقيم ل : س = −٢ + ٤ ك ، ص = −٣ ك

يساوى .... وحدة طول.

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(١٠) بعد النقطة (١ ، ٥) عن المستقيم المار بالنقطتين (٥ ، −٣) ، (١ ، ٠) يساوى .... وحدة طول.

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(١١) بعد النقطة (١ ، ٥) عن المستقيم المار بالنقطة (٢ ، −٣) والمتجه (٢ ، −١) متجه اتجاه له يساوى .... وحدة طول.

(أ) $\sqrt{٥}$ (ب) ٢ $\sqrt{٥}$ (جـ) ٣ $\sqrt{٥}$ (د) ٤ $\sqrt{٥}$

(١٢) أ ب حـ مثلث فيه : أ (٣ ، ٧) ، ب (٧ ، −١) ، حـ (٣ ، ٢) فإن طول العمود النازل من أ إلى $\overleftrightarrow{ب حـ}$ يساوى .... وحدة طول.

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ١

(١٣) فى الشكل المقابل :

المستقيم ٣ س + ٤ ص + ٩ = ٠ مماس للدائرة م

حيث م (١ ، ٢) فإن طول نصف قطر الدائرة

يساوى .... وحدة طول.

(أ) ٥ (ب) $\sqrt{٥}$

(جـ) ٤ (د) ٣

(١٤) مساحة الدائرة التى مركزها النقطة (٤ ، −١) ويمسها المستقيم ل : $\overleftarrow{ر}$ = (١ ، ١) + ك (١٢ ، ٥) تساوى .... وحدة مربعة.

(أ) ٨ π (ب) ٩ π (جـ) ٦ π (د) ٣ π

(١٥) البعد بين المستقيمين : ص − ٣ = ٠ ، ص + ٢ = ٠ يساوى .... وحدة طول.

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) ٥

(١٦) البعد بين المستقيمين : $\overleftarrow{ر}$ = (−١ ، ٠) + ك (٤ ، −٣) ، ٦ س + ٨ ص − ٩ = ٠ يساوى .... وحدة طول.

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ١ (جـ) $\frac{٣}{٢}$ (د) ٢

(١٧) البعد بين المستقيمين : ٣ س − ٤ ص + ٢٠ = ٠ ، ٣ س − ٤ ص + ١٠ = ٠ يساوى .... وحدة طول.

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(١٨) البعد بين المستقيمين : $\overleftarrow{ر}$ = (٢ ، ٠) + ك (١٢ ، −٥) ، $\overleftarrow{ر}$ = (٦,٤ ، ٠) + ك (١٢ ، −٥) يساوى .... وحدة طول.

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(١٩) إذا كان طول العمود المرسوم من النقطة (٢ ، ك) على المستقيم ٢ س + ص + ١ = ٠ يساوى $\sqrt{٥}$ وحدة طول فإن إحدى قيم ك = ...

(أ) −٤ (ب) −٥ (جـ) −٨ (د) −١٠

(٢٠) إذا كان البعد بين المستقيمين $ل_١$: ٣ س + ٤ ص − ١٢ = ٠ ، $ل_٢$: ٦ س + ٨ ص + حـ = ٠

يساوى ٣ وحدات طول ، حـ > ٠ فإن : حـ = ...

(أ) ٥٤ (ب) ٦ (جـ) ٣٠ (د) ٣

(٢١) فى الشكل المقابل :

طول العمود المرسوم من نقطة أ على المستقيم $\overleftrightarrow{بحـ}$

يساوى .... وحدة طول.

(أ) ٢ (ب) ٣

(جـ) ٤ (د) ٥

(٢٢) فى الشكل المقابل :

طول $\overline{أب}$ = ... وحدة طول.

(أ) ١ (ب) ٢

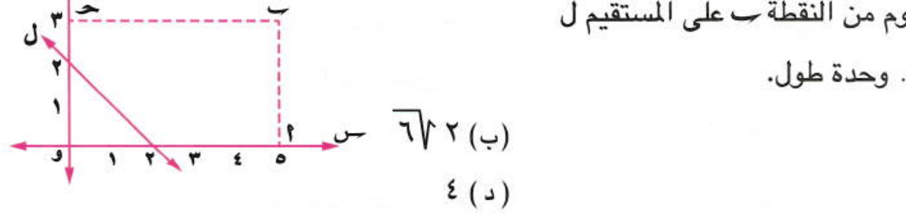
(جـ) ٣ (د) ٤

(٢٣) معادلة أحد المستقيمين الذى ميله = $-\frac{٥}{١٢}$ وطول العمود الساقط عليه من النقطة (٢ ، −١) يساوى ٢ وحدة طول هى ....

(أ) ٥ س + ١٢ ص − ٢٨ = ٠ (ب) ٥ س + ١٢ ص − ٢٤ = ٠

(جـ) ٥ س + ١٢ ص + ٢٤ = ٠ (د) ٥ س − ١٢ ص + ٢٨ = ٠

(٢٤) فى الشكل المقابل :



طول العمود المرسوم من النقطة ب على المستقيم ل

يساوى .... وحدة طول.

(أ) $٣\sqrt{٢}$ (ب) $٢\sqrt{٦}$

(جـ) ٣ (د) ٤

(٢٥) فى الشكل المقابل :

إذا كانت م دائرة ، $\overleftrightarrow{أب}$ مماسًا لها وكانت معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{أم}$

هى س − ٣ ص + ٤ = ٠ ، كانت النقطة ب (٤ ، −٤)

فإن : ب حـ × ب ء = ... وحدة مربعة.

(أ) −٢ (ب) $٢\sqrt{١٠}$ (جـ) $٤\sqrt{٥}$ (د) ٤٠

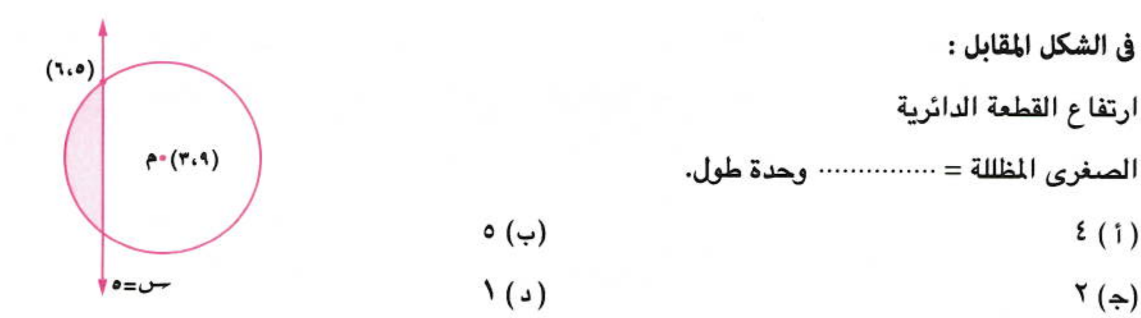
(٢٦) مربع فيه معادلتى المستقيمين الحاملين لضلعين متقابلين فيه هما ص = ٣ ، ص = −٢

فإن معادلتى المستقيمين الحاملين للضلعين الآخرين يمكن أن يكونا ....

(أ) ص = ٣ ، ص = −٢ (ب) س = ٣ ، س = ٢

(جـ) س = ٧ ، س = ٢ (د) ص = ٤ ، ص = −١

(٢٧) في الشكل المقابل :



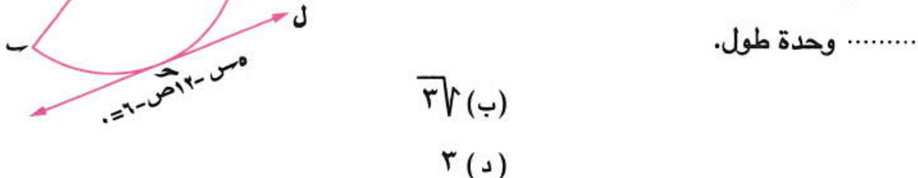
ارتفاع القطعة الدائرية

الصغرى المظللة = ... وحدة طول.

(أ) ٤ (ب) ٥

(جـ) ٢ (د) ١

(٢٨) في الشكل المقابل :



قطاع دائري ، المستقيم ل مماس لدائرته

فإن : أ م = ... وحدة طول.

(أ) ٤ (ب) $\sqrt{٣}$

(جـ) $\frac{٧}{١٣}$ (د) ٣

(٢٩) إذا كان المستقيم ل يمر بنقطة الأصل وكانت النقطتان (١ ، −٢) ، (٣ ، ٤) على بعدين متساويين من المستقيم ل فإن ميل المستقيم ل يساوي ....

(أ) ٣ أ، $\frac{١}{٣}$ (ب) ٢ أ، $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ أ، ٣ (د) $\frac{١}{٣}$ أ، ٢

(٣٠) لجميع قيم θ فإن طول العمود الساقط من نقطة الأصل على المستقيم : س حتا θ + ص حا θ = ل يساوي ....

(أ) $|ل|$ (ب) $|ل \text{ حتا } \theta|$ (جـ) $|ل \text{ حا } \theta|$ (د) $\left|\frac{ل}{\sqrt{١ + ل^٢}}\right|$

(٣١) إذا كان أ تنتمي للمستقيم : ٣ س − ٤ ص + ٤ = ٠ ، ب تنتمي للمستقيم ٣ س − ٤ ص − ١ = ٠ فإن أقل قيمة لطول $\overline{أب}$ تساوي ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٥

(٣٢) إذا كانت أ ، ب نقطتين على المستقيم س − ٢ ص + ٥ = ٠ حيث طول $\overline{أب}$ يساوي ٤ $\sqrt{٥}$ وحدة طولية ، حـ نقطة على المستقيم س − ٢ ص − ١ = ٠ فإن مساحة المثلث أ ب حـ = ... وحدة مربعة.

(أ) ١٢ $\sqrt{٥}$ (ب) ١٢ (جـ) ٦ $\sqrt{٥}$ (د) ٦

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد طول العمود المرسوم من النقطة ى إلى المستقيم ل إذا كانت :

(١) ى = (٠ ، ٠) ، ل : $\vec{ر}$ = (٠ ، ٥) + ك (٣ ، ٤)

(٢) ى = (٢ ، −٤) ، ل : ١٢ س + ٥ ص − ٤٣ = ٠

(٣) ى = (٥ ، ٢) ، ل : ٨ س + ١٥ ص − ١٩ = ٠

(٤) ى = (−٢ ، −٧) ، ل : س + ص + ٩ = ٠

(٥) ى = (٢ ، −٦) ، ل : $\frac{س}{٣} + \frac{ص}{٢} = ٢$

(٦) ى = (٢ √ب ، − √أ) ، ل : (أ − ب) س + ٢ √أب ص − ٢ أ √ب = ٠

---

٢ احسب طول نصف قطر الدائرة التى مركزها النقطة م = (٣ ، −١) ويمسها المستقيم الذى معادلته

ل : ٤ س + ٣ ص + ٦ = ٠ «٣ وحدة طول»

---

٣ أوجد بعد النقطة (١ ، −٢) عن الخط المستقيم المار بالنقطة (٢ ، −٣) والذى يصنع زوايا متساوية القياس مع كل من الاتجاهين الموجب لمحور السينات والسالب لمحور الصادات. «√٢ وحدة طول»

---

٤ إذا كان طول العمود المرسوم من النقطة (١ ، حـ) على الخط المستقيم :

٢ س + ٣ ص + ٥ = ٠ يساوى √١٣ وحدة طول فأوجد قيمة : حـ «٢ أ − ٢٠/٣»

---

٥ إذا كان طول العمود المرسوم من النقطة (٣ ، ١) على المستقيم :

٣ س − ٤ ص + حـ = ٠ يساوى ٢ وحدة طول فأوجد قيمة : حـ «٥ أ −١٥»

---

٦ إذا كان طول العمود الساقط من النقطة (٧ ، −١) على المستقيم :

أ س + ص = ٠ يساوى ٢ √١٠ وحدة طول فأوجد قيم : أ الممكنة. «٣ أ −١٣/٩»

---

٧ أثبت أن المستقيمين : ل١ : ٢ س + ص − ٣ = ٠ ، ل٢ : ر = (٥ ، ٨) + ك (−١ ، ٢) متوازيان ثم أوجد البعد بينهما. «٣ √٥ وحدة طول»

---

٨ أثبت أن المستقيمين : ل١ : ٣ س − ٤ ص − ١٢ = ٠ ، ل٢ : ٦ س − ٨ ص + ٢١ = ٠ متوازيان ثم أوجد البعد بينهما. «٤,٥ وحدة طول»

---

٩ أثبت أن المستقيمين : ل١ : ر = (٠ ، ٢) + ك (٥ ، ٢) ، ل٢ : ر = (٢ ، −٣) + ك (١٠ ، ٤) متوازيان ثم أوجد البعد بينهما. «√٢٩ وحدة طول»

---

١٠ طرق : طريقان متجاوران مسار الطريق الأول تمثله المعادلة : ٣ س − ٤ ص − ٧ = ٠

ومسار الطريق الثانى تمثله المعادلة : ٣ س − ٤ ص + ١١ = ٠

أثبت أن : الطريقين متوازيان ثم أوجد أقصر بعد بينهما. «٣,٦ وحدة طول»

---

١١ إذا قطع المستقيم : ٤ س − ٣ ص = ١٢ محورى الإحداثيات فى النقطتين أ ، ب فأوجد :

(١) مساحة سطح المثلث و أ ب حيث و نقطة الأصل.

(٢) أقصر مسافة من نقطة الأصل إلى الخط المستقيم أ ب «٦ وحدة مربعة ، ٢,٤ وحدة طول»

١٢ إذا كانت النقط أ = (-٤ ، ١) ، ب = (٢ ، ٣) ، حـ = (-٢ ، ٦) هى رءوس مثلث **فأوجد :**

(١) طول $\overline{ب حـ}$

(٢) المعادلة الكارتيزية للمستقيم $\overleftrightarrow{ب حـ}$

(٣) طول العمود الساقط من أ إلى $\overleftrightarrow{ب حـ}$

(٤) مساحة Δ أ ب حـ

«٥ وحدات طول ، ٣ س + ٤ ص – ١٨ = ٠ ، ٥,٢ وحدة طول ، ١٣ وحدة مربعة»

---

١٣ أوجد مساحة المثلث الذى رءوسه النقط أ = (٣ ، ٢) ، ب = (-٢ ، ٥) ، حـ = (١ ، -٣) «١٥,٥ وحدة مربعة»

---

١٤ أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : أ = (-١ ، ٤) ، ب = (٣ ، -٢) ، حـ = (-١ ، -٥) **أوجد :**

(١) إحداثيى النقطة ء

(٢) طول $\overline{ب حـ}$

(٣) معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{ب حـ}$

(٤) طول العمود الساقط من أ إلى $\overleftrightarrow{ب حـ}$

(٥) مساحة متوازى الأضلاع أ ب حـ ء

«(-٥ ، ١) ، ٥ وحدات طول ، ٣ س – ٤ ص – ١٧ = ٠ ، ٧,٢ وحدة طول ، ٣٦ وحدة مربعة»

---

١٥ **أثبت أن النقط :** أ = (٣ ، -١) ، ب = (-٥ ، ٢) ، حـ = (-٢ ، ٤) ، ء = (٦ ، ١)

هى رءوس متوازى أضلاع وأوجد مساحته. «٢٥ وحدة مربعة»

---

١٦ **أثبت أن النقط :** أ = (٢ ، ٣) ، ب = (٦ ، ٢) ، حـ = (-٢ ، -٢) ، ء = (-٢ ، ١)

هى رءوس شبه منحرف وأوجد مساحته. «١٨ وحدة مربعة»

---

١٧ أ ب حـ ء شبه منحرف فيه : $\overleftrightarrow{أ ء}$ // $\overleftrightarrow{ب حـ}$ ، فإذا كانت :

أ (٢ ، ١) ، ب (٥ ، ٣) ، حـ (٦ ، ١) ، ء (٤ ، ص)

أوجد قيمة ص ، ثم أوجد مساحة شبه المنحرف أ ب حـ ء «-٣ ، ١٢ وحدة مربعة»

---

١٨ أوجد معادلة المستقيم الذى متجه اتجاهه (-١ ، ٧) وطول العمود النازل عليه من النقطة (٣ ، ١) يساوى

٣ $\sqrt{٢}$ وحدة طول. «٧ س + ص + ٨ = ٠ أ، ٧ س + ص – ٥٢ = ٠»

---

١٩ **أثبت أن النقطتين :** (١ ، ١) ، (-٢ ، ٣) تقعان على جانبين مختلفين من الخط المستقيم

٢ س – ص + ٣ = ٠ وعلى بعدين متساويين منه.

---

٢٠ 📖 **أثبت أن المستقيم :** ٣ س – ٤ ص + ٣ = ٠ يمس كلًا من الدائرتين اللتين مركزاهما النقطتان

م = (٥ ، ٢) ، م = (-٢ ، ٣) واللتان طولا نصفى قطريهما ٢ ، ٣ وحدة طول على الترتيب ، وبين

هل الدائرتان تقعان فى جانب واحد أم فى جانبى هذا المستقيم ؟

٢١ **الربط بالهندسة :** دائرة مركزها نقطة الأصل فيها وتران معادلتيهما :

٤ س − ٣ ص + ١٠ = ٠ ، ٥ س − ١٢ ص + ٢٦ = ٠ أثبت أن الوترين متساويان فى الطول.

---

٢٢ **أثبت أن :** النقطة (١١ ، ٨) هى مركز الدائرة الداخلة للمثلث الذى معادلات المستقيمات الحاملة لأضلاعه

هى : ر⃗ = (−٣ ، ٢٠) + ك (١ ، ٠) ، ٣ س + ٤ ص = ٥ ، ٥ س + ١٢ ص + ٥ = ٠

---

٢٣ **أثبت أن :** أ (٤ ، ٦) تقع على أحد منصفى الزاوية بين المستقيمين :

٩ س − ١٣ ص − ٨ = ٠ ، س − ٣ ص + ٤ = ٠

---

٢٤ **أوجد مساحة الشكل الرباعى أ ب حـ ء الذى رءوسه النقط :**

أ = (٢ ، ٠) ، ب = (٤ ، ١) ، حـ = (٣ ، ٥) ، ء = (−٤ ، ٨)

«٢٣,٥ وحدة مربعة»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ **اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

(١) أ ب حـ ء مربع حيث أ (٢ ، −٣) ومعادلة ب⃡حـ هى ٤ س + ٣ ص − ٩ = ٠

فإن مساحة المربع = ... وحدة مربعة.

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

(٢) أ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع فيه : أ (٢ ، −١) ومعادلة ب⃡حـ هى س + ص = ٢

فإن طول ضلع المثلث أ ب حـ = ... وحدة طولية.

(أ) $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ (ب) $\frac{\sqrt{٦}}{٢}$ (جـ) $\frac{\sqrt{٦}}{٣}$ (د) $\sqrt{٢}$

(٣) معادلة الخط المستقيم الذى طول العمود المرسوم من (٠ ، ٠) عموديًا عليه يساوى ٤ وحدات وهذا الخط يصنع زاوية قياسها ١٢٠° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات هى ....

(أ) س + $\sqrt{٣}$ ص ± ٨ = ٠ (ب) $\sqrt{٣}$ س + ص ± ٤ = ٠

(جـ) $\sqrt{٣}$ س + ص ± ٢ = ٠ (د) $\sqrt{٣}$ س + ص ± ٨ = ٠

(٤) نقطة تقاطع ارتفاعات المثلث الذى أضلاعه تنطبق على المستقيمات :

س = ٠ ، ص = ٠ ، س + ص = ١ هى ....

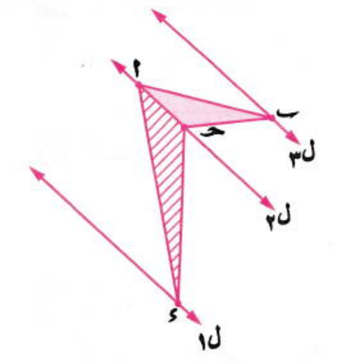
(أ) (١ ، ١) (ب) (٠ ، ٠) (جـ) (١ ، ٠) (د) $\left(\frac{١}{٣} ، \frac{١}{٣}\right)$

(٥) إذا كان : حـ هو طول العمود الساقط من نقطة الأصل على المستقيم :

س + ب ص = ٢ حـ فإن : ب يمكن أن تساوى ....

(أ) ١ (ب) $\sqrt{٣}$ (جـ) $\frac{١}{حـ}$ (د) حـ

(٦) فى الشكل المقابل :



إذا كانت معادلة $ل_1$ هى ٢ س + ٣ ص + ك = ٠

، معادلة $ل_2$ هى ٢ س + ٣ ص − ١ = ٠

، معادلة $ل_3$ هى ٢ س + ٣ ص − ٤ = ٠

وكانت $\frac{\text{مساحة } (\Delta \text{ أ ب حـ})}{\text{مساحة } (\Delta \text{ أ ء حـ})} = \frac{١}{٢}$

فإن : ك يمكن أن تساوى ....

(أ) ٣ (ب) −٥ (جـ) ٥ (د) −٣

(٧) النسبة التى يقسم بها المستقيم س − ص − ٢ = ٠ القطعة المستقيمة $\overline{\text{أ ب}}$ حيث أ (٣ ، −١)

، ب (٨ ، ٩) هى ....

(أ) ١ : ٢ من الداخل (ب) ٢ : ١ من الخارج

(جـ) ٢ : ٣ من الداخل (د) ٣ : ٢ من الخارج

---

٢ أوجد نقطة على المستقيم س + ص + ٩ = ٠ وتبعد عن المستقيم س + ٢ ص + ٢ = ٠

بمقدار $\sqrt{٥}$ وحدة طولية. «(−١١ ، ٢) ، (−٢١ ، ١٢)»

---

٣ إذا كانت : أ = (٣ ، ٤) ، ب = (٤ ، ٦) ، حـ = (−١ ، ٢) ، ء = (٢ ، ٠)

فأوجد طول : $\overline{\text{حـ َ ءَ}}$ حيث حـَ ، ءَ نقطتا تقاطع العمودين المرسومين من حـ ، ء على الخط المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

« $\frac{١}{\sqrt{٥}}$ وحدة طول»

---

٤ أوجد معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة (٢ ، −٤) وطول العمود الساقط عليه من نقطة الأصل يساوى ٢

وحدة طول وبين أن هناك مستقيمين يحققان هذه الشروط. «س − ٢ = ٠ ، ٣ س + ٤ ص + ١٠ = ٠»

---

٥ إذا كانت : أ = (٣ ، ٥) ، ب = (١١ ، ١١) نقطتين ثابتتين فأوجد النقطة (أو النقط) حـ التى تنتمى لمحور

السينات بحيث تكون مساحة Δ أ ب حـ تساوى ٣٠ وحدة مربعة. «($\frac{١٩}{٣}$ ، ٠) أ، ($\frac{-٤١}{٣}$ ، ٠)»

يُصرف مجاناً مع هذا الكتاب
- الجزء الخاص بالامتحانات
- الجزء الخاص بالإجابات



- ادخل كودك الشخصي الموجود على ظهر الغلاف
- لمزيد من المعلومات انظر صفحة ٣.





الأول الثانوى

الفصل الدراسى الثانى

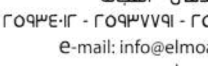
الآن بالمكـــتبات

المعاصر فى:

- اللغـــــة الإنجــــليزية
- اللغـــــة الفـــرنســية

للصـــف الأول الثـــانوى





مكتبة الطلبة

للطبـع والنشـر والتـوزيـع

٣ شارع كامل صدقى - الفجالة

تليفون: ٢٥٩٠٢٩٩٧ - ٢٥٩٣٧٧٩١ - ٢٥٩٣٤٠١٢ /٠٢

e-mail: info@elmoasserbooks.com

www.elmoasserbooks.com

الخط الساخن ١٥٠١٤

